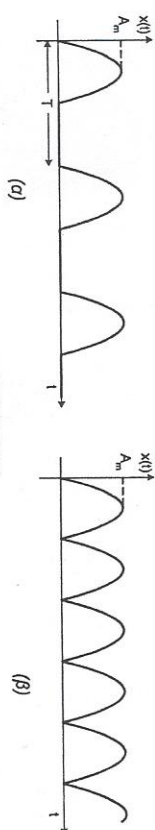


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 4.5-1 Να βρεθεί η μέση και η ενεργός τιμή του ημιανορθωμένου και του πλήρως ανορθωμένου ημιτονοειδούς σήματος $x(t) = A_m \eta \mu \omega t$.



Σχήμα 4.5-1

ΛΥΣΗ

(α) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το ημιανορθωμένο σήμα έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T 0 dt \right] \quad (1)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T/2} A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t d\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = -\frac{1}{2\pi} A_m \sigma \nu \eta \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} A_m (\sigma \nu \eta \pi - \sigma \nu 0) = -\frac{1}{\pi} A_m \end{aligned} \quad (2)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής έχουμε

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m^2 \eta^2 \frac{2\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^T 0 dt \right] \quad (3)$$

οπότε

$$\begin{aligned} x_{rms}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A_m^2 \eta^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} A_m^2 (1 - \sigma \nu \eta^2 \frac{2\pi}{T} t) dt = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{T/2} A_m^2 (1 - \sigma \nu \eta^2 \frac{2\pi}{T} t) d\left(\frac{4\pi}{T} t\right) = -\frac{1}{4} A_m^2 \end{aligned} \quad (4)$$

ή

$$x_{rms} = -\frac{1}{2} A_m \quad (5)$$

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το πλήρως ανορθωμένο σήμα έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{\pi} A_m \quad (6)$$

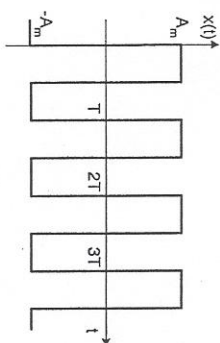
Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής έχουμε

$$x_{rms}^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A_m^2 \eta^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{2} A_m^2 \quad (7)$$

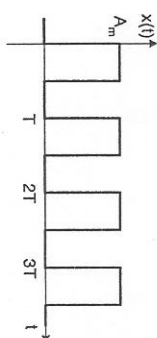
οτότε

$$x_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_m \quad (8)$$

Πρόβλημα 4.5-2 Να βρεθεί η μέση και η ενεργός τιμή των σημάτων του ΣΧ.4.5-2.



(α)



(β)

Σχήμα 4.5-2

ΛΥΣΗ

(α) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το τετραγωνικό σήμα του ΣΧ.4.5-2(α) έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m dt - \int_{T/2}^T A_m dt \right] = 0 \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής έχουμε

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m^2 dt + \int_{T/2}^T (-A_m)^2 dt \right] = A_m^2 \quad (2)$$

ή

$$x_{rms} = A_m \quad (3)$$

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για τον ουρμό των τετραγωνικών παλμών του ΣΧ.4.5-2(β) έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m dt + \int_{T/2}^T 0 dt \right] = \frac{1}{2} A_m \quad (4)$$

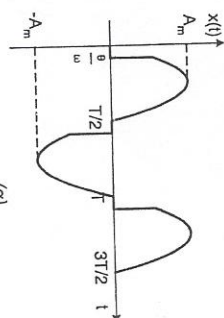
Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής έχουμε

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A_m^2 dt + \int_{T/2}^T 0 dt \right] = \frac{1}{2} A_m^2 \quad (5)$$

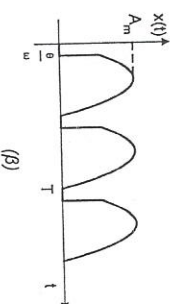
οτότε

$$x_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_m \quad (6)$$

Πρόβλημα 4.5-3 Να βρεθεί η μέση και η ενεργός τιμή των σημάτων του ΣΧ.4.5-3 και να παρασχεθούν γραφικά συνηρησει της γνώας θ. Τα σήματα αυτά προέρχονται από κατάλληλη επεξεργασία του ημιονοειδούς σήματος $x(t) = A_m \eta \mu t$ σε ηλεκτρονικές διατάξεις ισχύος.



(α)



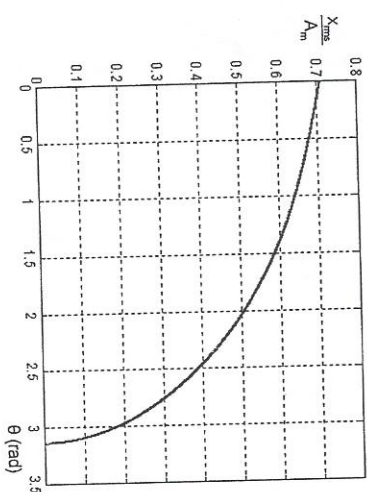
(β)

Σχήμα 4.5-3

ΛΥΣΗ

(α) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το σήμα του ΣΧ.4.5-3(α) έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\theta/\omega} 0 dt + \int_{\theta/\omega}^{T/2} A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t dt + \int_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} 0 dt + \int_{T/2+\theta/\omega}^T A_m \eta \mu \frac{2\pi}{T} t dt \right] \quad (1)$$



Σχήμα 4.5-3(γ)

οπότε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[-A_m \sin \frac{2\pi}{T} t \right]_{0/T}^{T/2} - A_m \sin \frac{2\pi}{T} t \left[\frac{T}{2} \right]_{T/2+\theta/\omega}^{T/2+\theta/\omega} \quad (2)$$

ή

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \frac{1}{2\pi} [-A_m (\sin \pi - \sin \theta) - A_m (\sin 2\pi - \sin(\pi + \theta))] = \\ &= \frac{1}{2\pi} [A_m (1 + \sin \theta) - A_m (1 + \sin \theta)] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής έχουμε

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 0 dt + \int_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} (A_m \sin \frac{2\pi}{T} t)^2 dt + \int_{T/2+\theta/\omega}^T (A_m \sin \frac{2\pi}{T} t)^2 dt \right] \quad (4)$$

οπότε

$$x_{rms}^2 = \frac{A_m^2}{2T} \left[\int_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} (1 - \sin \frac{4\pi}{T} t) dt + \int_{T/2+\theta/\omega}^T (1 - \sin \frac{4\pi}{T} t) dt \right] \quad (5)$$

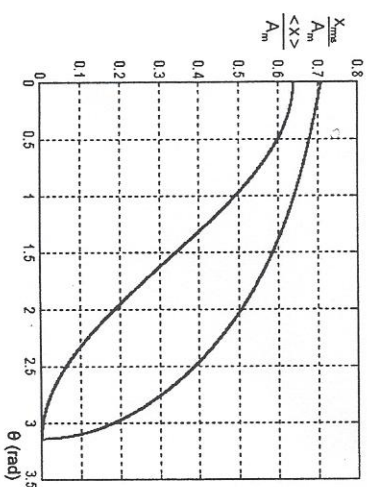
ή

$$\begin{aligned} x_{rms}^2 &= \frac{A_m^2}{8T} \left[\int_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} (1 - \sin \frac{4\pi}{T} t) dt + \int_{T/2+\theta/\omega}^T (1 - \sin \frac{4\pi}{T} t) dt \right] = \\ &= \frac{A_m^2}{2\pi} \left[\pi - \theta + \frac{1}{2} \eta \mu 2\theta \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Τελικά,

$$x_{rms} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2} \eta \mu 2\theta} \quad (7)$$

Η ενεργός τιμή του σήματος του Σχ.4.5-3(α) συναρτήσει της γωνίας θ παρουσιάζεται στο Σχ. 4.5-3(γ).



Σχήμα 4.5-3(γ)

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το σήμα του Σχ.4.5-3(β) έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 0 dt + \int_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} A_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt - \int_{T/2+\theta/\omega}^T A_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt \right] \quad (1)$$

οπότε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[-A_m \sin \frac{2\pi}{T} t \right]_{T/2}^{T/2+\theta/\omega} + A_m \sin \frac{2\pi}{T} t \left[\frac{T}{2} \right]_{T/2+\theta/\omega}^{T/2+\theta/\omega} \quad (2)$$

ή

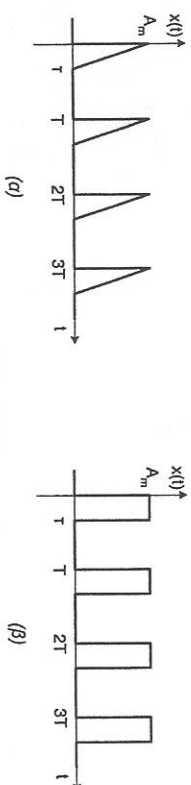
$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \frac{1}{2\pi} [-A_m (\sin \pi - \sin \theta) + A_m (\sin 2\pi - \sin(\pi + \theta))] = \\ &= \frac{1}{\pi} [A_m (1 + \sin \theta) + A_m (1 + \sin \theta)] = \frac{A_m}{\pi} (1 + \sin \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

Η ενεργός τιμή του σήματος προκύπτει

$$x_{rms} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2} \eta \mu 2\theta} \quad (4)$$

Ιδια με την ενεργό τιμή του σήματος του Σχ.4.5-3(β) (γιατί;). Η μέση και η ενεργός τιμή του σήματος του Σχ.4.5-3(β) συναρτήσει της γωνίας θ παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5-3(γ).

Πρόβλημα 4.5-4 Τα σήματα του Σχ.4.5-4 είναι δύο σειρές παλμών (πυλμοσειρές). Να βρεθεί η μέση και η ενεργός τιμή τους και να παρασχεθούν γραφικά συναρτήσεις της σχετικής τους διάρκειας των παλμών τ/T .

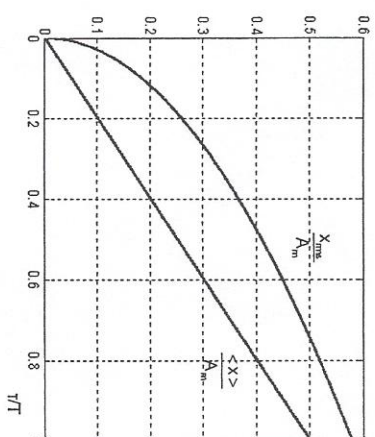


Σχήμα 4.5-4

ΛΥΣΗ

(α) Η περιγραφή του σήματος στο διάστημα μιας περιόδου είναι

$$x(t) = \begin{cases} A_m (1 - \frac{t}{\tau}) & 0 < t < \tau \\ 0 & \tau < t < T \end{cases} \quad (1)$$



Σχήμα 4.5-4(γ)

Η μέση τιμή του σήματος του Σχ.4.5-4(α) προκύπτει

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2} A_m \frac{T}{T} \quad (1)$$

Η ενεργός τιμή του σήματος προκύπτει

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^T A_m^2 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt + \int_T^{2T} 0 dt \right] = \frac{1}{3} A_m^2 \frac{T}{T} \quad (3)$$

ή

$$x_{rms} = \frac{A_m}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{T}{T}} \quad (4)$$

Η μέση και η ενεργός τιμή του σήματος του Σχ.4.5-4(α) συναρτήσει της σχετικής διάρκειας του παλμού τ/T παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5-4(γ).

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για το σήμα του Σχ.4.5-4(β) έχουμε

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{A_m}{T} \left[\int_0^T dt + \int_{\tau}^T 0 dt \right] = A_m \frac{T}{T} \quad (5)$$

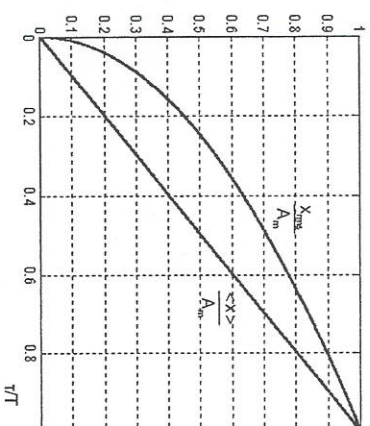
Η ενεργός τιμή του σήματος προκύπτει

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{A_m^2}{T} \left[\int_0^{\tau} dt + \int_{\tau}^T 0 dt \right] = A_m^2 \frac{\tau}{T} \quad (6)$$

ή

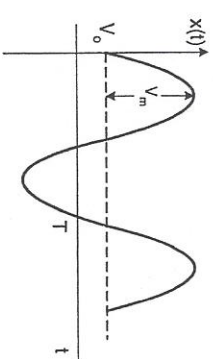
$$x_{rms} = A_m \sqrt{\frac{\tau}{T}} \quad (7)$$

Η μέση και η ενεργός τιμή του σήματος του Σχ.4.5-4(β) συναρτήσει της σχετικής διάρκειας του παλμού τ/T παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5-4(δ).



Σχήμα 4.5-4(δ)

Πρόβλημα 4.5-5 Να βρεθεί η μέση και η ενεργός τιμή του σήματος του Σχ.4.5-5. Το σήμα είναι η επιλληλία ενός χρονικά αμετάβλητου σήματος V_o και του ημιτονοειδούς σήματος $V_m \sin \omega t$. Για την εύρεση της ενεργού τιμής να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση ορισμού της ενεργού τιμής (4.2-9) και η Εξ.(4.2-10).



Σχήμα 4.5-5

ΛΥΣΗ

Η αναλυτική περιγραφή του σήματος του Σχ.4.5-5 είναι

$$x(t) = V_o + V_m \sin \omega t \quad (1)$$

Σύμφωνα με την Εξ.(4.2-10) η ενεργός τιμή του σήματος είναι

$$x_{rms} = \sqrt{V_o^2 + \frac{1}{2} V_m^2} \quad (2)$$

Σύμφωνα με την Εξ. (4.2-9) η ενεργός τιμή του σήματος προκύπτει από την εξίσωση

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 + V_m \eta \mu \omega t)^2 dt \quad (3)$$

οπότε

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (V_0 + V_m \eta \mu \omega t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^T V_0 \eta \mu \omega t dt + \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \eta^2 \omega^2 t^2 dt \quad (4)$$

Τέλος,

$$x_{rms}^2 = V_0^2 + \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) dt = V_0^2 + \frac{1}{2} V_m^2 \quad (5)$$

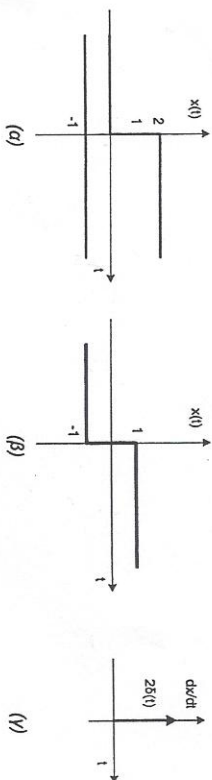
οπότε

$$x_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2} V_m^2} \quad (6)$$

Πρόβλημα 4.5-6 Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις και οι πρώτες παράγωγοί τους ως προς τον χρόνο: (α) $2u(t-1)$, (β) $tu(t-1)$ και (γ) $e^{-2t}u(t)$.

ΛΥΣΗ

(α) Οι όροι της συνάρτησης, η επιλληλότητα τους και η πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο παρουσιάζονται στα Σχ. 4.5-6(α), (β) και (γ) αντίστοιχα.

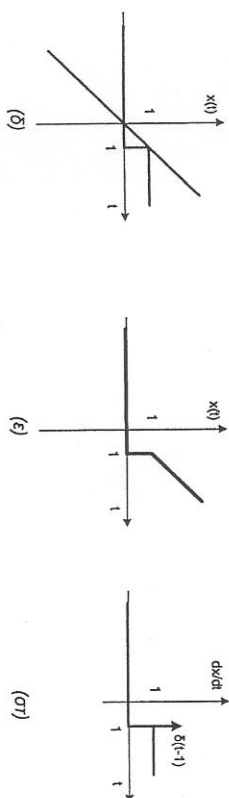


Σχήμα 4.5-6

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης προκύπτει

$$\frac{d}{dt}(2u(t-1)) = 2 \frac{du(t)}{dt} = 2\delta(t)$$

(β) Οι όροι της συνάρτησης, η συνάρτηση και η πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο παρουσιάζονται στα Σχ. 4.5-6(β), (ε) και (στ) αντίστοιχα.

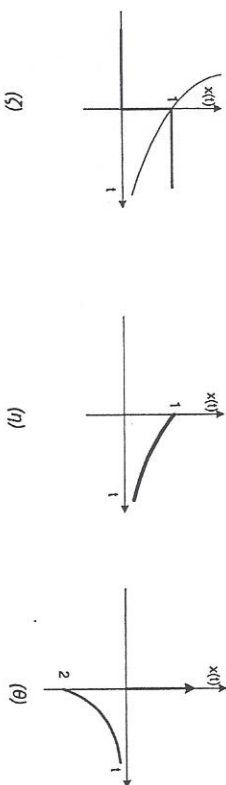


Σχήμα 4.5-6

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης προκύπτει

$$\frac{d}{dt}tu(t-1) = t \frac{du(t-1)}{dt} + u(t-1) = t\delta(t-1) + u(t-1) = \delta(t-1) + u(t-1)$$

(γ) Οι όροι της συνάρτησης, η συνάρτηση και η πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο παρουσιάζονται στα Σχ. 4.5-6(ζ), (η) και (θ) αντίστοιχα.



Σχήμα 4.5-6

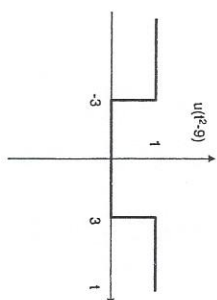
Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης προκύπτει

$$\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t) = e^{-2t} \frac{du(t)}{dt} - 2u(t)e^{-2t} = e^{-2t}\delta(t) - 2u(t)e^{-2t} = \delta(t) - 2u(t)e^{-2t}$$

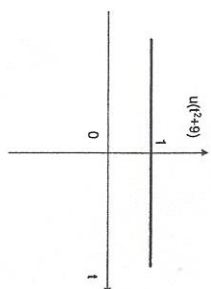
Πρόβλημα 4.5-7 Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις και οι πρώτες παράγωγοί τους ως προς τον χρόνο: (α) $u(t^2-9)$, (β) $u(t^2+9)$ και (γ) $u(t^2-5t+6)$.

ΛΥΣΗ

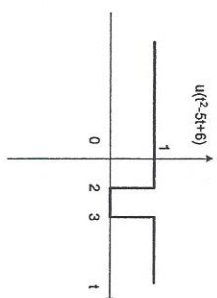
Οι συναρτήσεις η πρώτη παράγωγός τους ως προς τον χρόνο παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5-7.



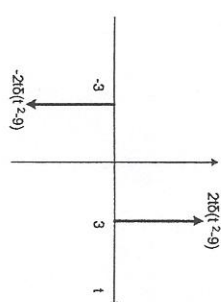
(α)



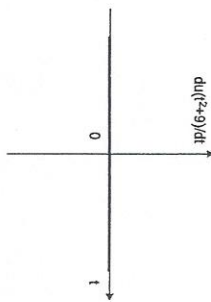
(γ)



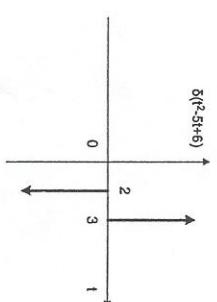
(ε)



(β)



(δ)



(σ)

Σχήμα 4.5-7

(α) Η αναλυτική μορφή του σήματος είναι

$$u(t^2 - 9) = u((t+3)(t-3)) = \begin{cases} 1 & t < -3 \\ 0 & -3 < t < 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

οπότε η παράγωγός του προκύπτει

$$\frac{d}{dt} u(t^2 - 9) = 2t\delta(t^2 - 9) = \begin{cases} -2t\delta(t+3) & t = -3 \\ 2t\delta(t-3) & t = 3 \end{cases}$$

(β) Η αναλυτική μορφή του σήματος είναι

$$u(t^2 + 9) = 1 \quad \forall t$$

οπότε η παράγωγός του προκύπτει

$$\frac{d}{dt} u(t^2 + 9) = 0 \quad \forall t$$

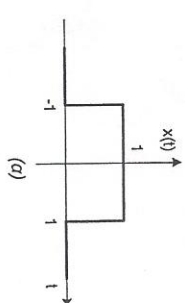
(γ) Η αναλυτική μορφή του σήματος είναι

$$u(t^2 - 5t + 6) = u((t-2)(t-3)) = \begin{cases} 1 & t < 2 \\ 0 & 2 < t < 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

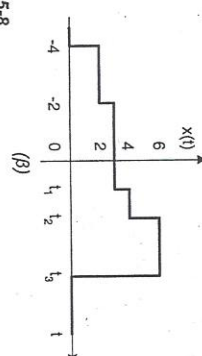
οπότε η παράγωγός του προκύπτει

$$\frac{d}{dt} u(t^2 - 5t + 6) = \delta((t-2)(t-3)) = \begin{cases} -\delta(t-2) & t = -2 \\ \delta(t-3) & t = 3 \end{cases}$$

Πρόβλημα 4.5-8 Εκφράστε τα σήματα του Σχ.4.5-8 με τη βοήθεια σημάτων δοκιμής και σχεδιάστε τις πρώτες παραγώγους τους ως προς τον χρόνο.



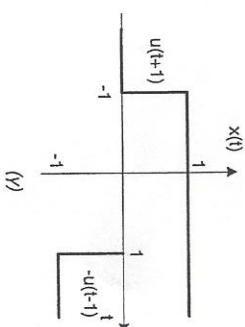
(α)



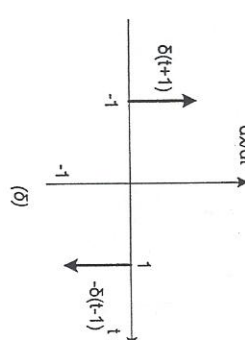
(β)

Σχήμα 4.5-8

ΛΥΣΗ



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.5-8

(α) Το σήμα του Σχ.4.5-8(α) είναι η επαλληλία δύο καθυστερημένων μοναδιαίων συναρτήσεων βήματος, όπως φαίνεται στο Σχ.4.5-8(γ). Η αναλυτική έκφραση του σήματος είναι

$$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

οπότε η παράγωγός του προκύπτει

$$\frac{dx}{dt} = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

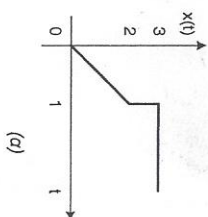
Η παράγωγος του σήματος παρουσιάζεται στο ΣΧ.4.5-8(δ).

(β) Το σήμα του ΣΧ.4.5-8(β) είναι η επαλληλία καθυστερημένων μοναδιαίων συναρτήσεων βήματος και η αναλυτική του έκφραση είναι

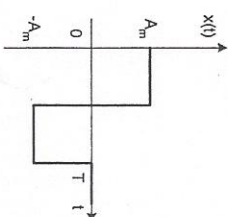
$$x(t) = 2u(t+4) + u(t+2) + u(t-t_1) + 2u(t-t_2) - 6u(t-t_3)$$

Η παράγωγος του σήματος είναι

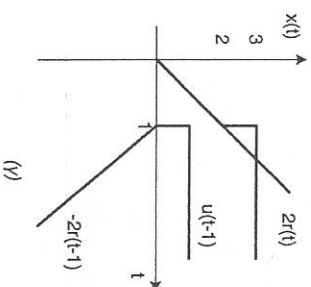
$$\frac{dx}{dt} = 2\delta(t+4) + \delta(t+2) + \delta(t-t_1) + 2\delta(t-t_2) - 6\delta(t-t_3)$$



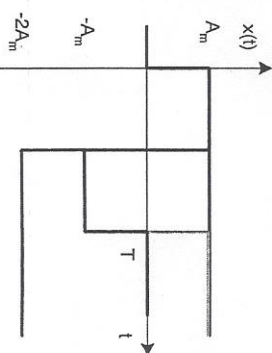
Σχήμα 4.5-9



ΛΥΣΗ



Σχήμα 4.5-9



(α) Το σήμα του ΣΧ.4.5-9(α) είναι η επαλληλία των μοναδιαίων κλίσεων και της μοναδιαίας συνάρτησης βήματος, όπως παρουσιάζονται στο ΣΧ.4.5-9(γ). Η αναλυτική έκφραση του σήματος είναι

$$x(t) = 2t \cdot (t-1) + u(t-1)$$

οπότε η παράγωγος προκύπτει

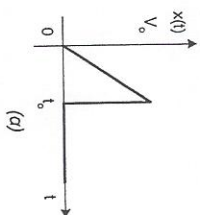
$$\frac{dx}{dt} = 2u(t-1) - 2u(t-1) + \delta(t-1)$$

(β) Το σήμα του ΣΧ.4.5-9(α) είναι η επαλληλία των μοναδιαίων συναρτήσεων βήματος, όπως παρουσιάζονται στο ΣΧ.4.5-9(δ). Η αναλυτική έκφραση του σήματος είναι

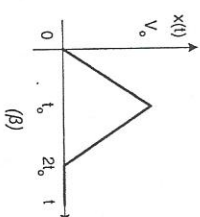
$$x(t) = A_m u(t) - 2A_m u(t-T/2) + A_m u(t-T)$$

και η παράγωγός του προκύπτει

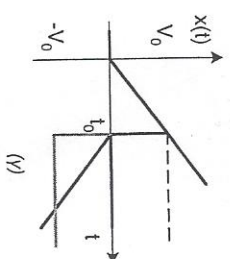
$$\frac{dx}{dt} = A_m \delta(t) - 2A_m \delta(t-T/2) + A_m \delta(t-T)$$



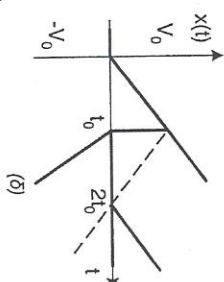
Σχήμα 4.5-10



ΛΥΣΗ



Σχήμα 4.5-10



(α) Το σήμα αναλύεται γραφικά στο ΣΧ.4.5-10(γ) και εκφράζεται από τη σχέση

και η παράγωγός του είναι

$$x(t) = \frac{V_0}{t_0} r(t) - \frac{V_0}{t_0} r(t-t_0) - V_0 u(t-t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{t_0} u(t) - \frac{V_0}{t_0} u(t-t_0) - V_0 \delta(t-t_0)$$

(β) Το σήμα αναλύεται γραφικά στο Σχ.4.5-10(δ) και εκφράζεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{V_0}{t_0} r(t) - 2 \frac{V_0}{t_0} r(t-t_0) + \frac{V_0}{t_0} r(t-2t_0)$$

και η παράγωγός του είναι

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{t_0} u(t) - 2 \frac{V_0}{t_0} u(t-t_0) + \frac{V_0}{t_0} u(t-2t_0)$$

Πρόβλημα 4.5-11 Υπολογίστε τις τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\int_{-a}^a \delta(t) \sin \omega t dt$$

$$\int_{-a}^a \delta(t) \eta \mu \omega t dt$$

$$\int_{-a}^a \delta(t) e^{-5t} dt$$

$$\int_{-a}^a \delta(t-5) e^{-5t} dt$$

$$\int_{-4}^4 (t^2+2)[\delta(t)+3\delta(t-2)] dt$$

$$\int_{-4}^4 t^2 [\delta(t)+\delta(t+2)+\delta(t+5)] dt$$

ΑΥΞΗ _____

$$\int_{-a}^a \delta(t) \sin \omega t dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \sin \omega t dt = \sin 0 = 1$$

$$\int_{-a}^a \delta(t) \eta \mu \omega t dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \eta \mu \omega t dt = \eta \mu 0 = 0$$

$$\int_{-a}^a \delta(t) e^{-5t} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-5t} dt = e^0 = 1$$

$$\int_{-a}^a \delta(t-5) e^{-5t} dt = e^{-25}, \text{ αν } a > 5$$

$$\int_{-4}^4 (t^2+2)[\delta(t)+3\delta(t-2)] dt = \int_{-4}^4 (t^2+2)\delta(t) dt + \int_{-4}^4 3(t^2+2)\delta(t-2) dt =$$

$$= (t^2+2) \Big|_{t=0} + 3(t^2+2) \Big|_{t=2} = 2 + 10 = 20$$

$$\int_{-4}^4 [t^2 \delta(t) + \delta(t+2) + \delta(t+5)] dt = \int_{-4}^4 t^2 \delta(t) dt + \int_{-4}^4 t^2 \delta(t+2) dt + \int_{-4}^4 t^2 \delta(t+5) dt =$$

$$= 0^2 + 2^2 + 0 = 4 = 0^2 + 2^2 + 0 = 4$$

Πρόβλημα 4.5-12 Υπολογίστε την τιμή του σήματος

$$x(t) = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

ΑΥΞΗ _____

Το σήμα γράφεται με τη μορφή

$$x(t) = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) = t^2 \delta(t) + t^2 \delta(t-T) + t^2 \delta(t-2T) + \dots + t^2 \delta(t-nT)$$

ή ισοδύναμα

$$x(t) = T^2 \delta(t) + T^2 \delta(t-T) + 4T^2 \delta(t-2T) + \dots + n^2 T^2 \delta(t-nT) = T^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \delta(t-nT)$$

Πρόβλημα 4.5-13 Το ρεύμα ενός πυκνωτή με χωρητικότητα $C=1\text{F}$ είναι $i(t)=5\delta(t-2)$. Να υπολογιστεί η τάση του πυκνωτή, αν η αρχική του τάση είναι $v_C(0)=2\text{V}$. Πόση είναι η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή;

ΑΥΞΗ _____

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_C(0) + 5 \int_0^t \delta(\tau-2) d\tau = v_C(0) + 5u(t-2) = 2 + u(t-2) \text{ V}$$

οπότε η αποθηκευμένη ενέργεια προκύπτει

$$w(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \begin{cases} 2 \text{ J} & 0 < t < 2 \\ 24.5 \text{ J} & t > 2 \end{cases}$$