

## Θέμα 1. Αξιοποίηση λιγνοκυτταρινούχου βιομάζας σε αντιδραστήρα διαλείποντος έργου.

Από εργαστηριακές δοκιμές αξιοποίησης λιγνοκυτταρινούχου βιομάζας σε αντιδραστήρα διαλείποντος έργου (batch reactor) στους 180 °C με καταλύτη θειικό οξύ προέκυψε η σταθερά ταχύτητας υδρόλυσης  $k=0,04 \text{ min}^{-1}$  και η αρχική συγκέντρωση πρώτης ύλης  $C_{10}=0,75 \text{ tn/m}^3$ . Να υπολογίσετε

(α) τον βέλτιστο χρόνο αντίδρασης  $t_{optimum}$  (σε min με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων) ώστε το συνολικό κόστος  $K$  να είναι ελάχιστο.

(β) το ελάχιστο συνολικό κόστος  $K_{minimum}$  (σε ευρώ/tn με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων).

Δίνεται ότι:

$$\text{Συγκέντρωση πρώτης ύλης } C_1 = C_{10}e^{-kt},$$

$$\text{Συγκέντρωση προϊόντος } C_2 = C_{10} - C_1 \text{ και}$$

$$\text{Συνολικό κόστος } K = \frac{50}{C_2} + 4t + 45.$$

Υπενθυμίζεται ότι:

$$\text{Αν } y = x \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\text{αν } y = e^{ax} \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

$$\text{αν } y = [f(x)]^a \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = a[f(x)]^{a-1} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

και

$$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

(6 μονάδες).

**Οι φοιτητές του τρέχοντος έτους επιλύουν υποχρεωτικά μόνο το πρώτο θέμα (στην τελική βαθμολογία θα προστεθεί ο βαθμός Εργαστηρίου με βαρύτητα 40%).**

**Οι φοιτητές των παλαιότερων ετών επιλύουν υποχρεωτικά και τα δυο θέματα (βαθμός Εργαστηρίου προηγούμενου έτους δεν λαμβάνεται υπόψη).**

## Θέμα 2. Σύγκριση εγκατάστασης δυο CFSTR συνδεόμενων στη σειρά με εγκατάσταση δυο CFSTR συνδεόμενων παράλληλα.

Τα υγρά απόβλητα βιομηχανίας, με BOD  $S_0=330$  mg/L και παροχή  $Q=11$  m<sup>3</sup>/h μπορούν να επεξεργαστούν είτε σε δυο συνδεόμενες στη σειρά δεξαμενές CFSTR του ίδιου τύπου και όγκου υγρής φάσης  $V=2490$  m<sup>3</sup> η κάθε μια, με απόδοση συστήματος  $E_1$ , είτε σε δυο συνδεόμενες παράλληλα δεξαμενές CFSTR του ίδιου τύπου και όγκου υγρής φάσης  $V=2490$  m<sup>3</sup> η κάθε μια, με απόδοση συστήματος  $E_2$ . Να προσδιορίσετε

(α) το BOD εξόδου (σε mg/L με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων) σε κάθε ένα σύστημα.

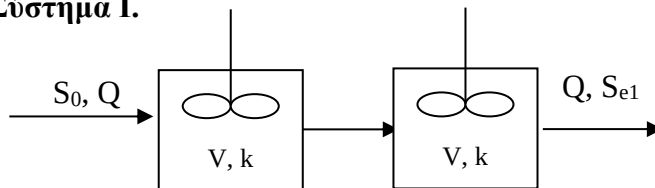
(β) την απόδοση (%) με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων) κάθε ενός συστήματος.

(γ) Τι παρατηρείτε;

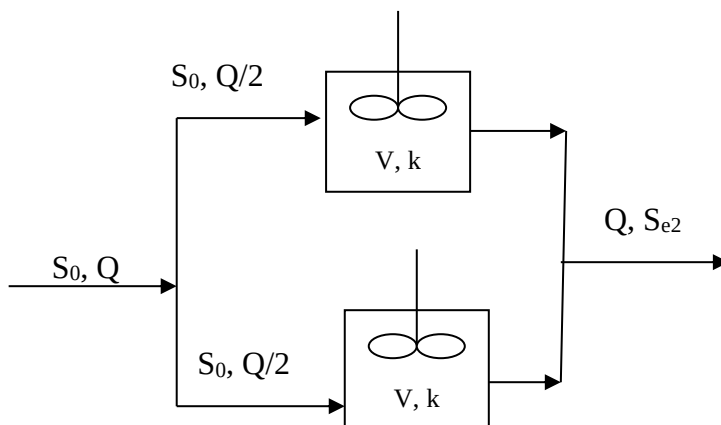
Δίνεται ότι ακολουθείται κινητική πρώτης τάξεως, με σταθερά ταχύτητας  $k=0,01$  h<sup>-1</sup> για κάθε CFSTR, σε συνθήκες σταθεροποιημένης κατάστασης (steady state conditions).

Υπενθυμίζεται ότι για ένα αντιδραστήρα CFSTR με όγκο υγρών αποβλήτων  $V$ , BOD εισροής  $S_0$ , BOD εκροής  $S$  και παροχή  $Q$ , ισχύει ότι  $S = \frac{S_0}{1+kt}$ , όπου  $t = \frac{V}{Q}$ .

### Σύστημα Ι.



### Σύστημα ΙΙ.



(4 μονάδες).

**Καλή επιτυχία!**

## Θέμα 1 - Λύση

Λύση (Βλέπε άσκηση 11 στο Βιβλίο του μαθήματος)

$$K = \frac{50}{C_2} + 4t + 45 \quad (1)$$

$$C_1 = C_{10}e^{-kt} \rightarrow C_1 = 0,75e^{-0,04t}$$

$$C_2 = C_{10} - C_1 \rightarrow C_2 = 0,75 - 0,75e^{-0,04t} \rightarrow C_2 = 0,75(1 - e^{-0,04t})$$

$$(1) \rightarrow K = \frac{50}{0,75(1 - e^{-0,04t})} + 4t + 45 \quad (2)$$

$$K = \frac{50}{0,75}(1 - e^{-0,04t})^{-1} + 4t + 45 \rightarrow$$

$$K = 66,67(1 - e^{-0,04t})^{-1} + 4t + 45 \quad (2\alpha)$$

Παραγωγίζω:

$$\frac{dK}{dt} = -66,67(1 - e^{-0,04t})^{-1-1}[0 - (-0,04)e^{-0,04t}] + 4 + 0 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -66,67 \cdot (0,04)(1 - e^{-0,04t})^{-2}[e^{-0,04t}] + 4 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -2,667(1 - e^{-0,04t})^{-2}[e^{-0,04t}] + 4 \quad (3)$$

Θέτω την παράγωγο ίση με μηδέν:

$$\frac{dK}{dt} = 0$$

$$(3) \rightarrow -2,667(1 - e^{-0,04t})^{-2}[e^{-0,04t}] + 4 = 0 \quad (4)$$

Θέτω  $z = \exp(-0,04t)$

$$(4) \rightarrow -2,667(1 - z)^{-2}z + 4 = 0 \rightarrow \quad (5)$$

$$[-2,667(1 - z)^{-2}z + 4](1 - z)^2 = 0 * (1 - z)^2 \rightarrow$$

$$-2,667z + 4(1 - z)^2 = 0 \rightarrow$$

$$-2,667z + 4(1 - 2z + z^2) = 0 \rightarrow$$

$$-2,667z + 4 - 8z + 4z^2 = 0 \rightarrow$$

$$4z^2 - (2,667 + 8)z + 4 = 0 \rightarrow$$

$$4z^2 - 10,667z + 4 = 0 \rightarrow$$

$$z^2 - \left(\frac{10,667}{4}\right)z + 1 = 0 \rightarrow$$

$$z^2 - 2,667z + 1 = 0 \quad (6)$$

$$\Delta = (-2,667)^2 - 4 * 1 * 1 = 3,111$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3,111} = 1,764$$

$$z = \frac{-(-2,667) + 1,764}{2 * 1} = 2,215$$

$$z = \frac{-(-2,667) - 1,764}{2 * 1} = 0,4514$$

$$(5) \rightarrow t = \frac{\ln z}{-0,04} \quad (7)$$

$$t = \frac{\ln 2,215}{-0,04} = -19,88 \text{ min} < 0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$t = \frac{\ln 0,4514}{-0,04} = 19,88 > 0 \text{ δεκτή, δηλαδή } t_{\text{optimum}} = 19,88 \text{ min}$$

$$(2\alpha) \rightarrow K = 66,67(1 - e^{-0,04 * 19,88})^{-1} + 4 * 19,88 + 45 \rightarrow$$

$$K = 246,06 \text{ €}$$

*Βιομηχανικές Διεργασίες Ι*  
6/6/2024

Υπολογίζω την δεύτερη παράγωγο του  $K$  παραγωγίζοντας την συνάρτηση της εξίσωσης (3), δηλ. την πρώτη παράγωγο του  $K$ . Για να έχουμε ελάχιστο  $K$  θα πρέπει η δεύτερη παράγωγος να είναι θετική:

$$\frac{d^2K}{dt^2} > 0$$

$$\frac{d^2K}{dt^2} = (-2,667)\{(-2)(1 - e^{-0,04t})^{-3} * [ -(-0,04)]e^{-0,04t} * e^{-0,04t} + (1 - e^{-0,04t})^{-2}(-0,04)e^{-0,04t}\}$$

$$\frac{d^2K}{dt^2} = (-2,667)\{2 * (-0,04)(1 - e^{-0,04t})^{-3} * [e^{-0,04t}]^2 - 0,04(1 - e^{-0,04t})^{-2}e^{-0,04t}\}$$

$$\frac{d^2K}{dt^2} = 2,667 * (0,04) * \{2 * (1 - e^{-0,04t})^{-3} * [e^{-0,04t}]^2 + (1 - e^{-0,04t})^{-2}e^{-0,04t}\}$$

Θέτω  $t=t_{optimum}=19,88$  min οπότε  $z=\exp(-0,04t)=\exp(-0,04*19,88)=0,4514$

$$\frac{d^2K}{dt^2} = 0,1067\{2(1 - 0,4514)^{-3} * [0,4514]^2 + (1 - 0,4514)^{-2}0,4514\} \rightarrow$$

$$\frac{d^2K}{dt^2} = 0,423 > 0$$

άρα  $K_{minimum} = K = 246,06 \text{ €}$

Αν ζητηθεί:

$$\text{απόδοση} = \frac{C_2}{C_{10}} = \frac{C_{10}-C_{10}e^{-kt}}{C_{10}} = 1-\exp(-kt) \rightarrow$$

$$\text{απόδοση} = 1-\exp(-0,04*19,88)=0,5486=54,86\%$$

### *Ενδεικτική λύση σε Excel*

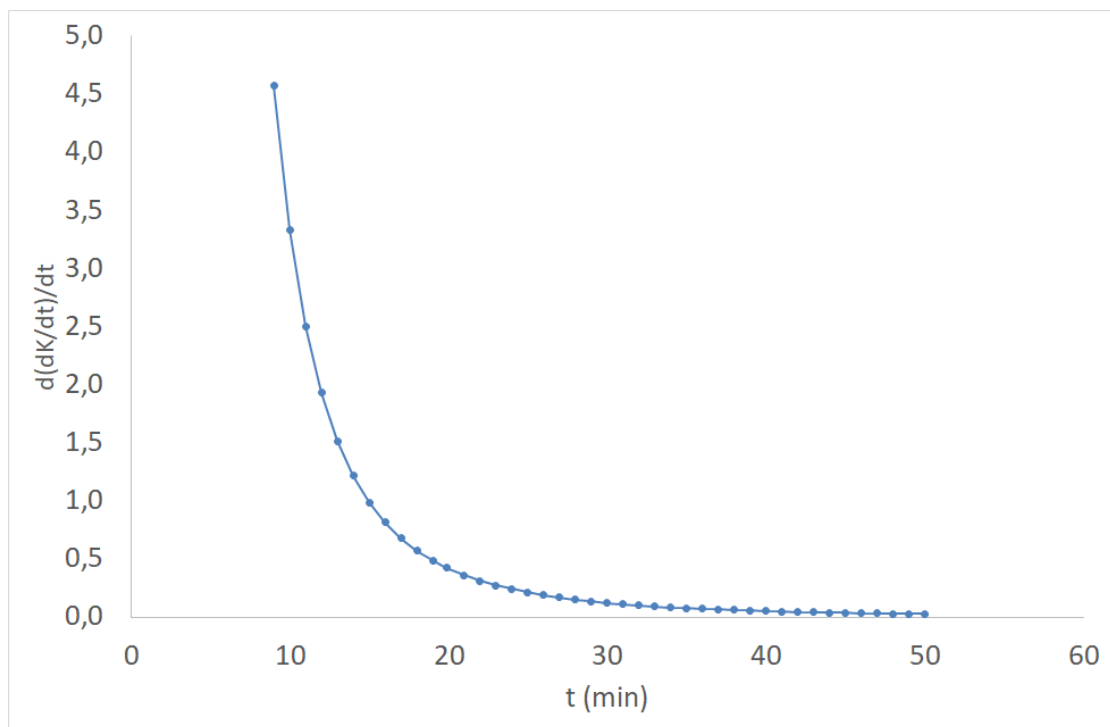
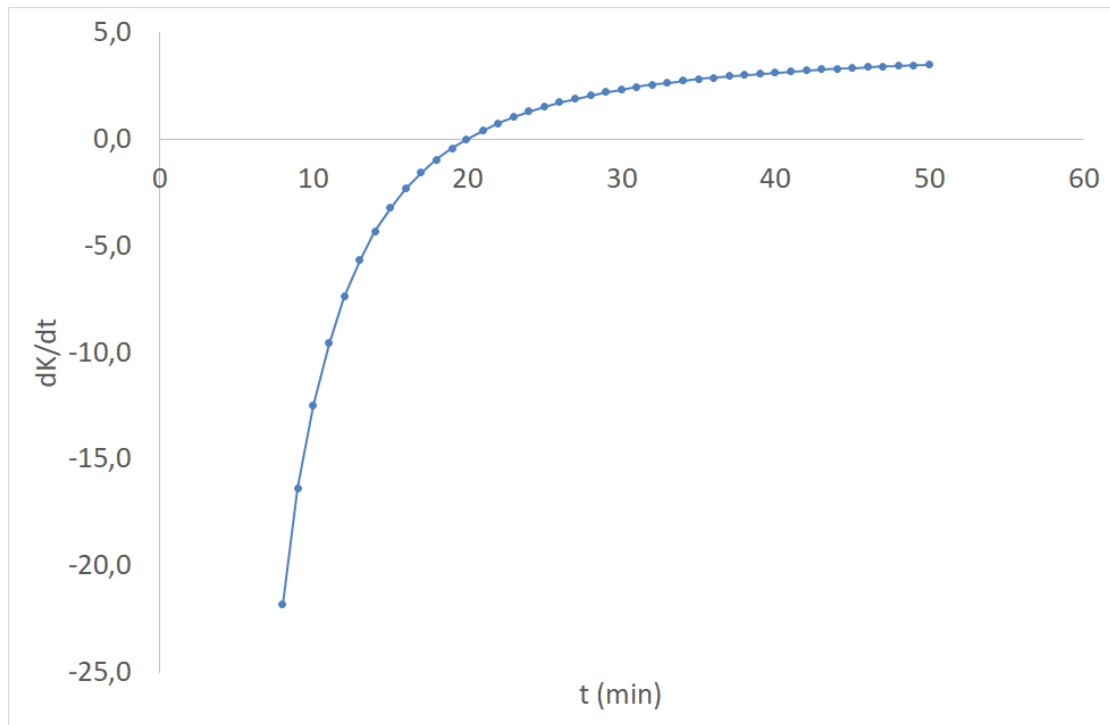
| t (min) | C <sub>1</sub> θεωρ | C <sub>2</sub> θεωρ | K <sub>2</sub><br>(euros/tn) | K <sub>1</sub> (euros/tn) | K<br>(euros/tn) | αποδοση% | dK/dt      | d(dK/dt)/dt |
|---------|---------------------|---------------------|------------------------------|---------------------------|-----------------|----------|------------|-------------|
| 0       | 0,750               | 0,000               |                              |                           |                 | 0,0%     |            |             |
| 1       | 0,721               | 0,029               |                              |                           |                 | 3,9%     |            |             |
| 2       | 0,692               | 0,058               |                              |                           |                 | 7,7%     |            |             |
| 3       | 0,665               | 0,085               |                              |                           |                 | 11,3%    |            |             |
| 4       | 0,639               | 0,111               |                              |                           |                 | 14,8%    |            |             |
| 5       | 0,614               | 0,136               |                              |                           |                 | 18,1%    |            |             |
| 6       | 0,590               | 0,160               |                              |                           |                 | 21,3%    |            |             |
| 7       | 0,567               | 0,183               | 272,982                      | 73,000                    | 345,98          | 24,4%    |            |             |
| 8       | 0,545               | 0,205               | 243,441                      | 77,000                    | 320,44          | 27,4%    | -<br>21,82 |             |
| 9       | 0,523               | 0,227               | 220,514                      | 81,000                    | 301,51          | 30,2%    | -<br>16,36 | 4,572       |
| 10      | 0,503               | 0,247               | 202,216                      | 85,000                    | 287,22          | 33,0%    | -<br>12,45 | 3,333       |
| 11      | 0,483               | 0,267               | 187,285                      | 89,000                    | 276,29          | 35,6%    | -9,55      | 2,504       |
| 12      | 0,464               | 0,286               | 174,879                      | 93,000                    | 267,88          | 38,1%    | -7,35      | 1,929       |
| 13      | 0,446               | 0,304               | 164,414                      | 97,000                    | 261,41          | 40,5%    | -5,64      | 1,517       |
| 14      | 0,428               | 0,322               | 155,476                      | 101,000                   | 256,48          | 42,9%    | -4,28      | 1,214       |
| 15      | 0,412               | 0,338               | 147,758                      | 105,000                   | 252,76          | 45,1%    | -3,19      | 0,987       |
| 16      | 0,395               | 0,355               | 141,032                      | 109,000                   | 250,03          | 47,3%    | -2,29      | 0,813       |
| 17      | 0,380               | 0,370               | 135,122                      | 113,000                   | 248,12          | 49,3%    | -1,55      | 0,678       |

*Βιομηχανικές Λειτουργίες Ι*  
6/6/2024

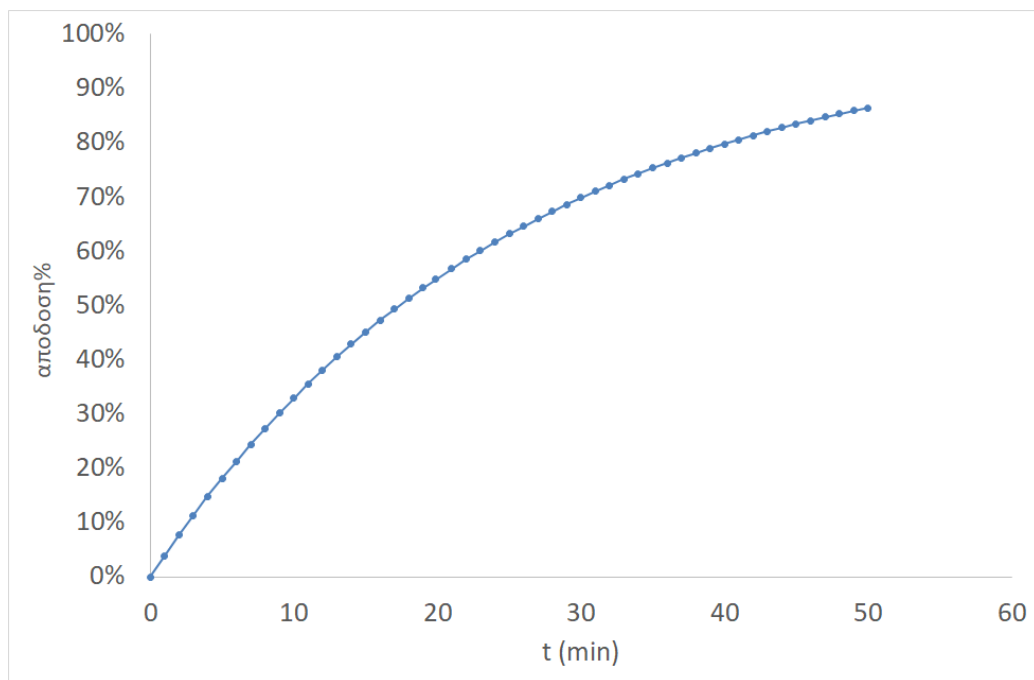
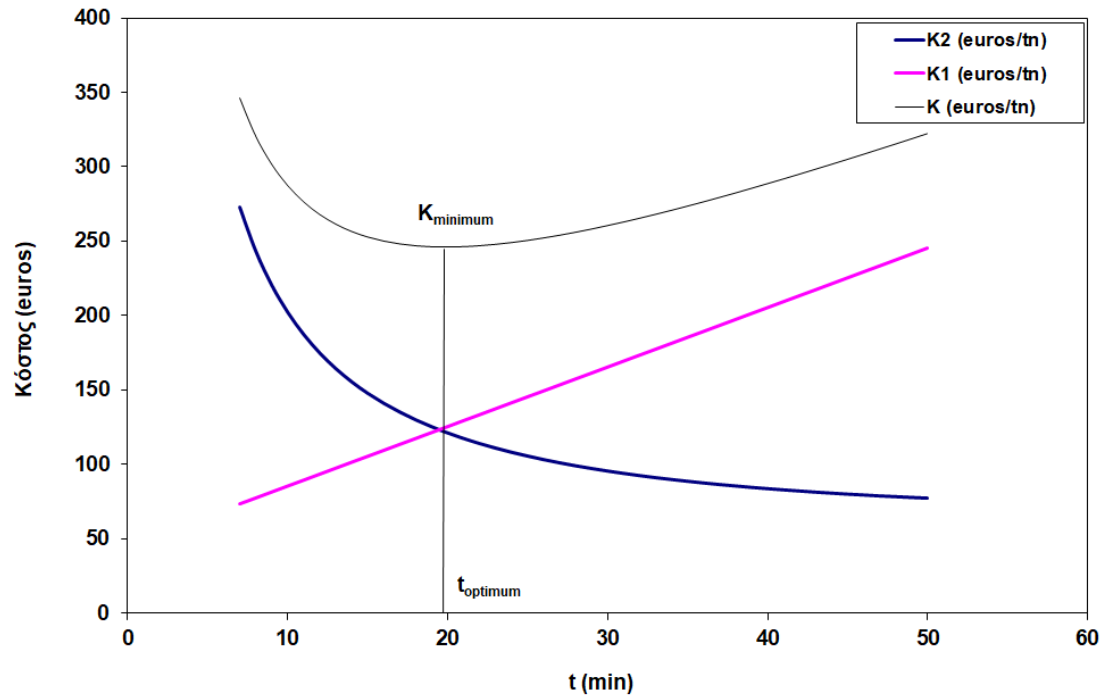
|              |              |              |                |                |               |              |             |              |
|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|---------------|--------------|-------------|--------------|
| 18           | 0,365        | 0,385        | 129,892        | 117,000        | 246,89        | 51,3%        | -0,93       | 0,571        |
| 19           | 0,351        | 0,399        | 125,235        | 121,000        | 246,23        | 53,2%        | -0,40       | 0,485        |
| <b>19,88</b> | <b>0,339</b> | <b>0,411</b> | <b>121,525</b> | <b>124,537</b> | <b>246,06</b> | <b>54,9%</b> | <b>0,00</b> | <b>0,423</b> |
| 21           | 0,324        | 0,426        | 117,311        | 129,000        | 246,31        | 56,8%        | 0,44        | 0,359        |
| 22           | 0,311        | 0,439        | 113,918        | 133,000        | 246,92        | 58,5%        | 0,77        | 0,312        |
| 23           | 0,299        | 0,451        | 110,838        | 137,000        | 247,84        | 60,1%        | 1,06        | 0,273        |
| 24           | 0,287        | 0,463        | 108,031        | 141,000        | 249,03        | 61,71%       | 1,32        | 0,240        |
| 25           | 0,276        | 0,474        | 105,465        | 145,000        | 250,47        | 63,2%        | 1,54        | 0,213        |
| 26           | 0,265        | 0,485        | 103,112        | 149,000        | 252,11        | 64,7%        | 1,75        | 0,189        |
| 27           | 0,255        | 0,495        | 100,948        | 153,000        | 253,95        | 66,0%        | 1,92        | 0,168        |
| 28           | 0,245        | 0,505        | 98,953         | 157,000        | 255,95        | 67,4%        | 2,08        | 0,151        |
| 29           | 0,235        | 0,515        | 97,109         | 161,000        | 258,11        | 68,7%        | 2,23        | 0,136        |
| 30           | 0,226        | 0,524        | 95,401         | 165,000        | 260,40        | 69,9%        | 2,36        | 0,123        |
| 31           | 0,217        | 0,533        | 93,815         | 169,000        | 262,82        | 71,1%        | 2,47        | 0,111        |
| 32           | 0,209        | 0,541        | 92,341         | 173,000        | 265,34        | 72,2%        | 2,58        | 0,101        |
| 33           | 0,200        | 0,550        | 90,967         | 177,000        | 267,97        | 73,3%        | 2,67        | 0,092        |
| 34           | 0,192        | 0,558        | 89,685         | 181,000        | 270,69        | 74,3%        | 2,76        | 0,084        |
| 35           | 0,185        | 0,565        | 88,487         | 185,000        | 273,49        | 75,3%        | 2,84        | 0,077        |
| 36           | 0,178        | 0,572        | 87,366         | 189,000        | 276,37        | 76,3%        | 2,91        | 0,070        |
| 37           | 0,171        | 0,579        | 86,315         | 193,000        | 279,32        | 77,2%        | 2,98        | 0,065        |
| 38           | 0,164        | 0,586        | 85,329         | 197,000        | 282,33        | 78,1%        | 3,04        | 0,060        |
| 39           | 0,158        | 0,592        | 84,403         | 201,000        | 285,40        | 79,0%        | 3,10        | 0,055        |
| 40           | 0,151        | 0,599        | 83,531         | 205,000        | 288,53        | 79,8%        | 3,15        | 0,051        |
| 41           | 0,145        | 0,605        | 82,711         | 209,000        | 291,71        | 80,6%        | 3,20        | 0,047        |
| 42           | 0,140        | 0,610        | 81,938         | 213,000        | 294,94        | 81,4%        | 3,25        | 0,044        |
| 43           | 0,134        | 0,616        | 81,208         | 217,000        | 298,21        | 82,1%        | 3,29        | 0,041        |
| 44           | 0,129        | 0,621        | 80,520         | 221,000        | 301,52        | 82,8%        | 3,33        | 0,038        |
| 45           | 0,124        | 0,626        | 79,869         | 225,000        | 304,87        | 83,5%        | 3,37        | 0,035        |
| 46           | 0,119        | 0,631        | 79,254         | 229,000        | 308,25        | 84,1%        | 3,40        | 0,033        |
| 47           | 0,114        | 0,636        | 78,671         | 233,000        | 311,67        | 84,7%        | 3,43        | 0,031        |
| 48           | 0,110        | 0,640        | 78,120         | 237,000        | 315,12        | 85,3%        | 3,46        | 0,029        |
| 49           | 0,106        | 0,644        | 77,597         | 241,000        | 318,60        | 85,9%        | 3,49        | 0,027        |
| 50           | 0,102        | 0,648        | 77,101         | 245,000        | 322,10        | 86,5%        | 3,52        | 0,025        |

|                                |              |
|--------------------------------|--------------|
| <b>k</b>                       | <b>0,04</b>  |
| <b>C<sub>10,θεωρ</sub></b>     | <b>0,75</b>  |
| <b>a/C<sub>10,θεωρ</sub></b>   | 66,67        |
| <b>a*k/C<sub>10,θεωρ</sub></b> | 2,667        |
| <b>a</b>                       | <b>50</b>    |
| <b>b</b>                       | <b>45</b>    |
| <b>c</b>                       | <b>4</b>     |
|                                | 10,667       |
| <b>b</b>                       | <b>2,667</b> |

|                                    |               |
|------------------------------------|---------------|
| <b>D</b>                           | <b>3,111</b>  |
| <b>D<sup>0.5</sup></b>             | 1,764         |
| <b>z1</b>                          | <b>2,215</b>  |
| <b>z2</b>                          | <b>0,4514</b> |
| <b>t1</b>                          | <b>-19,88</b> |
| <b>t2</b>                          | <b>19,88</b>  |
|                                    | 10,667        |
|                                    | 2,667         |
| <b>(a*k/C<sub>10,θεωρ</sub>)*k</b> | 0,1067        |



Βιομηχανικές Διεργασίες Ι  
6/6/2024



## Θέμα 2 Λύση

Λύση (Βλέπε άσκηση 2 στο Βιβλίο του μαθήματος)

**Σύστημα Ι.**

$$t_1 = t_2 = \frac{V}{Q} = \frac{2490}{11} = 226,36 \text{ h}$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{1}{1+kt_1} \quad (1)$$

$$\frac{S_{e1}}{S_1} = \frac{1}{1+kt_2} \rightarrow \frac{S_{e1}}{S_1} = \frac{1}{1+kt_1} \quad (2)$$

Από τους τύπους (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{S_{e1}}{S_0} = \frac{1}{(1+kt_1)^2} \rightarrow \quad (3)$$

$$S_{e1} = \frac{S_0}{(1+kt_1)^2} \quad (3a)$$

$$S_{e1} = \frac{330}{(1 + 0,01 * 226,36)^2} = 30,98 \text{ mg/L}$$

$$E_1 = \frac{S_0 - S_{e1}}{S_0} \quad \text{ή} \quad E_1 = 1 - \frac{S_{e1}}{S_0} \quad (4)$$

$$E_1 = 1 - \frac{30,98}{330} = 0,9061 \quad \text{ή} \quad 90,61\%$$

**Σύστημα ΙΙ.**

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$V_1 = V_2 = V$$

$$t_3 = t_4 = \frac{V}{\frac{Q}{2}} = \frac{2490}{5,5} = 452,73 \text{ h}$$

$$S_{e21} = \frac{\frac{S_0}{2}}{1 + kt_3} = \frac{330}{1 + 0,01 * 452,73} = 59,70 \text{ mg/L}$$

$$S_{e22} = \frac{S_0}{1 + kt_4}$$

$$S_{e21} = S_{e22}$$

Ισοζύγιο μάζας BOD στον κόμβο εξόδου Β:

$$Q_1 S_{e21} + Q_2 S_{e22} = Q S_{e2} \quad (5)$$

$$\frac{Q}{2} S_{e21} + \frac{Q}{2} S_{e22} = Q S_{e2} \rightarrow$$

$$\frac{Q}{2} S_{e21} + \frac{Q}{2} S_{e21} = Q S_{e2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (S_{e21} + S_{e21}) = S_{e2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (2 S_{e21}) = S_{e2} \rightarrow S_{e21} = S_{e2}$$

Άρα

$$S_{e21} = S_{e22} = S_{e2} = 59,70 \text{ mg/L}$$



$$E_2 = 1 - \frac{S_{e2}}{S_0}$$

$$E_2 = 1 - \frac{59,70}{330} = 0,8191 \text{ ή } 81,91\%$$

Παρατηρούμε ότι

$$E_1 = 90,61\% > 81,81\% = E_2$$

### Ενδεικτική λύση σε Excel

|                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| So                | 330 mg/L              |
| Q                 | 11 m <sup>3</sup> /h  |
| k                 | 0,01 h <sup>-1</sup>  |
| V                 | 2490 m <sup>3</sup>   |
|                   |                       |
| <b>Σύστημα Ι</b>  |                       |
| t <sub>1</sub>    | 226,36 h              |
| S <sub>e1</sub>   | 30,98 mg/L            |
| E <sub>1</sub>    | 90,61%                |
|                   |                       |
| <b>Σύστημα ΙΙ</b> |                       |
| Q/2               | 5,5 m <sup>3</sup> /h |
| t <sub>2</sub>    | 452,73 h              |
| S <sub>e2</sub>   | 59,70 mg/L            |
| E <sub>2</sub>    | 81,91%                |