Στατιστικοί ‘Ελεγχοι

Έλεγχος 1:	Ζ-Έλεγχος για τον μέσο μ ενός πληθυσμού
Έλεγχος 2:	t - Έλεγχος για τον μέσο μ ενός πληθυσμού
Έλεγχος 3:	x_l-τετράγωνο Έλεγχος για την διακύμανση
Έλεγχος 4:	t-Έλεγχος για την σύγκριση των μέσων δύο πληθυσμών
Έλεγχος 5:	Έλεγχος της ομοιογένειας δύο πληθυσμών με διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2

Έλεγχος 1

z- Έλεγχος ή Έλεγχος του Gauss

Παραδοχές: Θεωρούμε ότι ένα τυχαίο δείγμα $x_{1},\ldots x_n$
από ένα κανονικό πληθυσμό με μέσο μ
και διακύμανση σ^2, όπου σ^2 είναι γνωστό.

Στατιστικές Υποθέσεις: Προς Έλεγχο έχουμε τις ακόλουθες
υποθέσεις σε επίπεδο σημαντικότητας a με $o<a<1$

1) H: $\mu=\mu_0$ έναντι της A: $\mu \neq \mu_0$

2) H: $\mu=\mu_0$ έναντι της A: $\mu>\mu_0$

3) H: $\mu=\mu_0$ έναντι της A: $\mu<\mu_0$.

Κανόνες Απόφασεις:

1) Αποφασίζω για την A της περίπτωσης (1)

αν $|Z| = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{\sigma}\right| \geq z_{a/2}$, ;όπου $z_{a/2}$ είναι το

$1\text{-}\alpha/_2$ ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής

2) Αποφασίζω για την A της (2), αν

$Z=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{\sigma} \geq z_a$, όπου z_a είναι το

1-a ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής

3) Αποφασίζω για την Α της (3), αν

$$Z= \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{\sigma} \leq -z_a = z_{1-a},$$

Z_{1-a} είναι το a-ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής.

Παράδειγμα :

Θεωρούμε ένα κανονικό πληθυσμό με μέσο

μ=8 και σ=2. Αν 30 παρατηρήσεις δίνανε

$\bar{x}$ =7,4 αποδέχεστε την Η=μ=8;

Λύση:

1) Αν η εναλλακτική λύση είναι $A=\mu \neq 8$ τότε την αποδεχόμαστε αν

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{\sigma}\right| \geq z_{a/2} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} \leq \mu_o - z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ή \quad \bar{x} \geq \mu_o + z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\bar{x} \leq 7{,}27 \quad ή \quad \bar{x} \geq 8{,}71$$

δηλαδή $\bar{x}$ να παίρνει τιμές εκτός του [7,29 , 8,71]

Εδώ $\bar{x}$ =7,4 και αποφασίζω για Α

2) Αν Α: μ>8 τότε την αποδεχόμαστε αν $\bar{x}$ >8,59

Απορρίπτω την Α

3)Αν Α: μ<8 τότε την αποδεχόμαστε αν $\bar{x}$ < 7,41

Αποδέχομαι την Α

Έλεγχος 2

t-Έλεγχος

Παραδοχές: Θεωρούμε ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $x_{1,}\dots x_n$
από ένα κανονικό πληθυσμό με μέσο μ
και διακύμανση σ^2, όπου σ^2 είναι άγνωστο.

Στατιστικές Υποθέσεις:Όμοιες όπως στον Έλεγχο 1
Κανόνες Απόφασεις: (1) Αποφασίζω για την Α της περίπτωσης (1)

αν $|t| = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{S}\right| \geq t_{n-1};a/2$, ;όπου

$t_{n-1};a$ είναι το 1-a ποσοστιαίο σημείο της t-κατανομής
με n-1 βαθμούς ελευθερίας

(2)Αποφασίζω για την Α της (2)

αν $t=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{S} \geq t_{n-1};a$

(3) Αποφασίζω για την Α της (3)

αν $t=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu o)}{S} \leq -t_{n-1};a=t_{n-1};1-a$

Αν $n \to \infty$, τότε t~z

Διάστημα Εμπιστοσύνης

$$[\bar{x} - t_{n-1};a/_2 \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{n-1};a/_2 \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Έλεγχος 3

Χι-τετράγωνο έλεγχο για την διακύμανση

Παραδοχές: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα όπως στον Έλεγχο 2

Στατιστικές Υποθέσεις:Προς έλεγχο έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις σε επίπεδο σημαντικότητας a με 0<a<1

(1) Η: $\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι της Α: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

(2) Η: $\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι της Α: $\sigma^2 >\sigma_o^2$

(3) Η: $\sigma^2=\sigma_o^2$ έναντι της Α: $\sigma^2 <\sigma_o^2$

Κανόνες Απόφασεις

(1) Αποφασίζω για την Α της (1)

Αν $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq x_{n-1;1-a/2}$ ή $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq x_{n-1;a/2}$,

.

όπου $x_{n-1;1-a/2}$ και $x_{n-1;a/2}$ είναι τα a/2 και 1-a/2 ποσοστιαία σημεία της x_I –κατανομής με n-1 βαθμούς ελευθερίας

(2)Αποφασίζω για την A της (2)

αν

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq x_{n-1; a}$$

(3) Αποφασίζω για την A της (3)

αν

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq x_{n-1; 1-x}$$

Διάστημα Εμπιστοσύνης

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1;1-a}}, \frac{(n-1)S^2}{x^2_{n-1;a}}\right]$$

Έλεγχος 4

Α. t – Έλεγχος για την σύγκριση δύο ανεξαρτήτων δειγμάτων

Παραδοχές; Θεωρούμε ότι έχουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1,\ldots,X_{n1}$ και $Y_1,\ldots,Y_{n2}$ από δύο κανονικούς πληθυσμούς με μέσους μ_1,μ_2 και διακυμάνσεις (άγνωστες) σ_1^2 , σ_2^2 αντίστοιχα.Επιπλέον θεωρούμε ότι οι διακυμάνσεις των είναι ίσες.

Στατιστικές Υποθέσεις: Προς έλεγχο έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις σε ε.σ. a, 0<a<1.

(1)Η: $\mu_1=\mu_2$ Α: $\mu_1 \neq \mu_2$

(2)Η: $\mu_1=\mu_2$ Α: $\mu_1 > \mu_2$

(3)Η: $\mu_1=\mu_2$ Α: $\mu_1 < \mu_2$

Κανόνες απόφασεις

(1) Αποφασίζω για την Α της (1)

αν $$|t| = \left| \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\left[\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}}\right]\left[\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right]} \right| \geq t_{n1+n2-2};\ a/2,$$

όπου $t_{n1+n2-2}$; a/2 το 1-α/2 ποσοστιαίο σημείο της t με n_1+n_2-2 βαθμούς ελευθερίας.

Αυτός ο έλεγχος μπορεί να γίνει και όταν οι διακυμάνσεις είναι άνισες, στην περίπτωση αυτή ακολουθείται η ίδια περίπου διαδικασία μ' ένα ελαφρά τροποποιημένο τρίτο υπολογισμό της τιμής t.Το στατιστικό πακέτο SPSS κάμει αυτούς τους υπολογισμούς.

B. t-Έλεγχος για την σύγκριση δύο
εξαρτημένων δειγμάτων (περίπτωση ζευγών)

Παραδοχές:Έστω έχουμε n -ανεξάρτητα ζεύγη $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, όπου τα x περιγράφουν τις μετρήσεις από ένα πείραμα 1 και y τις μετρήσεις από ένα άλλο πείραμα 2. Οι μετρήσεις από το πείραμα 1 θεωρούμε ότι προέρχονται από έναν κανονικό πληθυσμό με μέσο μ_1 και διακύμανση σ^2, ενώ οι μετρήσεις από το δεύτερο πείραμα θεωρούμε ότι προέρχονται από ένα με διαφορετικό μόνο μέσο μ_2.

Στατιστικές υποθέσεις: Προς έλεγχο έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις σε ε.σ. a $0<a<1$.

(1) H: $\mu_1-\mu_2=0$ A: $\mu_1-\mu_2 \neq 0$

(2) H: $\mu_1-\mu_2=0$ A: $\mu_1-\mu_2 > 0$

(3) H: $\mu_1-\mu_2=0$ A: $\mu_1-\mu_2 < 0$

Κανόνες απόφασεις:

(1) Αποφασίζω για την A της περίπτωσης (1)

αν

$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{z}-0)}{S_z}\right| \geq t_{n-1};a$, όπου

$\bar{z} = \frac{z_1+\ldots+z_n}{n}$, με $z_1=x_1-y_1,\ldots,z_n=x_n-y_n$

και $S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2$

(2) Αποφασίζω για την A της περίπτωσης (2)

αν

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{z}-0)}{S_z} \geq t_{n-1};a$$

(3) Αποφασίζω για την A της περίπτωσης (3)

αν

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{z}-0)}{S_s} \leq -t_{n-1'};a=t_{n-1};\ 1-a$$

Γ. t-Έλεγχος για την σύγκριση δύο εξαρτημένων δειγμάτων

Στην περίπτωση που δεν έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις μπορούμε να έχουμε εξαρτημένα δείγματα x και y και να κάνουμε τους ελέγχους όπως στην 4A.η εδώ στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}}$$

Έλεγχος 5

Παραδοχές :Θεωρούμε ότι ισχύουν οι παραδοχές του Ελέγχου 4Α, όπου δεχόμαστε ότι οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 είναι άνισες

Στατιστικές Υποθέσεις:Προς έλεγχο έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις σε ε.σ. a, 0<a<1

(1) Η: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ Α: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) Η: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ Α: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

(3) Η: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ Α: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Κανόνες απόφασεις

(1)Αποφασίζω για την Α της (1) αν

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2} \geq F_{n_1-1,n_2-1;a/2} \acute{\eta} \frac{S_x^2}{S_y^2} \leq F_{n_1-1,n_2-1;1-a/2}$$

όπου $F_{n1-1,n2-1;1-a}$ το a ποσοστιαίο σημείο της F- κατανομής με n_1-1 και n_2-1 βαθμούς ελευθερίας

(2)Αποφασίζω για την Α της (2), αν

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2} \geq F_{n_1-1,n_2-1;1-a}$$

(3) Αποφασίζω για την Α της (3), αν

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2} \leq F_{n_1-1;n_2-1;a}$$

Ανάλογοι έλεγχοι γίνονται και όταν τα δείγματά μας
είναι εξαρτημένα.

Παράδειγμα 1.(i)Ενδιαφερόμαστε για το ποσοστό των
Ανθρώπων που ζουν στις πόλεις (μεταβλητή urban). Χώρες από την
“temperate region” (S_n) αποτελούν τη μια ομάδα, ενώ χώρες από την
“tropical region” (“8”) στην άλλη ομάδα
Τα δεδομένα στο “climate” είναι ποιοτικά (τακτική κλίμακα) 1$\rightarrow$ desert…κλπ

(ii)Ενδιαφερόμαστε για την μεταβλητή “calories”

(iii)fertlity $\begin{cases} catholic \\ mus\lim \end{cases}$