

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

1) Με μια νέα μέθοδο προσδιορισμού του σημείου τήξης (σ.τ.) μετάλλων προέκυψαν οι παρακάτω μετρήσεις για το μαγγάνιο:

1267, 1262, 1267, 1263, 1258, 1263, 1268.

Να εξεταστεί αν η νέα μέθοδος σφάλει με ε.σ. 0.05, δεδομένου ότι το σ.τ. του μαγγανίου είναι 1260°C.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο μέσου με άγνωστη διασπορά σε μικρό δείγμα (n=7):

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$, όπου $\mu_0 = 1260$.

Εύκολα υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο των παρατηρήσεων μας

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 1264 \text{ καθώς και τη δειγματική διασπορά } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 12.67.$$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή (περιοχή απόρριψης της H_0) είναι:

$$K: |t| = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2, n-1}, \text{ με } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|t| = 2.98$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 6} = 2.447$, οπότε απορρίπτουμε την H_0 , δηλαδή η νέα μέθοδος σφάλει.

2) Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν τα φορτία θραύσης (σε tn/cm^2) συνθετικών νημάτων δύο τύπων:

Τύπος I	1.2	0.3	0.8	0.5	0.4	0.9	1.0		
Τύπος II	1.4	1.5	1.1	1.0	0.8	1.7	0.9	0.7	0.6

Υποθέτοντας ισότητα διασπορών να εξεταστεί αν οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή σε ε.σ. 0.05.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο ισότητας μέσων με άγνωστες αλλά κοινές διασπορές:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Εύκολα προκύπτει ότι $\bar{X}_1=0.73$, $S_1^2=0.11$, $n_1=7$ και $\bar{X}_2=1.08$, $S_2^2=0.14$, $n_2=9$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{\alpha/2, v},$$

$$\text{με } S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{v}, \quad v = n_1 + n_2 - 2 \text{ και } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|t| = 1.91$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 14} = 2.145$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0 , δηλαδή οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή.

3) Έξη συνθετικά νήματα κόπηκαν στη μέση. Στο ένα τμήμα από κάθε ζεύγος εφαρμόστηκε μία ειδική χημική επεξεργασία για την αύξηση της αντοχής του, ενώ το άλλο αφέθηκε όπως είχε. Με βάση τα παρακάτω δεδομένα, όπου x_1 εκφράζει το δείκτη αντοχής του τμήματος με χημική επεξεργασία και x_2 το δείκτη αντοχής του τμήματος χωρίς χημική επεξεργασία, να εξεταστεί αν αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία ($\alpha=0.10$).

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διαφοράς μέσω εξαρτημένων δειγμάτων.

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0
Διαφορές D_i	2.5	2.6	1.8	2.2	2.1	2.3

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 2 = \mu_D$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2 = \mu_D.$$

$$\text{Εύκολα προκύπτει ότι } \bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i = 2.25 \text{ και } S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2 = 0.083 \text{ με } n=6.$$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\bar{D} - \mu_D|}{S_D / \sqrt{n}} > t_{\alpha, n-1}, \text{ με } \alpha = 0.10.$$

Έτσι $|t| = 2.13$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha, n-1} = t_{0.10, 5} = 1.476$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0 , δηλαδή πράγματι αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία.

4) Σε προβλήματα ελέγχου ποιότητας εκτός από τη διατήρηση ενός σταθερού μέσου μας ενδιαφέρει και η διατήρηση της διασποράς σε χαμηλά επίπεδα, διότι διαφορετικά

αυξάνει ο κίνδυνος απόρριψης του προϊόντος. Από την παραγωγή τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=16$ έδωσε δειγματική απόκλιση $S = 5.5$. Αν η μεγαλύτερη επιτρεπόμενη τυπική απόκλιση είναι $\sigma_0 = 4$ να εξεταστεί αν η παραπάνω υπέρβαση είναι στατιστικά σημαντική ή όχι ($\alpha=0.05$).

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διασποράς της μορφής

$$H_0: \sigma \leq 4 = \sigma_0$$

$$H_1: \sigma > 4 = \sigma_0.$$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |x^2| = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} > X_{n-1, \alpha}^2, \text{ με } S^2 = 5.5^2, n=16 \text{ και } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|x^2| = 28.36$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής χ^2 προκύπτει ότι $X_{n-1, \alpha}^2 = X_{15, 0.05}^2 = 25.00$, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και άρα η υπέρβαση είναι στατιστικά σημαντική.

5) Δυο αναλυτές Α και Β έκαναν 6 μικροαναλυτικούς προσδιορισμούς της περιεκτικότητας σε άνθρακα ενός χημικού προϊόντος και πήραν τις ακόλουθες τιμές:

Αναλυτής Α	59.09	59.17	59.27	59.13	59.10	59.14
Αναλυτής Β	59.06	59.40	59.00	59.12	59.01	59.25

Να ελεγχθεί η υπόθεση $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ με εναλλακτική την $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ ($\alpha=0.02$).

Λύση:

Εύκολα προκύπτει ότι $S_A^2 = 4.28 \cdot 10^{-3}$, $n_A=6$ και $S_B^2 = 24.59 \cdot 10^{-3}$, $n_B=6$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: F = \frac{S_A^2}{S_B^2} > F_{n_A-1, n_B-1, \alpha/2} \text{ ή } F = \frac{S_A^2}{S_B^2} < F_{n_A-1, n_B-1, 1-\alpha/2}.$$

Αλλά $F = 5.75$ και από τους πίνακες της κατανομής F έχουμε ότι $F_{n_A-1, n_B-1, \alpha/2} = F_{5,5,0.01} = 10.97$, ενώ $F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} = \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}} = \frac{1}{F_{5,5,0.01}} = \frac{1}{10.97} = 0.09$, οπότε αποδεχόμαστε την

H_0 .

6) Κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι το πολύ 2% των προϊόντων του είναι ελαττωματικά. Σε τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=900$ βρέθηκαν $k=27$ ελαττωματικά. Με ε.σ. $\alpha=0.05$ να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του κατασκευαστή με εναλλακτική υπόθεση την $H_1: p > 0.02$.

Λύση:

Έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

$$H_0: p \leq 0.02 = p_0$$

$$H_1: p > 0.02 = p_0.$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $\hat{p} = \frac{27}{900} = 0.03$ και $n=900$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha, \text{ με } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $Z=2.14$ και από τους πίνακες της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $z_\alpha = 1.64$, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και τον ισχυρισμό του κατασκευαστή.

7) Από την παραγωγή δύο μηχανών τυχαία δείγματα μεγέθους $n_1=450$ και $n_2=400$ έδωσαν αριθμό ελαττωματικών προϊόντων 17 και 12 αντίστοιχα. Να εξεταστεί αν υπάρχει διαφορά στα ποσοστά παραγωγής ελαττωματικών προϊόντων από τις δύο μηχανές.

Λύση:

Έχουμε τον παρακάτω έλεγχο:

$$H_0: p_1 = p_2$$

$$H_1: p_1 \neq p_2.$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $\hat{p}_1 = \frac{17}{450} = 0.038$ και $\hat{p}_2 = \frac{12}{400} = 0.03$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |Z| = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > z_{\alpha/2},$$

$$\text{με } \tilde{p} = \frac{17+12}{450+400} = 0.034 \text{ και } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|Z|=0.64$ και από τους πίνακες της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $z_{\alpha/2} = 1.96$, οπότε αποδεχόμαστε την H_0 για την μη ύπαρξη διαφοράς στα ποσοστά παραγωγής ελαττωματικών προϊόντων από τις δύο μηχανές.

8) Τα παρακάτω δεδομένα εκφράζουν το χρόνο διαδρομής X (sec) ενός γερανού – γέφυρα. Να εξεταστεί σε ε.σ. $\alpha=0.05$ αν ο χρόνος διαδρομής ακολουθεί την ομοιόμορφη στο διάστημα $(40,90)$ κατανομή.
82, 63, 58, 67, 75, 44, 48, 77, 86, 51, 74, 69, 56, 42, 68, 73, 85, 89, 45, 65, 72, 83, 64, 48, 58, 63.

Λύση:

Η ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(40,90)$ έχει σ.π.π. την εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{90-40} = 0.2, & x \in (40, 90) \\ 0, & x \notin (40, 90) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη κατανομή δεν έχει καμία παράμετρο ως προς εκτίμηση.

Εύκολα κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα:

$x_{i-1} < x \leq x_i$	O_i	$\hat{p}_i$	$\hat{E}_i = n \cdot \hat{p}_i$
40-50	5	0.2	5.2
51-60	4	0.2	5.2
61-70	7	0.2	5.2
71-80	5	0.2	5.2
81-90	5	0.2	5.2
Σύνολο	26 = n	1.0	-

Με βάση το κριτήριο χ^2 καλής προσαρμογής έχουμε:

$$X^2 = \frac{(5-5.2)^2}{5.2} + \frac{(4-5.2)^2}{5.2} + \frac{(7-5.2)^2}{5.2} + \frac{(5-5.2)^2}{5.2} + \frac{(5-5.2)^2}{5.2} = 0.931 < X_{5-1-0,0.05}^2 = 9.488,$$

οπότε η υπόθεση ότι ο χρόνος διαδρομής ακολουθεί την ομοιόμορφη στο διάστημα $(40,90)$ κατανομή γίνεται δεκτή.

9) Μετρήσεις του αριθμού X των χρηστών τερματικών μονάδων σε μία αίθουσα τερματικών ενός κέντρου Η/Υ ελήφθησαν σε τυχαίες χρονικές στιγμές μεταξύ 10.00 και 12.00 μ. Τα αποτελέσματα δίνονται από τον παρακάτω πίνακα κατανομών συχνοτήτων.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1	3	5	9	10	7	5	4	3	2	1

Να ελεγχθεί αν ο αριθμός X ακολουθεί την κατανομή Poisson ($\alpha=0.05$).

Λύση:

Η κατανομή Poisson έχει σ.μ.π. την εξής:

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Θυμίζουμε επίσης ότι στην συγκεκριμένη κατανομή η άγνωστη παράμετρος λ ισούται με την μέση τιμή της τ.μ. X .

Έτσι εύκολα κατασκευάζουμε το ακόλουθο πίνακα:

X_i	O_i	$X_i \cdot O_i$	$\hat{p}_i$	$\hat{E}_i = n \cdot \hat{p}_i$
0	1	0	0.0110	0.555
1	3	3	0.0500	2.500
2	5	10	0.1125	5.625
3	9	27	0.1687	8.435
4	10	40	0.1898	9.490
5	7	35	0.1708	8.540
6	5	30	0.1281	6.405
7	4	28	0.0824	4.120
8	3	24	0.0463	2.315
9	2	18	0.0232	1.160
10	1	10	0.0171	0.855
ΣΥΝΟΛΟ	50=n	225	1.00	-

Οι πιθανότητες στην τέταρτη στήλη του πίνακα έχουν προκύψει με βάση την σ.μ.π.

της Poisson, δηλαδή $\hat{p}_i = e^{-\hat{\lambda}} \cdot \frac{\hat{\lambda}^i}{i!}$, για $i = 0, 1, \dots, 9$ και $\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{225}{50} = 4.5$, ενώ $\hat{p}_{10} = 1 - \sum_{i=1}^9 \hat{p}_i$.

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω πίνακα υπάρχουν $\hat{E}_i < 5$. Έτσι αποφασίζουμε να ενώσουμε τις 3 πρώτες ($0.555 + 2.500 + 5.625 = 8.690$) και τις 4 τελευταίες ($4.120 + 2.315 + 1.160 + 0.855 = 12.570$) κλάσεις, οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας με 6 συνολικά κλάσεις:

X_i	O_i	$\hat{E}_i = n \cdot \hat{p}_i$
0 - 2	9	8.680
3	9	8.435
4	10	9.490
5	7	8.540
6	5	6.405
7-10	10	12.570

ΣΥΝΟΛΟ	50=n	-
--------	------	---

Με βάση το κριτήριο χ^2 καλής προσαρμογής έχουμε:

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{(9-8.680)^2}{8.680} + \frac{(9-8.435)^2}{8.435} + \frac{(10-9.490)^2}{9.490} + \frac{(7-8.540)^2}{8.540} + \frac{(5-6.405)^2}{6.405} + \frac{(10-12.570)^2}{12.570} = \\ &= 1.1883 < X_{6-1-1,0.05}^2 = 9.488, \end{aligned}$$

οπότε η υπόθεση ότι ο αριθμός X ακολουθεί την κατανομή Poisson γίνεται δεκτή.