



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Οικονομετρία Ι

Ενότητα 2: Ανάλυση Παλινδρόμησης

Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας και στην Ανώτατη Εκκλησιαστική Ακαδημία Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Σκοποί ενότητας

- Βήματα για την Επίλυση ενός Οικονομικού Προβλήματος - Κατηγορίες Στατιστικών Στοιχείων - Πηγές Δεδομένων. (Εφαρμογές με το Οικονομικό Πακέτο Eviews).



Περιεχόμενα

- Ανάλυση Παλινδρόμησης (Regression Analysis).
- Προσδιοριστικές & Στοχαστικές σχέσεις.
- Πληθυσμός και Δείγμα.
- Γραμμή Παλινδρόμησης.
- Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares).
- Ιδιότητες των εκτιμητών β_0 και β_1 .



Ανάλυση Παλινδρόμησης (Regression Analysis)

Στατιστική μέθοδος που προσπαθεί να ερμηνεύσει και να ποσοτικοποιήσει τις μεταβολές μιας μεταβλητής (εξαρτημένης) Y_t σε σχέση με τις μεταβολές άλλης ανεξάρτητης μεταβλητής (απλή παλινδρόμηση) X_t ή άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών (πολλαπλή παλινδρόμηση) $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt}$.

Ο ερευνητής με βάση τη θεωρία και την εμπειρία επιλέγει:

- Την εξαρτημένη μεταβλητή.
- Τις ανεξάρτητες μεταβλητές.
- Τη μορφή της συνάρτησης.

Η ανάλυση παλινδρόμησης εκτιμά τα β (συντελεστές – coefficients).

Π.χ. $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t$



Προσδιοριστικές & Στοχαστικές σχέσεις (1/4)

- Προσδιοριστική Σχέση.

Σε κάθε τιμή της X αντιστοιχεί και μια τιμή της Y .

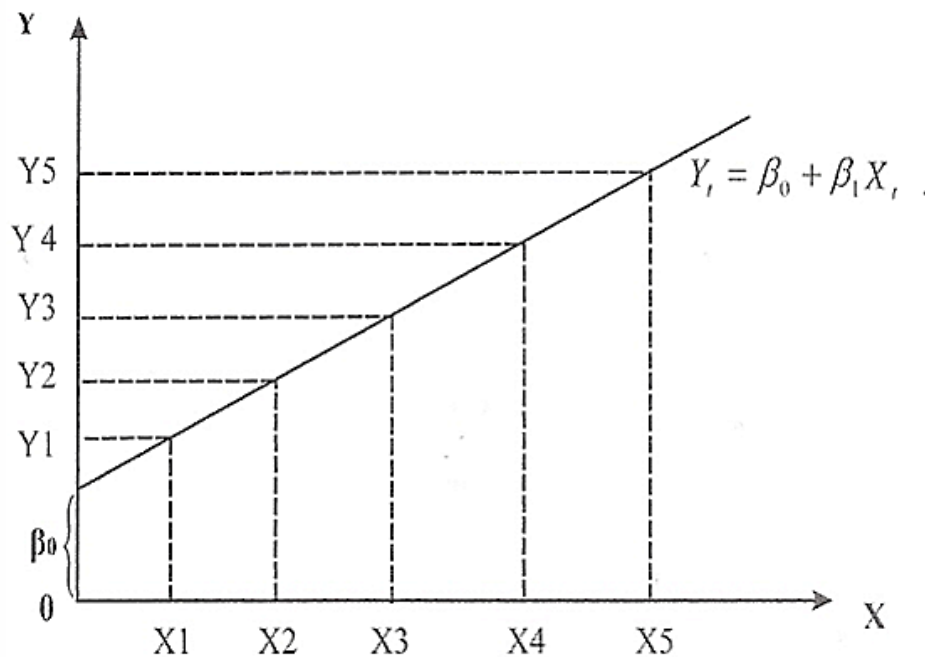
Έστω η συνάρτηση κατανάλωσης $C_t = a + bY_t$ όπου $C_t =$ δαπάνες για κατανάλωση, $Y_t =$ Διαθέσιμο εισόδημα και $a, b =$ συντελεστές προς εκτίμηση.

Ο συντελεστής b ονομάζεται οριακή ροπή κατανάλωσης και παίρνει τιμές από 0 έως 1. Αν το διαθέσιμο εισόδημα είναι 0, τότε η κατανάλωση είναι ίση με a . Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι όλες οι οικογένειες με το ίδιο εισόδημα έχουν και τις ίδιες δαπάνες κατανάλωσης.

Η μαθηματική αυτή σχέση ονομάζεται **προσδιοριστική** γιατί ακριβώς η σχέση μεταξύ κατανάλωσης και εισοδήματος είναι ακριβής.



Προσδιοριστικές & Στοχαστικές σχέσεις (2/4)



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση προσδιοριστικής σχέσης.

Πηγή: Διδάσκουσα (2015).

Προσδιοριστικές & Στοχαστικές σχέσεις (3/4)

- Στοχαστική Σχέση.

Στην πραγματικότητα όμως, δεν ισχύει αυτό, επειδή πολλοί παράγοντες όπως π.χ. η ηλικία, οι συνήθειες των καταναλωτών, η συμπεριφορά κτλ. επηρεάζουν διαφορετικά τις καταναλωτικές δαπάνες.

Αν προσθέσουμε μια τυχαία μεταβλητή ε_t η σχέση γίνεται στατιστική ή στοχαστική ως εξής:

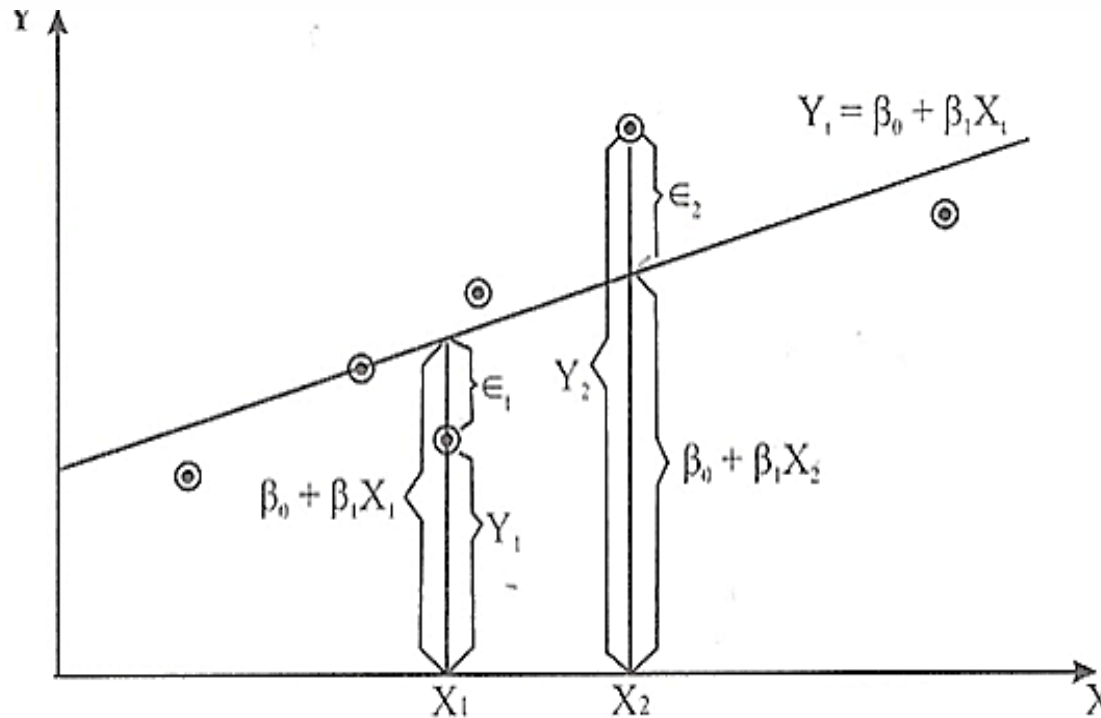
$$C_t = a + bY_t + \varepsilon_t$$

η τυχαία μεταβλητή ε_t ονομάζεται διαταρακτικός όρος γιατί διαταράσσει την προσδιοριστική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις μεταβλητές C και Y .

Η μεταβλητή αυτή είναι μη παρατηρήσιμη και μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές.



Προσδιοριστικές & Στοχαστικές σχέσεις (4/4)



Εικόνα 2: Γραφική παράσταση για διάφορες τιμές του διαταρακτικού όρου.

Πηγή: Διδάσκουσα (2015).

Πληθυσμός και Δείγμα (1/2)

Η στοχαστική σχέση βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις:

- Σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής υπάρχει μια ολόκληρη κατανομή για την εξαρτημένη μεταβλητή. Δηλαδή για κάθε τιμή της αντιστοιχεί ένα πλήθος τιμών της που ακολουθούν την κανονική κατανομή.
- Οι τιμές που παίρνει η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Αν το μέγεθος του δείγματος είναι n τότε στην εξαρτημένη μεταβλητή αντιστοιχούν n κανονικές κατανομές που έχουν όλες την ίδια διακύμανση.

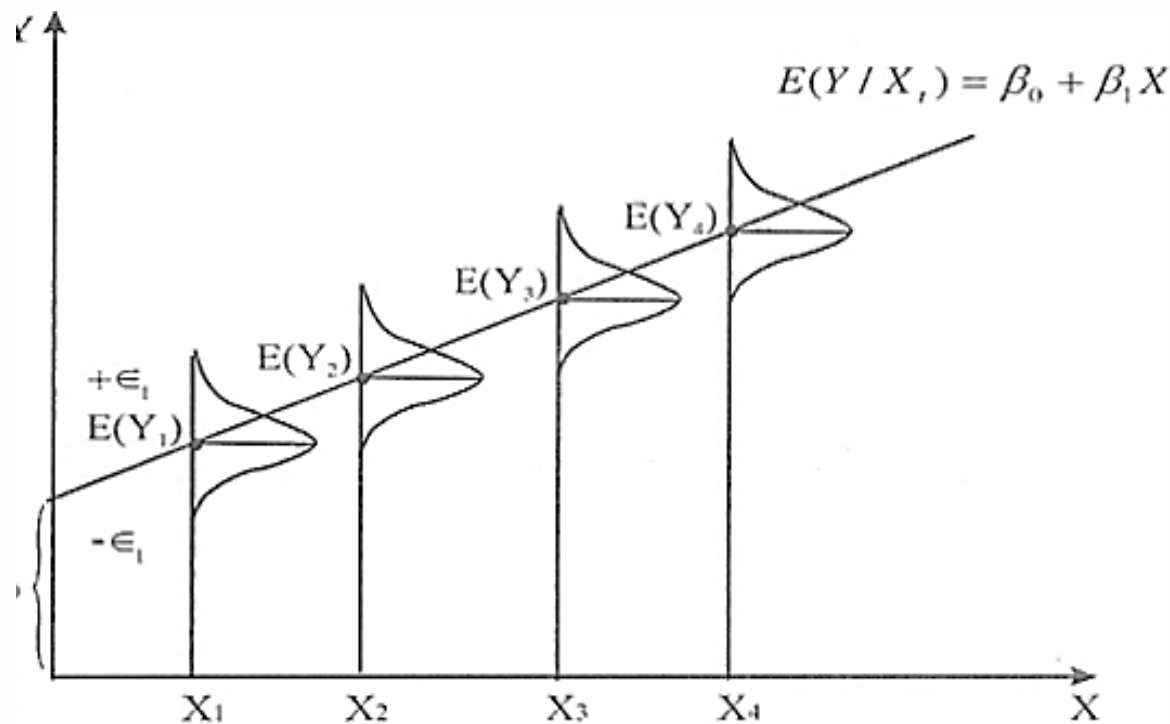


Πληθυσμός και Δείγμα (2/2)

- Ο μέσος της κάθε κανονικής κατανομής της εξαρτημένη μεταβλητή ισούται με \bar{y} . Όλοι οι μέσοι της εξαρτημένης μεταβλητής βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή που ονομάζεται γραμμή παλινδρόμησης του πληθυσμού (population regression line). Άρα η γραμμή παλινδρόμησης του πληθυσμού είναι η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους μέσους της εξαρτημένης μεταβλητής και στις αντίστοιχες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής.



Γραμμή Παλινδρόμησης του Πληθυσμού



Εικόνα 3: Γραμμή Παλινδρόμησης του Πληθυσμού.
Πηγή: Διδάσκουσα (2015).

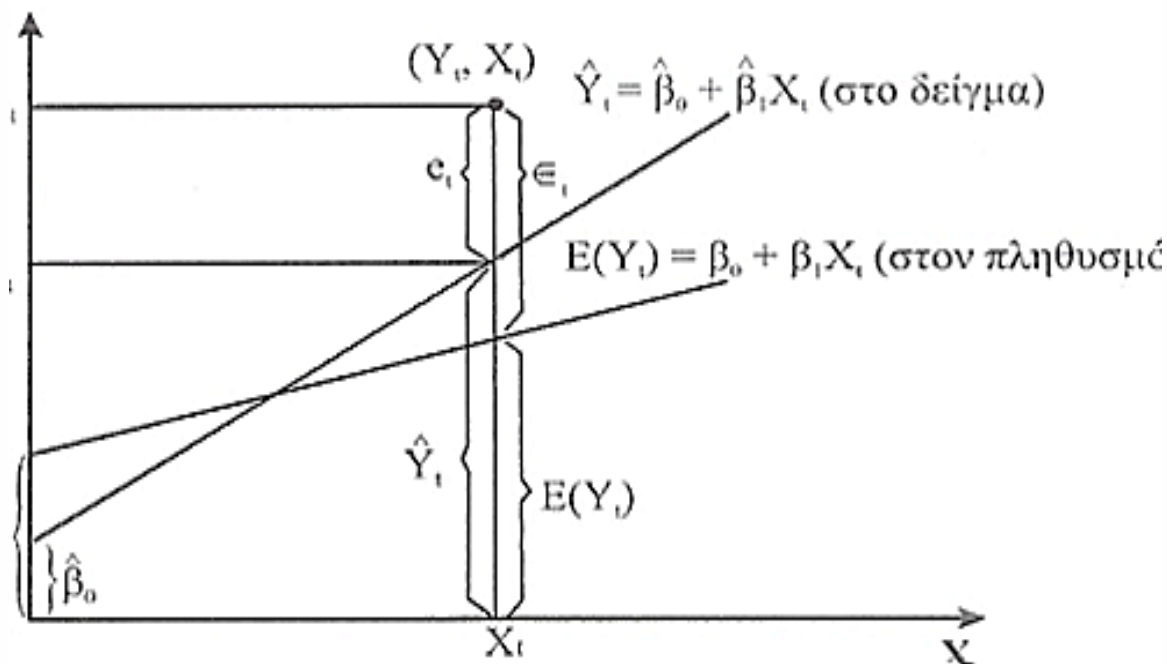
Γραμμή Παλινδρόμησης του Δείγματος (1/2)

- Η γραμμή παλινδρόμησης του πληθυσμού είναι άγνωστη αφού δε γνωρίζουμε τους συντελεστές β_0 και β_1 . Από τη στιγμή που αυτό είναι αδύνατο εκτιμούμε τους συντελεστές β_0 και β_1 από ένα δείγμα παρατηρήσεων των μεταβλητών Y_t και X_t , οπότε έχω τη γραμμή παλινδρόμησης του δείγματος (sample regression line).

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$$



Γραμμή Παλινδρόμησης του Δείγματος (2/2)



Εικόνα 4: Γραμμή Παλινδρόμησης του Δείγματος.
Πηγή: Διδάσκουσα (2015).

Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares) (1/4)

- Μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της γραμμής παλινδρόμησης.
- Είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται περισσότερο επειδή:
A) οι εκτιμητές έχουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες και
B) Είναι εύκολη στην εφαρμογή της.

Ο αριθμός των εκτιμητών είναι ουσιαστικά άπειρος δηλαδή μπορούμε να κατασκευάσουμε και άπειρες γραμμές παλινδρόμησης. Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο.

Επιλογή των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ που ελαχιστοποιούν τα τετράγωνα των καταλοίπων.

$$\min \sum_{t=1}^n e_t^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t)^2$$



Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares) (2/4)

- Παίρνοντας τις πρώτες παραγώγους της προηγούμενης συνάρτησης ως προς τους εκτιμητές $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους τους εκτιμητές $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$.

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e_t^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t) = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n e_t^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t) = 0$$



Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares) (3/4)

- Επίλυση Κανονικών εξισώσεων:

$$\sum_{t=1}^n Y_t = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t$$

$$\sum_{t=1}^n Y_t X_t = \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2$$

- Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί και υπό μορφή μητρών ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_t X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n X_t \\ \sum_{t=1}^n X_t & \sum_{t=1}^n X_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$



Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares) (4/4)

$$\hat{\beta}_0 = \frac{D_{\hat{\beta}_0}}{D} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t \sum_{t=1}^n X_t^2 - \sum_{t=1}^n X_t \sum_{t=1}^n Y_t X_t}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - (\sum_{t=1}^n X_t)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{D_{\hat{\beta}_1}}{D} = \frac{n \sum_{t=1}^n Y_t X_t - \sum_{t=1}^n Y_t \sum_{t=1}^n X_t}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - (\sum_{t=1}^n X_t)^2}$$



Ιδιότητες των εκτιμητών β_0 και β_1

- Οι εκτιμητές $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι τυχαίες μεταβλητές και τα χαρακτηριστικά τους καθώς και οι ιδιότητές τους είναι σημαντικές πληροφορίες για την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων του πληθυσμού.
- Ικανοποιούν τις παρακάτω υποθέσεις:
 1. Είναι αμερόληπτοι (unbiased) εκτιμητές των συντελεστών παλινδρόμησης του πληθυσμού.
 2. Είναι συνεπείς (consistent) δηλαδή με μια μεγάλη αύξηση του δείγματος οι εκτιμητές συγκλίνουν προς τους συντελεστές της παλινδρόμησης του πληθυσμού.
 3. Είναι αποτελεσματικοί (efficient) διότι έχουν τη μικρότερη διακύμανση και επομένως και το μικρότερο τυπικό σφάλμα ανάμεσα σε όλους τους αμερόληπτους εκτιμητές.
 4. Το άθροισμα των καταλοίπων e_1 γύρω από τη γραμμή παλινδρόμησης ισούται με μηδέν.



Τέλος Ενότητας



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας, Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη. «Οικονομετρία Ι ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: URL.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο.
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο.
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο.

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς.
- το Σημείωμα Αδειοδότησης.
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων.
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει).

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

