



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Οικονομετρία I

Ενότητα 6: Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης

Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας και στην Ανώτατη Εκκλησιαστική Ακαδημία Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Σκοποί ενότητας

- Έλεγχος με την Κατανομή F – Ανάλυση της Διακύμανσης, Συντελεστής Προσδιορισμού, Συντελεστής Συσχέτισης, Συντελεστές Παλινδρόμησης και Ελαστικότητα. (Εφαρμογές με το Οικονομετρικό Πακέτο Eviews).



Περιεχόμενα

- Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης.
- Βασικές Υποθέσεις του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος.
- Έλεγχος Στατιστικής Σημαντικότητας του Υποδείγματος της Πολλαπλής Γραμμικής Παλινδρόμησης.
- Η στατιστική F.



Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης (1/2)

- Τα υποδείγματα του απλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης (sample linear regression model) αναφέρονται σε σχέσεις που περιλαμβάνουν μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Τα περισσότερα οικονομικά μεγέθη είναι συναρτήσεις όχι μιας αλλά πολλών μεταβλητών. Έστω η συνάρτηση $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ είναι συνάρτηση k ανεξάρτητων μεταβλητών (regressors) και αν υποθέσουμε ότι είναι γραμμική για ένα δείγμα n παρατηρήσεων μπορούμε να τη γράψουμε ως εξής:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \epsilon_t$$



Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης (2/2)

- Η σχέση αυτή αποτελεί το υπόδειγμα της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης (multiple linear regression model) που είναι η επέκταση του απλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης για περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές. Από την πλευρά της μεθοδολογίας το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα της παλινδρόμησης έχει πολλές ομοιότητες με το απλό γραμμικό υπόδειγμα της παλινδρόμησης.



Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης με 3 μεταβλητές (1/2)

- Έστω το παρακάτω πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \epsilon_t$$

- Έστω ότι $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ είναι οι εκτιμητές των β_0, β_1 και β_2 που προέρχονται από ένα δείγμα που πάρθηκε τυχαία από ένα πληθυσμό, τότε η συνάρτηση του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης του δείγματος θα είναι:

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \epsilon_t$$



Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης με 3 μεταβλητές (2/2)

- Οι εκτιμητές β_0 , β_1 και β_2 ονομάζονται μερικοί συντελεστές της παλινδρόμησης (partial regression coefficients) και έχουν τη μικρότερη διακύμανση από κάθε άλλο αμερόληπτο εκτιμητή. Για τον λόγο αυτό θεωρούνται ότι είναι BLUE (Best Linear Unbiased Estimators).



Βασικές Υποθέσεις του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος (1/3)

- Οι βασικές υποθέσεις για το υπόδειγμα της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, είναι σχεδόν οι ίδιες με τις υποθέσεις για το υπόδειγμα της απλής γραμμικής παλινδρόμησης. Στο πολλαπλό όμως υπόδειγμα της παλινδρόμησης επιπλέον έχουμε και τις παρακάτω δύο υποθέσεις:



Βασικές Υποθέσεις του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος (2/3)

- Τα στοιχεία της μήτρας X είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και έχουν πεπερασμένη διακύμανση. Μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών $X_1, X_2, X_3 \dots, X_n$ δεν υπάρχει καμία γραμμική σχέση. Η παραβίαση της υπόθεσης αυτής δημιουργεί πρόβλημα στην αναγνώριση της επίδρασης κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής πάνω στην εξαρτημένη. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα πολυσυγγραμμικότητας (multicollinearity). Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι, όταν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι πλήρως συγγραμμικές, τότε είναι αδύνατο να απομονώσουμε τις ατομικές επιδράσεις της κάθε μεταβλητής στην εξαρτημένη.



Βασικές Υποθέσεις του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος (3/3)

- Η μήτρα X είναι μη στοχαστική (nonstochastic) και έχει k βαθμό. Ο βαθμός k της μήτρας X είναι μικρότερος από τον αριθμό των παρατηρήσεων n . Ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των συντελεστών (παραμέτρων) του υποδείγματος που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι οι βαθμοί ελευθερίας θα πρέπει να είναι θετικοί για να μπορέσουμε να κάνουμε τους στατιστικούς ελέγχους στο υπόδειγμα που μελετάμε.



Έλεγχος Στατιστικής Σημαντικότητας (1/2)

- Ο έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας του υποδείγματος της πολλαπλής παλινδρόμησης του πληθυσμού αποτελεί ένα από τα κυριότερα στάδια στην μεθοδολογία της οικονομετρίας. Έστω ότι έχουμε το παρακάτω υπόδειγμα της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης του πληθυσμού:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \epsilon_t$$



Έλεγχος Στατιστικής Σημαντικότητας (2/2)

- Η μηδενική υπόθεση μπορεί να δια-μορφωθεί ως εξής:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

- Με εναλλακτική την υπόθεση

$$H_1: \beta_k \neq 0$$

- Τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης του πληθυσμού είναι διάφορος του μηδενός. Ο έλεγχος αυτός αφορά το σύνολο των συντελεστών του υποδείγματος της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης του πληθυσμού. Δηλαδή, αναφέρεται στην ικανότητα όλων μαζί των ανεξάρτητων μεταβλητών να ερμηνεύσουν την εξαρτημένη μεταβλητή Y_t .



Η στατιστική F (1/5)

- Η στατιστική F (F – statistics) χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας των συντελεστών του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης. Η τιμή της στατιστικής F δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F = \frac{\frac{\sum_{t=1}^n (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{k}}{\frac{\sum_{t=1}^n (Y - \hat{Y})^2}{n - (k+1)}} = \frac{\frac{RSS}{k}}{\frac{ESS}{n - (k+1)}} \rightarrow F_{v_2 - k, v_2 - n - (k+1).a}$$



Η στατιστική F (2/5)

- Με δεδομένο το επίπεδο σημαντικότητας (α), αν η τιμή της στατιστικής F είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή (τιμή των πινάκων) τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης είναι διάφορος του μηδενός. Επίσης η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης σημαίνει ότι ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού είναι στατιστικά σημαντικός (διάφορος του μηδενός).



Η στατιστική F (3/5)

$$F = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-(k+1)}} \rightarrow F_{\nu_2-k, \nu_2-n-(k+1).a}$$



Η στατιστική F (4/5)

- Η παραπάνω συνάρτηση υποδηλώνει ότι με την κατανομή F γίνεται ο έλεγχος της σημαντικότητας του πολλαπλού προσδιορισμού R^2 . Αν η τιμή του F τότε και η τιμή της στατιστικής F προσεγγίζει το μηδέν. Αν η στατιστικής $F < F_{\text{κριτική}}$ από την κριτική τιμή (τιμή των πινάκων) τότε λέμε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές δεν ερμηνεύουν επαρκώς τη μεταβολή της εξαρτημένης στο υπόδειγμα της γραμμικής πολλαπλής παλινδρόμησης. Αν η τιμή του πολλαπλού συντελεστή προσδιορισμού είναι υψηλή τότε θα έχουμε και υψηλή τιμή στη στατιστική F. Επομένως όσο πιο υψηλή είναι η τιμή της στατιστικής F τόσο πιο σημαντική είναι η σχέση μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών και της εξαρτημένης μεταβλητής Y.



Η στατιστική F (5/5)

- Σε ορισμένα υποδείγματα πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης παρατηρούμε ότι ενώ οι εκτιμητές είναι στατιστικά σημαντικοί (διάφοροι του μηδενός) η τιμή της στατιστικής F είναι πολύ χαμηλή που σημαίνει ότι στο σύνολό τους οι συντελεστές του υποδείγματος είναι μη στατιστικά σημαντικοί. Η ύπαρξη αυτού του φαινομένου οφείλεται στο πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας (multicollinearity).



Τέλος Ενότητας



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας, Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη. «Οικονομετρία Ι ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο.
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο.
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο.

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς.
- το Σημείωμα Αδειοδότησης.
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων.
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει).

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

