



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ  
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

# Οικονομετρία Ι

Ενότητα 7: Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού

Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας και στην Ανώτατη Εκκλησιαστική Ακαδημία Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Σκοποί ενότητας

- Πολλαπλό Γραμμικό Υπόδειγμα Παλινδρόμησης – Οι Βασικές Υποθέσεις του Πολλαπλού Γραμμικού Υποδείγματος. (Εφαρμογές με το Οικονομετρικό Πακέτο Eviews).



# Περιεχόμενα

- Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού.
- Διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού.
- Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης.
- Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων της Παλινδρόμησης.



# Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού (1/3)

- Ο συντελεστής προσδιορισμού είναι ένα μέτρο της ικανότητας προσαρμογής του υποδείγματός μας, είτε αυτό είναι ένα απλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης, είτε είναι πολλαπλό. Επομένως ανεξάρτητα από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, ο συντελεστής προσδιορισμού ορίζεται ως η αναλογία της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  που ερμηνεύεται από την παλινδρόμηση, δηλαδή από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ .



# Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού (2/3)

- Η τιμή του συντελεστή της πολλαπλής παλινδρόμησης υπολογίζεται από τους παρακάτω τύπους:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n}}{\frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}{n}} = 1 - \frac{\text{Var}(e_t)}{\text{Var}(Y_t)}$$



# Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού (3/3)

- Όπου  $\text{Var}(e_t)$  και  $\text{Var}(Y_t)$  είναι οι διακυμάνσεις των καταλοίπων και της εξαρτημένης μεταβλητής αντίστοιχα.
- Η τιμή του πολλαπλού συντελεστή προσδιορισμού κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1,  
 $0 < R^2 < 1$
- Επειδή ο αριθμός των παραμέτρων εξαρτάται από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιλαμβάνονται στη συνάρτηση του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης, συνεπάγεται ότι η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού επηρεάζεται άμεσα από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών του γραμμικού υποδείγματος. Επομένως, αν το δείγμα περιέχει μικρό αριθμό παρατηρήσεων και μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών προκύπτει σοβαρό πρόβλημα συνέπειας και ακρίβειας των εκτιμητών στο πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα.



# Διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού

- Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού έχει προταθεί ο διορθωμένος (προσαρμοσμένος) συντελεστής προσδιορισμού (adjusted coefficient of multiple determination)  $\overline{R}^2$  που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$1 - (1 - R^2) * \left[ \frac{n - 1}{n - (k + 1)} \right]$$

- Μία από τις βασικές διαφορές είναι ότι με την αύξηση του αριθμού των ανεξάρτητων μεταβλητών, η τιμή του συντελεστή πάντοτε αυξάνει, ενώ η τιμή του διορθωμένου συντελεστή προσδιορισμού ενδέχεται να αυξηθεί ή να μειωθεί. Για τον λόγο αυτό θα λέγαμε ότι ο διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού είναι περισσότερο κατάλληλος για τη σύγκριση της ερμηνευτικής ικανότητας των υποδειγμάτων που έχουν διαφορετικό αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών, καθώς και διαφορετικό μέγεθος δειγμάτων.



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης

- Αν σε ένα πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης ορίσουμε ως  $r_{ij}$  (όπου  $i = 0, 1, \dots, k$  και  $j = 0, 1, \dots, k$ ) τον απλό συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών  $Y, X_1, X_2, \dots, X_k$  τότε μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους απλούς συντελεστές συσχέτισης μεταξύ όλων των μεταβλητών ανά δύο που βρίσκονται στο πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα της παλινδρόμησης με την παρακάτω μήτρα  $R$  (μήτρα συσχετίσεων).



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης (1/5)

$$R = \begin{bmatrix} r_{YY} & r_{YX_1} & \dots & r_{YX_2} & \dots & r_{YX_k} \\ r_{X_1Y} & r_{X_1X_1} & & r_{X_1X_2} & & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2Y} & r_{X_2X_1} & & r_{X_2X_2} & & r_{X_2X_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{X_kY} & r_{X_kX_1} & & r_{X_kX_2} & \dots & r_{X_kX_k} \end{bmatrix}$$

Πίνακας 1: Πίνακας Μερικών Συντελεστών Συσχέτισης.

Πηγή: Διδάσκουσα (2015).



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης (2/5)

- Ο απλός συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών δεν λαμβάνει υπόψη του τις πιθανές σχέσεις των μεταβλητών αυτών ως προς μία άλλη τρίτη μεταβλητή. Δηλαδή θα λέγαμε ότι ο απλός συντελεστής συσχέτισης δεν μετρά την αληθινή συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος της παλινδρόμησης, όταν υπάρχει και κάποια άλλη μεταβλητή που μπορεί να συσχετίζεται με τις δύο αυτές μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τους μερικούς συντελεστές συσχέτισης.



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης (3/5)

- Έστω το παρακάτω πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα της παλινδρόμησης:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \epsilon_t$$

- Ο μερικός συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y_t$  και της ανεξάρτητης μεταβλητής  $X_{1t}$  μετρά την επίδραση της  $X_{1t}$  επί της  $Y_t$  δοθέντος ότι η  $X_{2t}$  παραμένει σταθερή. Ομοίως, ο μερικός συντελεστής μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y_t$  και της ανεξάρτητης μεταβλητής  $X_{2t}$  μετρά την επίδραση της  $X_{2t}$  επί της  $Y_t$  δοθέντος ότι η  $X_{1t}$  παραμένει σταθερή.



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης (4/5)

- Οι δύο μερικοί συντελεστές προσδιορισμού δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$r_{Y_t X_{1t} \cdot X_{2t}} = \frac{r_{Y_t X_{1t}} - r_{Y_t X_{2t}} r_{X_{1t} X_{2t}}}{\sqrt{1 - r_{X_{1t} X_{2t}}^2} \sqrt{1 - r_{Y_t X_{2t}}^2}}$$

$$r_{Y_t X_{2t} \cdot X_{1t}} = \frac{r_{Y_t X_{2t}} - r_{Y_t X_{1t}} r_{X_{1t} X_{2t}}}{\sqrt{1 - r_{X_{1t} X_{2t}}^2} \sqrt{1 - r_{Y_t X_{1t}}^2}}$$

$$r_{X_{1t} X_{2t} \cdot Y_t} = \frac{r_{X_{1t} X_{2t}} - r_{X_{1t} Y_t} r_{X_{2t} Y_t}}{\sqrt{1 - r_{X_{1t} Y_t}^2} \sqrt{1 - r_{X_{2t} Y_t}^2}}$$



# Μερικοί Συντελεστές Συσχέτισης (5/5)

- Οι μερικοί συντελεστές προσδιορισμού παίρνουν τιμές ανάμεσα -1 και +1.
- Αν  $r_{Y_t X_{1t} \cdot X_{2t}}$  τότε λέμε ότι δεν υπάρχει καμία γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών  $Y$  και  $X_1$  όταν η μεταβλητή  $X_2$  παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή  $X_1$  είναι προτιμότερο να εξαιρεθεί από το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα της παλινδρόμησης.



# Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων της Παλινδρόμησης (1/4)

- Όταν υπάρχουν δύο συναρτήσεις που οι εξαρτημένες τους μεταβλητές αποτελούν διαφορετικές συναρτησιακές μορφές,

$$\text{π.χ } Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \epsilon_t$$

$$\text{και } \ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln X_{1t} + \beta_2 \ln X_{2t} + \epsilon_t$$

τότε δεν μπορούμε να συγκρίνουμε αυτές τις δύο συναρτήσεις με τους αντίστοιχους συντελεστές προσδιορισμού.



# Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων της Παλινδρόμησης (2/4)

- Ο διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού είναι περισσότερο κατάλληλος για τη σύγκριση της ερμηνευτικής ικανότητας των υποδειγμάτων που έχουν διαφορετικό αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών, καθώς και διαφορετικό μέγεθος δειγμάτων.
- Υπάρχουν ωστόσο και άλλα κριτήρια εκτός από το διορθωμένο συντελεστή προσδιορισμού που μπορούμε να κάνουμε τη σύγκριση της ερμηνευτικής ικανότητας των υποδειγμάτων.
- Τα κυριότερα από αυτά είναι το κριτήριο του Akaike (1973) (Akaike Information Criterion, AIC), το κριτήριο του Schwarz (1978) (Schwarz Criterion, SC) και το κριτήριο των Hannan and Quinn (1979) (Hannan and Quinn Criterion HQ) τα οποία βασίζονται στα αθροίσματα των τετραγώνων των καταλοίπων.



# Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων της Παλινδρόμησης (3/4)

- Τα κριτήρια αυτά δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$LL = -\frac{n}{2} \left[ 1 + \ln(2\pi) + \ln \left( \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n} \right) \right]$$

$$AIC = -2 \frac{LL}{n} + \frac{2k}{n}$$

$$SC = -2 \frac{LL}{n} + \frac{k \ln n}{n}$$

$$HQ = -2 \frac{LL}{n} + \frac{2k \ln[\ln n]}{n}$$



# Κριτήρια Επιλογής Υποδειγμάτων της Παλινδρόμησης (4/4)

- Με βάση τα παραπάνω κριτήρια, επιλέγουμε εκείνο το υπόδειγμα που έχει τη μικρότερη τιμή στα κριτήρια αυτά. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι και τα τρία κριτήρια μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές. Πρέπει επίσης εδώ να επισημάνουμε ότι όλα τα κριτήρια δεν επιλέγουν το ίδιο υπόδειγμα. Στην περίπτωση αυτή διαλέγουμε εκείνο το υπόδειγμα που το υποδεικνύουν τα περισσότερα κριτήρια.



# Τέλος Ενότητας



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright ΤΕΙ Δυτικής Μακεδονίας, Δρ. Χαϊδώ Δριτσάκη. «Οικονομετρία Ι ». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο.
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο.
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο.

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς.
- το Σημείωμα Αδειοδότησης.
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων.
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει).

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

