



Χρονολογικές Σειρές (Time Series)

[Τύποι Οικονομικών Δεδομένων]

- Τα οικονομικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εξέταση οικονομικών φαινομένων μπορεί να έχουν τις ακόλουθες μορφές:
 - Διαστρωματικά Δεδομένα (cross-section data): αφορούν μετρήσεις μεταβλητών για διαφορετικές οικονομικές μονάδες άτομα, χώρες, επιχειρήσεις...) σε κάποια χρονική περίοδο.
 - Χρονολογικές Σειρές (time series): αφορούν την εξέλιξη στο χρόνο συγκεκριμένων μεταβλητών.
 - Δεδομένα Panel (panel data): αφορούν την χρονική εξέλιξη μεταβλητών από διαφορετικές οικονομικές μονάδες.

[Χρονολογικές Σειρές]

- Τα δεδομένα είναι μία σειρά από παρατηρήσεις που συλλέγονται σε τακτικά χρονικά διαστήματα. Τέτοια δεδομένα είναι πολύ συχνά:
 - Στα οικονομικά (ανεργία ,πληθωρισμός)
 - Περιβαλλοντικά οικονομικά (βροχόπτωση, πληθυσμοί σπάνιων ειδών)
 - Χρηματοοικονομικά (τιμές μετοχών, ισοτιμίες)
 - Ιατρική (εγκεφαλική λειτουργία ανά sec)

[Στοχαστική ανάλυση Χρονολογικών Σειρών]

- Στόχος της στοχαστικής ανάλυσης των χρονολογικών σειρών είναι η μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας διαμόρφωσης των δεδομένων (data generating process) και η διενέργεια προβλέψεων.

Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών

- Οι βασικές κατηγορίες υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών είναι οι ακόλουθες:
 - Υποδείγματα Λευκού Θορύβου (white noise models)
 - Υποδείγματα Τυχαίας Διαδρομής (random walk models)
 - Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα (autoregressive models-AR)
 - Υποδείγματα Κινητών Μέσων (moving average models)
 - Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητών Μέσων (ARMA models)
 - Υποδείγματα Box-Jenkins
 - Vector Autoregression (VAR) Υποδείγματα

Συνιστώσες Χρονολογικής Σειράς

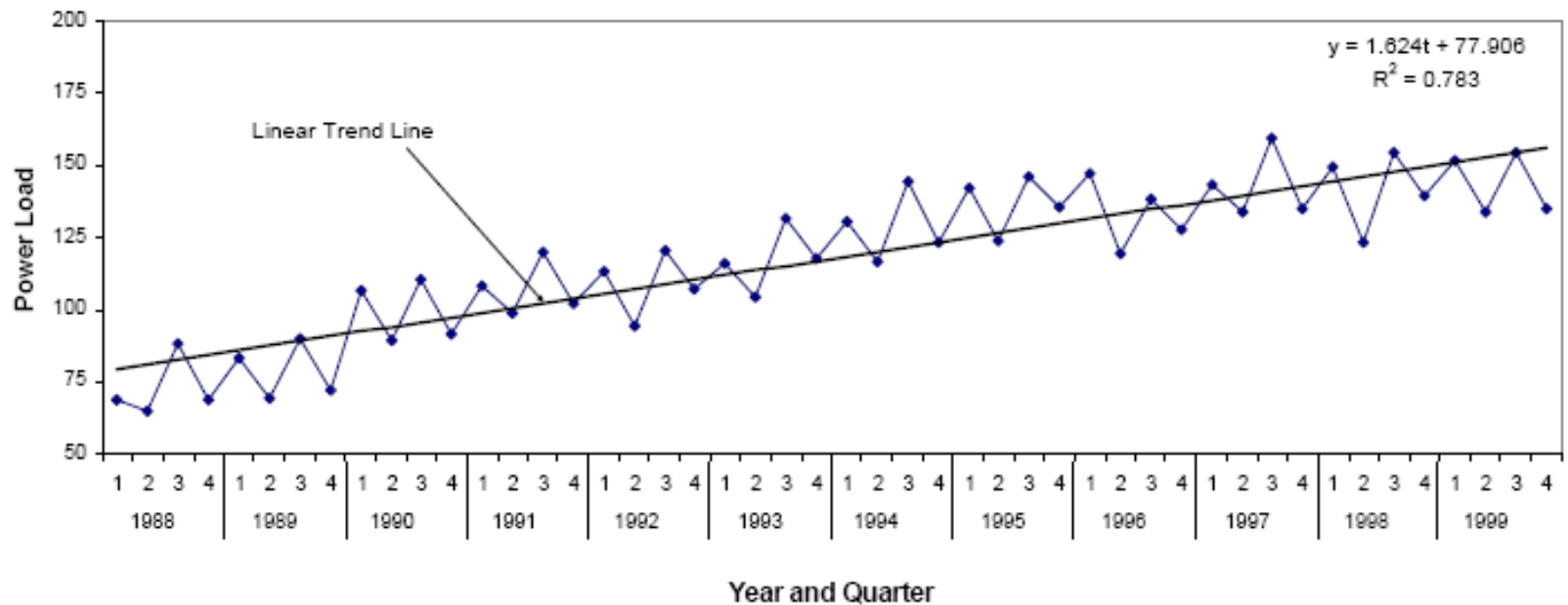
- Μακροχρόνια Τάση (trend)- T_t
 - γραμμική
 - μη-γραμμική
- Κυκλική περιοδικότητα (cyclical variation)- C_t
 - Αυξήσεις και μειώσεις των τιμών της σειράς (αποκλίσεις από την μακροχρόνια τάση της) ανά διαστήματα μεγαλύτερα του έτους.
- Εποχιακή περιοδικότητα (seasonal variation)- S_t
 - Η συμπεριφορά των τιμών της σειράς εναλλάσσεται σε διαστήματα μικρότερα του έτους (βδομάδα, μήνας ,τρίμηνο)
- Τυχαία περιοδικότητα (residual variation)- R_t

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + R_t$$

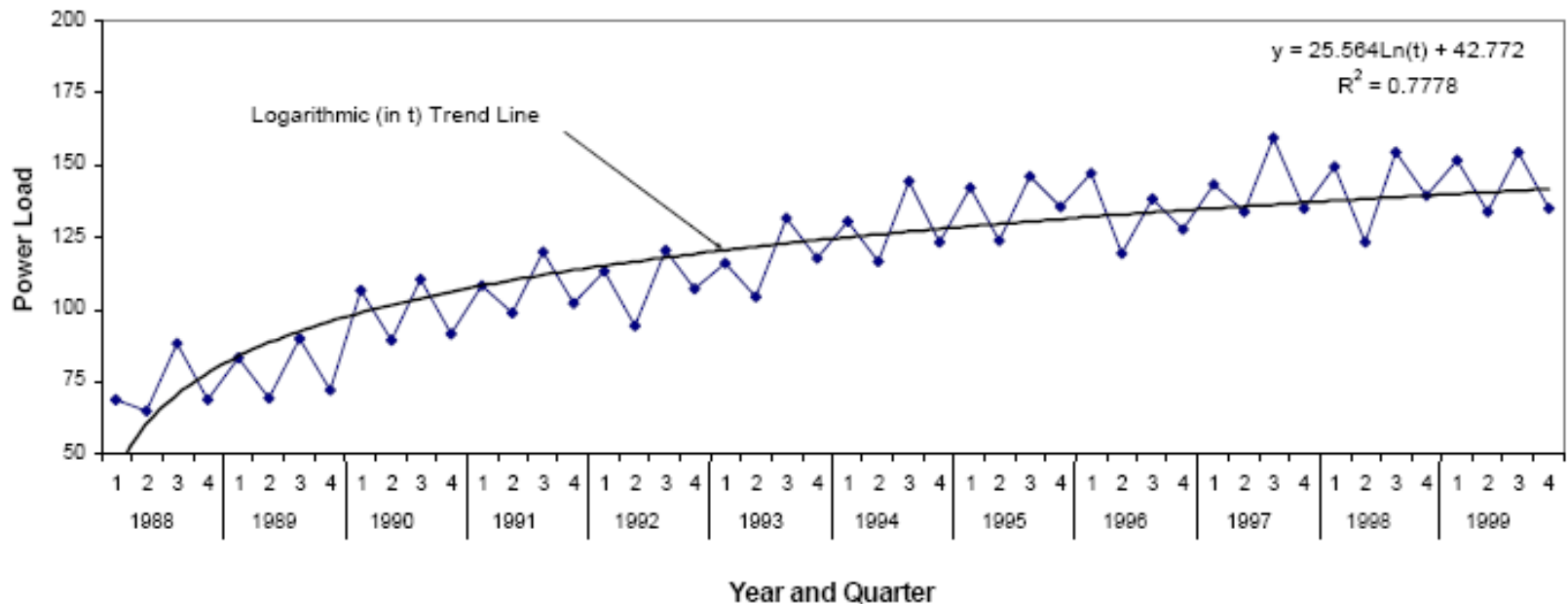
[Μέτρηση Τάσης]

- Τα υποδείγματα μέτρησης της τάσης μίας σειράς έχουν ως εξαρτημένη μεταβλητή τις τιμές της χρονολογικής σειράς και ως ανεξάρτητη μεταβλητή την χρονική περίοδο.
- Οι πιο συνήθεις εξειδικεύσεις είναι οι ακόλουθες:
 - Γραμμική τάση $Y_t = a + b t + e_t$
 - Λογαριθμική Τάση $Y_t = a + b \ln(t) + e_t$
 - Εκθετική Τάση $Y_t = \exp\{a + b t + e_t\}$
 - Πολυωνυμική Τάση $Y_t = a + b_1 t + b_2 t^2 + e_t$

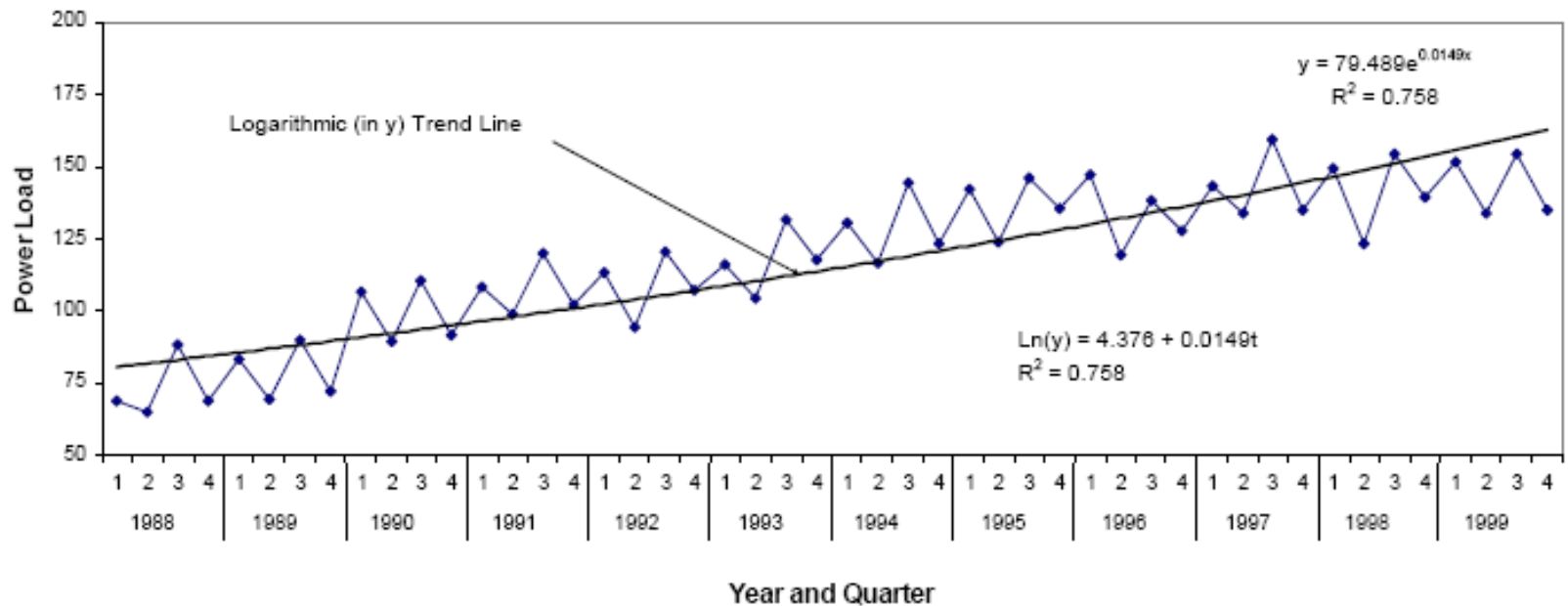
Χρονολογική σειρά με γραμμική τάση



Χρονολογική σειρά με λογαριθμική τάση



Χρονολογική σειρά με εκθετική τάση

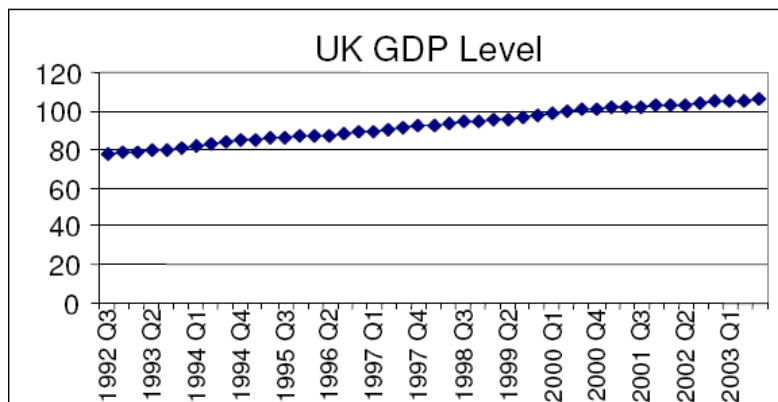


[Στασιμότητα (stationarity)]

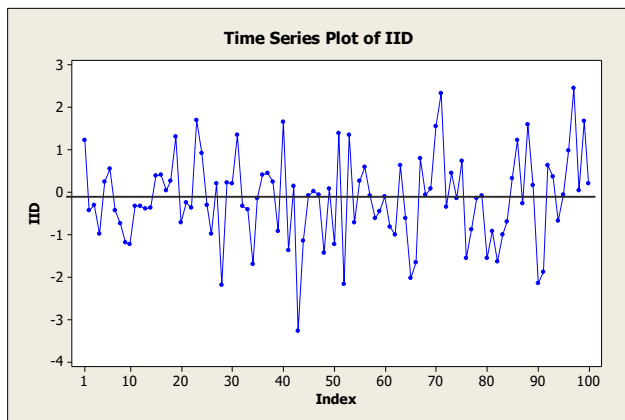
- Μία στοχαστική διαδικασία ονομάζεται στάσιμη αν ο μέσος και η διακύμανσή της δεν μεταβάλλονται διαχρονικά και η συνδιακύμανση των τιμών της σε δύο χρονικές περιόδους εξαρτάται μόνο από τις χρονικές υστερήσεις και όχι από καθαυτό το χρονικό σημείο στο οποίο υπολογίζεται (δεύτερης τάξης στασιμότητα).
- Συνεπώς για μία στάσιμη χρονολογική σειρά ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
 - Μέσος: $E(Y_t) = \mu$
 - Διακύμανση: $\text{var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$
 - Συνδιακύμανση: $\gamma_\kappa = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+\kappa} - \mu)]$

Όπου γ_κ η συνδιακύμανση σε κ χρονικές υστερήσεις δηλαδή η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών Y_t και $Y_{t+\kappa}$

[Παραδείγματα]



(α) μη στάσιμη
χρονολογική σειρά



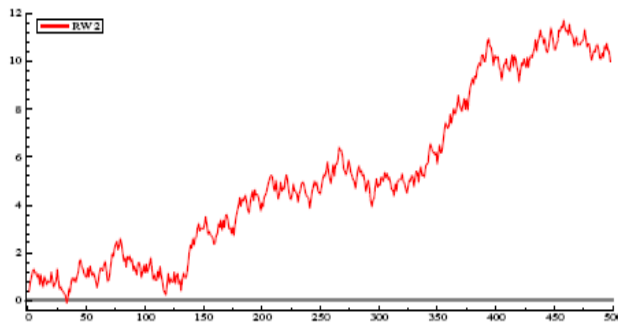
(β) στάσιμη
χρονολογική σειρά

[Έλεγχος Στασιμότητας]

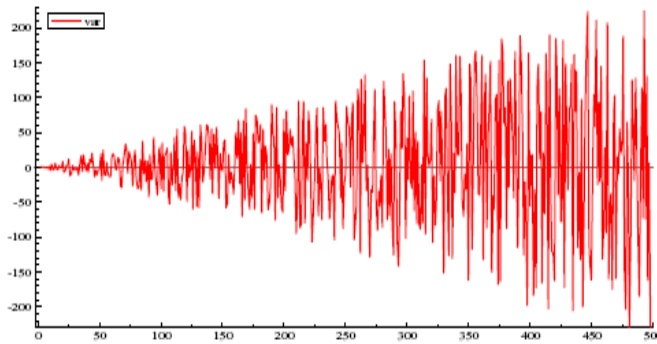
- Μπορούμε να ελέγξουμε την στασιμότητα μίας χρονολογικής σειρά:
 - Μελετώντας την **γραφική απεικόνιση** της σειράς
 - Κατασκευάζοντας και μελετώντας την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το αντίστοιχο **κορρελόγραμμα** της
 - Πραγματοποιώντας έλεγχο για μοναδιαία ρίζα (**Dickey-Fuller tests**)
 - Πραγματοποιώντας στατιστικούς ελέγχους για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης (**Q statistic**)

Γραφική απεικόνιση: Μη-στάσιμη χρονολογική σειρά

(a) Constant mean?



(b) Constant variance?



- Ο έλεγχος μπορεί να βασιστεί στην γραφική απεικόνιση της σειράς. Παρατηρούμε ότι τόσο ο μέσος όσο και η διακύμανση δεν είναι σταθεροί στο χρόνο.

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function-ACF)

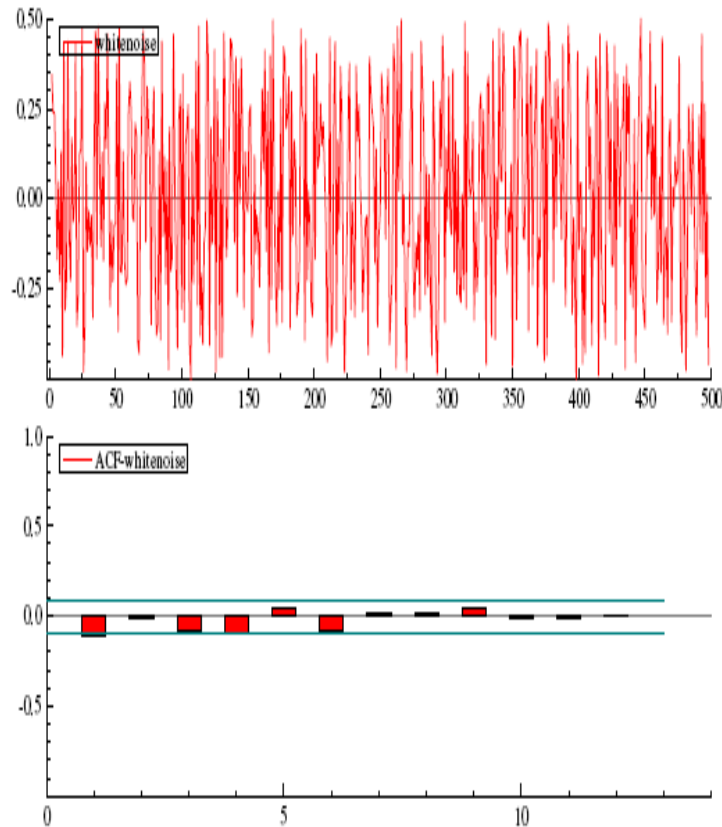
- Η αυτοσυνδιακύμανση μεταξύ δύο παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς Y_t που απέχουν μεταξύ τους s χρονικές περιόδους ορίζεται ως:

$$\rho_s = \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t) \times \text{Var}(Y_{t-s})}}$$

Ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του δείγματος είναι η ακόλουθη:

$$r_s = \frac{\sum_{t=s}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Κορελόγραμμα στάσιμης σειράς



- Η σειρά χαρακτηρίζεται ως στάσιμη αν οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν γεωμετρικά και προσεγγίζουν το μηδέν καθώς οι χρονικές υστερήσεις προσεγγίζουν το άπειρο.

Ελεγχος μοναδιαίας ρίζας Dickey-Fuller Test

- Θεωρούμε το παρακάτω υπόδειγμα:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + u_t$$

Και παίρνοντας πρώτες διαφορές...

$$Y_t - Y_{t-1} = (\alpha - 1)Y_{t-1} + u_t$$

Το κριτήριο των Dickey-Fuller βασίζεται στον ακόλουθο έλεγχο:

$H_0 : \alpha = 1$ Η H_0 γίνεται δεκτή αν η t στατιστική του συντελεστή α είναι μικρότερη από την t στατιστική των Dickey-Fuller.
 $H_1 : \alpha < 1$ Τότε συμπεραίνουμε ότι έχουμε μοναδιαία ρίζα και άρα η σειρά ΔΕΝ είναι στάσιμη.

Box-Pierce Q statistic

- Η στατιστική αυτή χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της συνδυαστικής υπόθεσης ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν και ορίζεται ως εξής:

$$Q = N \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2$$

Όπου: N το μέγεθος του δείγματος και

k το βάθος των χρονικών υστερήσεων.

Αν τιμή της στατιστικής που υπολογίζουμε είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή της χ^2 για κάποιο βαθμό στατιστικής σημαντικότητας τότε η μηδενική υπόθεση ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν απορρίπτεται- η σειρά ΔΕΝ είναι στάσιμη.

Νόθα αποτελέσματα-spurious regression

- Ο έλεγχος στασιμότητας είναι απαραίτητος ώστε η στοχαστική ανάλυση να οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα. Αν η σειρά δεν είναι στάσιμη μπορεί καταλήξουμε στο πρόβλημα γνωστό ως spurious regression.
- Τα δεδομένα χρονολογικών σειρών συχνά περιλαμβάνουν τάση δηλαδή η σειρά εμφανίζει μία σταθερή συμπεριφορά ή κατεύθυνση η διάρκεια της οποίας είναι μεγαλύτερη του έτους.

Αποτέλεσμα...

Χρονοσειρές με όμοια τάση φαίνεται να συσχετίζονται. Το R^2 της αντίστοιχης παλινδρόμησης είναι υψηλό χωρίς να υπάρχει οικονομική ερμηνεία της συσχέτισης. Το φαινόμενο παρατηρείται έντονα όταν παλινδρομούμε μη στάσιμες σειρές. Στην περίπτωση αυτή οι στατιστικοί έλεγχοι με την t και F στατιστική δεν είναι αξιόπιστοι.

[Συνολοκλήρωση (cointegration)]

- Η παλινδρόμηση μη στάσιμων χρονολογικών σειρών μπορεί να οδηγήσει σε στατιστικά αξιόπιστα συμπεράσματα αν οι σειρές είναι συνολοκληρωμένες.
- Ολοκλήρωση: η μετατροπή μίας μη-στάσιμης σειράς σε στάσιμη επιτυγχάνεται αν εκφράσουμε την σειρά σε διαφορές. Αν η σειρά πρέπει να εκφραστεί d φορές σε διαφορές για να γίνει στάσιμη λέμε ότι είναι ολοκληρωμένη σε d βαθμό και συμβολίζεται: $Y_t \rightarrow I(d)$

Μία στάσιμη σειρά είναι $I(0)$

[Συνολοκλήρωση (cointegration)]

Αν σε ένα οικονομετρικό υπόδειγμα υπάρχουν δύο χρονολογικές σειρές ολοκληρωμένες με βαθμό ολοκλήρωσης 1, δηλαδή: $Y_t \rightarrow I(1)$ και $X_t \rightarrow I(1)$

Τότε οι χρονολογικές σειρές είναι συνολοκληρωμένες αν τα κατάλοιπα από την παλινδρόμηση της μίας στην άλλη είναι στάσιμα δηλαδή αν:

$$e_t \rightarrow I(0)$$

Ο έλεγχος για συνολοκλήρωση βασίζεται ακριβώς στην εξέταση της ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας στα κατάλοιπα από την παλινδρόμηση των δύο σειρών (Engle-Granger test)



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Το υπόδειγμα του Λευκού Θορύβου (white noise model)

- Μία χρονοσειρά $\{e_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ονομάζεται λευκός θόρυβος όταν ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις υποθέσεις:

$$\begin{aligned} E(e_t) &= 0 \\ \gamma(0) = E(e_t^2) &= \sigma^2 \\ \gamma(h) = E(e_t e_{t-h}) &= 0 \quad \text{for } h \neq 0 \end{aligned}$$

Ο μέσος και η διακύμανση
είναι σταθεροί

Οι συντελεστές
αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν.

Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα πρώτου βαθμού (AR(1))

$$AR(1): Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Στα Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα πρώτου βαθμού η χρονολογική σειρά παλινδρομείται σε μια χρονική υστέρηση της σειράς.

Ιδιότητες:

$$E[Y_t] = \mu = \frac{\beta_0}{(1 - \beta_1)}$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-s}) = \frac{\beta_1^s \sigma_\varepsilon^2}{1 - \beta_1^2}$$

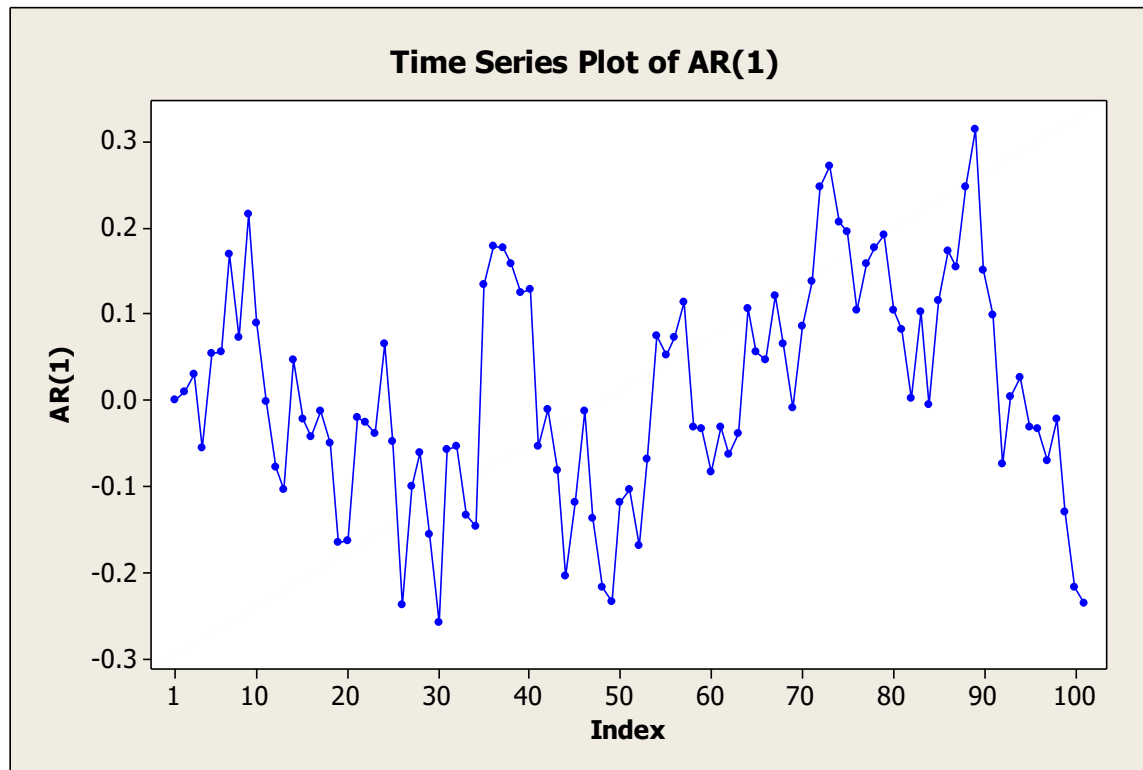
$$Var[Y_t] = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \beta_1^2}$$

$$Corr(Y_t, Y_{t-s}) = \beta_1^s$$

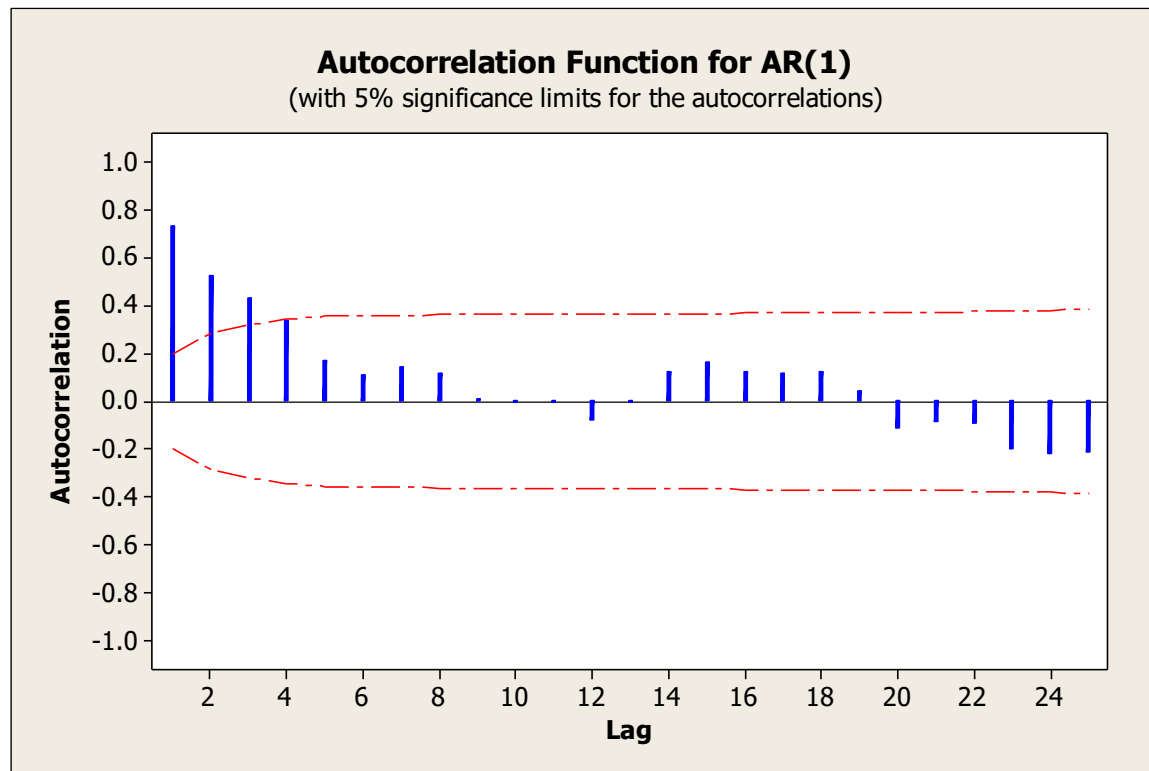
Πρόβλεψη:

$$E[Y_{T+1} | Y_T] = \beta_0 + \beta_1 Y_T + E[\varepsilon_{T+1} | Y_T] = \beta_0 + \beta_1 Y_T$$

Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα πρώτου βαθμού (AR(1))-Γραφική απεικόνιση



[AR(1): Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης]



Υποδείγματα Κινητών Μέσων πρώτου βαθμού (MA(1))

- Έστω $\{e_t\}$ λευκός θόρυβος. Ένα υπόδειγμα κινητών μέσων μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$y_t = \mu + e_t + \theta_1 e_{t-1}$$

Οι τιμές της χρονολογικής σειράς είναι συνάρτηση του διαταραχτικού όρου της τρέχουσας περιόδου και του διαταραχτικού όρου της προηγούμενης περιόδου.

Ιδιότητες:

$$E y_t = E(\mu + e_t + \theta_1 e_{t-1}) = \mu$$

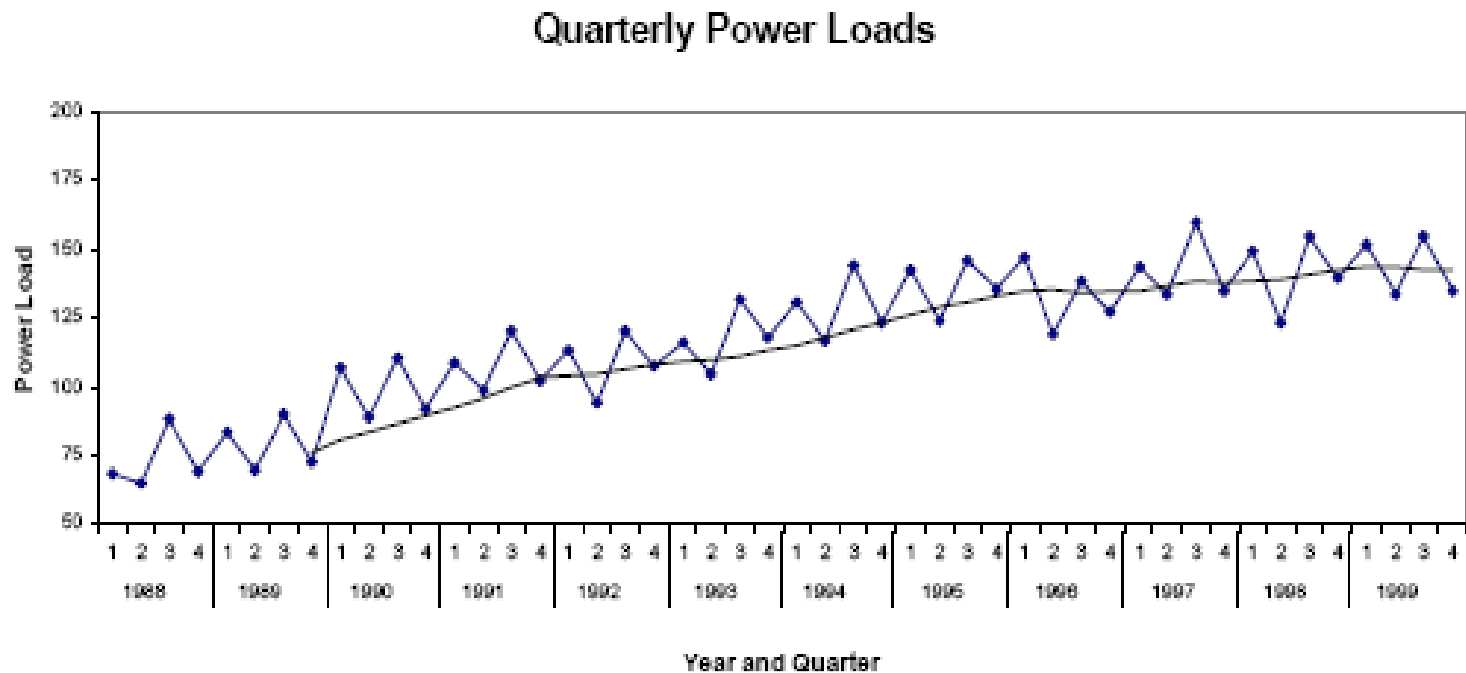
$$Var Y_t = (1 + \theta_1^2) \sigma^2$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = -\theta_1 \sigma^2$$



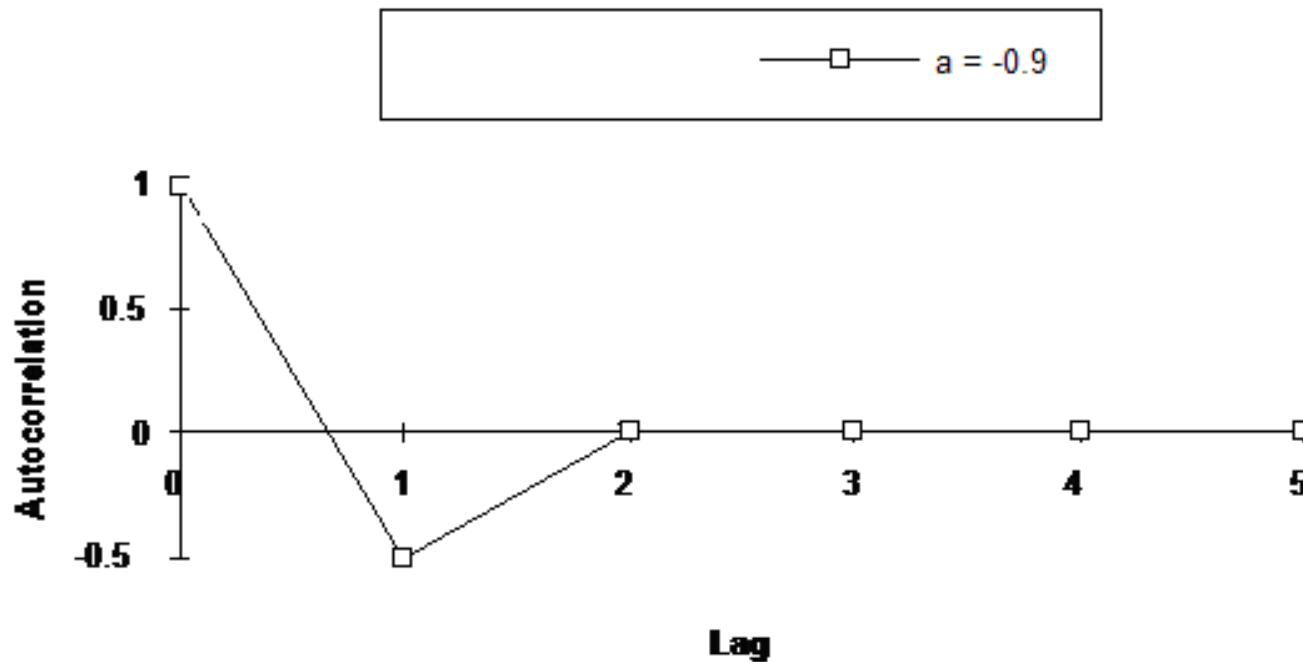
Ενώ όλες οι μεγαλύτερης τάξης συνδιακυμάνσεις ($s > 1$) είναι μηδενικές

Υποδείγματα Κινητών Μέσων πρώτου βαθμού (MA(1))-Γραφική Απεικόνιση



[AM(1): Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης]

**Autocorrelation Functions for MA(1)
Processes**



Το Υπόδειγμα της Τυχαίας Διαδρομής (random walk model)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Το υπόδειγμα της τυχαίας διαδρομής είναι ένα AR(1) model με $\beta_1 = 1$

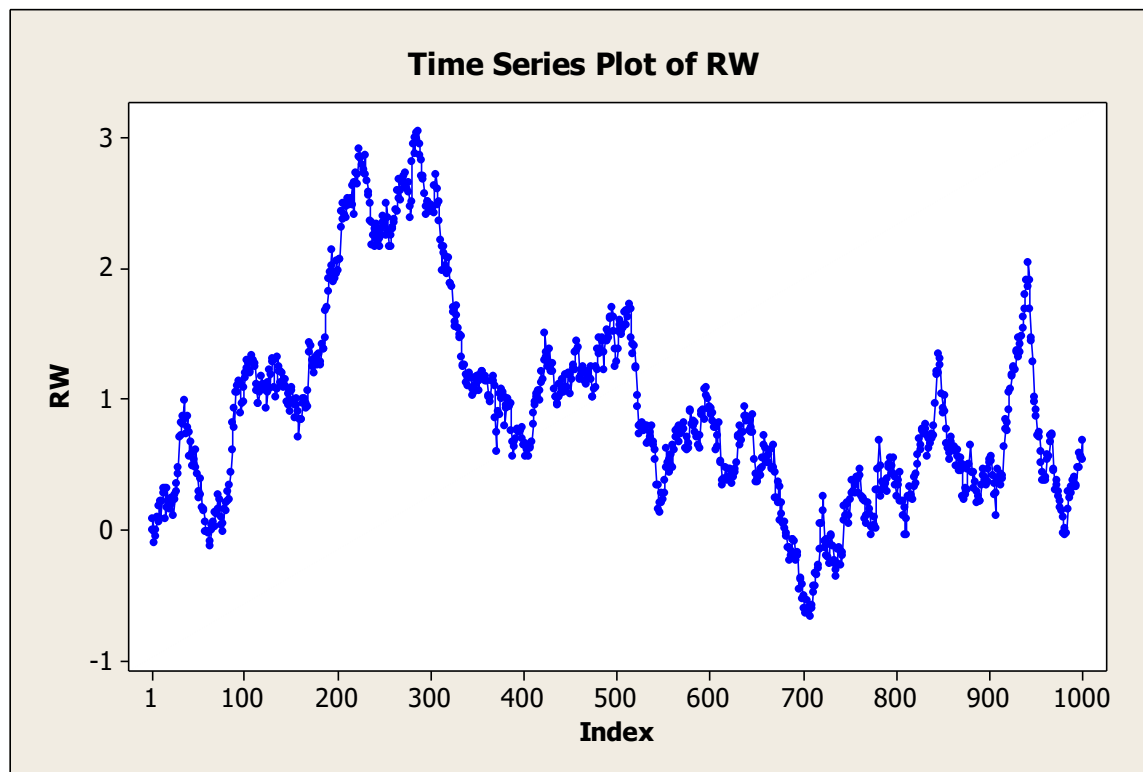
Χαρακτηριστικά:

$$Y_t - Y_{t-1} = Z_t \sim \text{iidN}(\beta_0, \sigma^2)$$

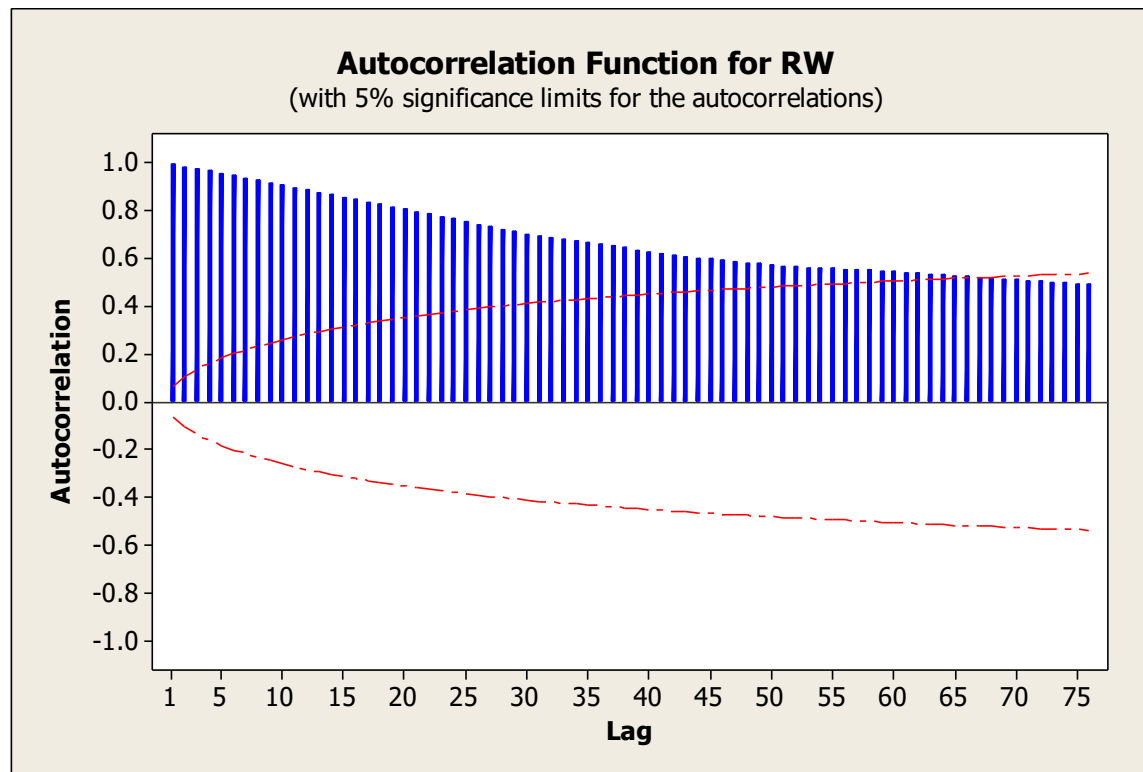
→ Οι τιμές της σειράς συσχετίζονται γραμμικά με τον διαταρακτικό όρο που είναι λευκός θόρυβος

Η διακύμανση της χρονολογικής σειράς δεν είναι σταθερή αλλά συνάρτηση του χρόνου → η σειρά ΔΕΝ είναι στάσιμη.

Το Υπόδειγμα της Τυχαίας Διαδρομής-Γραφική απεικόνιση



Το Υπόδειγμα της Τυχαίας Διαδρομής :Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης



[Το ARMA Υπόδειγμα]

Ο συνδυασμός ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος AR(p) με ένα υπόδειγμα κινητών μέσων MA(q) μας δίνει το ARMA υπόδειγμα που στην γενική μορφή του γράφεται ως:

ARMA(p,q):

$$Y_t = c + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + e_t + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \dots + b_q e_{t-q}$$

Η απλούστερη μορφή του είναι το ARMA πρώτου βαθμού:

ARMA(1,1):

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

[Στασιμότητα]

- Η χρονολογική σειρά που ακολουθεί ένα MA υπόδειγμα είναι πάντα στάσιμη.
- Για να είναι στάσιμη μία χρονολογική σειρά που ακολουθεί ένα υπόδειγμα AR(1) πρέπει:

$$|\beta_1| < 1$$

- Για να είναι στάσιμη μία χρονολογική σειρά που ακολουθεί ένα υπόδειγμα ARMA(1,1) πρέπει:

$$|\beta_1| < 1$$

και

$$|\theta_1| < 1$$

- Αν η σειρά ακολουθεί τυχαία διαδρομή δεν είναι στάσιμη.

Υποδείγματα Συστημάτων Vector Autoregressive Model: VAR

- Θεωρούνται μία γενίκευση των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων που προτάθηκαν από τον Sims (1980).
- Ένα υπόδειγμα VAR είναι ένα μοντέλο παλινδρόμησης ενός συστήματος εξισώσεων στο οποίο υπάρχουν μόνο ενδογενείς μεταβλητές. Όλες οι ενδογενείς μεταβλητές ερμηνεύονται από χρονικές υστερήσεις των ίδιων καθώς και τον υπόλοιπων ενδογενών μεταβλητών.
- Η απλούστερη περίπτωση περιλαμβάνει ένα σύστημα δύο εξισώσεων:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{11}y_{1t-1} + \alpha_{11}y_{2t-1} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{21}y_{2t-1} + \alpha_{21}y_{1t-1} + u_{2t}\end{aligned}$$

$$\text{Ή...} \quad \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \alpha_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

Το υπόδειγμα μπορεί να εκτιμηθεί με OLS. Η εκτίμηση δίνει συνεπείς και αποτελεσματικούς εκτιμητές των συντελεστών του συστήματος.

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των υποδειγμάτων VAR

■ Πλεονεκτήματα:

- Δεν χρειάζεται να καθοριστεί ποιες από τις μεταβλητές είναι ενδογενείς και ποιες εξωγενείς-ΟΛΕΣ οι μεταβλητές είναι ενδογενείς.
- Είναι απλά στην εκτίμηση καθώς μπορούν να εκτιμηθούν εφαρμόζοντας OLS σε κάθε εξίσωση ξεχωριστά.
- Επιτρέπουν στις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής να εξαρτώνται όχι μόνο από τις χρονικές υστερήσεις της ίδιας αλλά και άλλων μεταβλητών, άρα γενικότερα από τα ARMA υποδείγματα.
- Οι προβλέψεις με τα υποδείγματα VAR είναι καλύτερες εκείνων που παίρνουμε από τα συστήματα εξισώσεων.

■ Μειονεκτήματα:

- Είναι θεωρητικά αθεμελίωτα μοντέλα (VAR's are a-theoretical)
- Από οικονομικής πλευράς είναι δύσκολο να ερμηνευτούν οι συντελεστές του υποδείγματος → εκτιμάται η λεγόμενη impulse response function.
- Πόσες χρονικές υστερήσεις?
- Μεγάλος αριθμός συντελεστών για εκτίμηση
- Το υπόδειγμα προϋποθέτει στάσιμες χρονολογικές σειρές. Η διαδικασία μετατροπής είναι πολύπλοκη.

[Η μέθοδος Box-Jenkins (BJ)]

Η μέθοδος εφαρμόζεται όταν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη και περιλαμβάνει 4 στάδια ανάλυσης:

- Ταυτοποίηση (Identification)
- Εκτίμηση (Estimation)
- Διαγνωστικός έλεγχος (Diagnostic checking)
- Πρόβλεψη (Forecasting)

Αρχικά ελέγχεται η στασιμότητα της σειράς και η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας και στην συνέχεια εκτιμάται ένα μοντέλο ARIMA ακολουθώντας τις παρακάτω δυο αρχές:

- parsimony (do not overfit)
- goodness of fit (based on information criteria)



[Το Αυτοπαλίνδρομο Ολοκληρωμένο Υπόδειγμα Κινητών Μέσων (ARIMA)

Ας υποθέσουμε ότι μία χρονολογική σειρά ακολουθεί την ARMA(1,1) διαδικασία.

Αν η σειρά δεν είναι στάσιμη, μπορεί να γίνει αν εκφραστεί σε πρώτες διαφορές. Αν μετά από αυτό το μετασχηματισμό η σειρά είναι στάσιμη τότε το μετασχηματισμένο υπόδειγμα ονομάζεται Αυτοπαλίνδρομο Ολοκληρωμένο Υπόδειγμα Κινητών Μέσων πρώτης τάξης (ARIMA(1,1,1))

$$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_0 + \varphi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$