

Λύσεις Προβλημάτων Τελικής Εξέτασης ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ Ιουνίου 2005

Ιωάννης Παραβάντης

Θέμα 1

Σας δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Επιλύστε το πρόβλημα με την γραφική μέθοδο. Να φαίνονται καθαρά η γραφική παράσταση, οι όποιοι υπολογισμοί και να επισημαίνεται ποια ευθεία αντιστοιχεί σε ποιον περιορισμό.

Λύση

Η γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού εξηγείται σε φυλλάδιο PDF στη σελίδα του μαθήματος <http://paravantis.unipi.gr/or.html>.

Θέμα 2

Μια εταιρεία παραγωγής λογισμικού διαθέτει τρεις προγραμματιστές (Άκης, Μήτσος και Σούλα) που επιθυμεί να αναλάβουν την υλοποίηση ισάριθμων έργων (Α, Β και Γ) ώστε τα έργα να ολοκληρωθούν στο μικρότερο δυνατό διάστημα. Λόγω της διαφορετικής εμπειρίας αλλά και των διαφορετικών ικανοτήτων των τριών αυτών προγραμματιστών καθώς και της διαφορετικής φύσης του κάθε έργου, οι εκτιμώμενοι χρόνοι ολοκλήρωσης του κάθε έργου (σε ημέρες) σε περίπτωση που το αναλάβει ο κάθε προγραμματιστής έχουν ως ακολούθως:

Προγραμματιστής	Έργο		
	Α	Β	Γ
Άκης	10	15	9
Μήτσος	9	18	5
Σούλα	6	14	3

Σημειωτέον ότι μόνο ένας προγραμματιστής μπορεί να αναλάβει το κάθε έργο.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ώστε να μπορεί κανείς επιλύοντας το πρόβλημα να λάβει την βέλτιστη κατανομή των τριών προγραμματιστών στα τρία έργα (δεν απαιτείται να λύσετε το πρόβλημα, απλά να γράψετε την μαθηματική του διατύπωση). Οποσδήποτε να ορίζονται με σαφήνεια οι μεταβλητές απόφασης (και να δηλώνεται εάν κάποιες από αυτές είναι ακέραιες ή δυαδικές), να φαίνεται καθαρά η αντικειμενική συνάρτηση (και το είδος του προβλήματος) και να είναι γραμμένοι με πληρότητα όλοι οι περιορισμοί.

Λύση

Στην ουσία, το πρόβλημα αυτό είναι πρόβλημα ανάθεσης (assignment problem).

Όπως πολύ σωστά ενεργήσαν ορισμένοι διαβασμένοι φοιτητές στην εξέταση του Ιουνίου 2005, μπορείτε να σκεφτείτε το πρόβλημα αυτό και σαν πρόβλημα δικτύου και να σχεδιάσετε γράφημα που να συνδέει τους τρεις προγραμματιστές με τα τρία έργα. Ένα τέτοιο γράφημα θα σας θύμιζε ότι ένα πρόβλημα ανάθεσης είναι ειδική περίπτωση ενός προβλήματος μεταφοράς (transportation problem).

Όπως και στην περίπτωση ενός προβλήματος μεταφοράς, ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν στον προγραμματιστή } i \text{ ανατεθεί το έργο } j \\ 0 & \text{σε αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

όπου $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Δηλαδή στο πρόβλημα αυτό οι μεταβλητές απόφασης είναι ακέραιες και μάλιστα δυαδικές (binary)!

Όταν οριστούν με αυτό τον τρόπο οι μεταβλητές απόφασης, ο ορισμός του προβλήματος καθίσταται μάλλον προφανής. Αρκεί να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{μέρες που απαιτούνται για την εργασία του Άκη} &= 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} \\ \text{μέρες που απαιτούνται για την εργασία του Μήτσου} &= 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} \\ \text{μέρες που απαιτούνται για την εργασία της Σούλας} &= 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33} \end{aligned}$$

Προφανώς το άθροισμα των ημερών που θα απαιτηθούν για την ολοκλήρωση του έργου των τριών προγραμματιστών αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

Οι περιορισμοί ανήκουν σε δυο ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιορισμών ορίζει ότι κάθε προγραμματιστής μπορεί να αναλάβει μόνο ένα έργο:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 & (\text{Άκης}) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 & (\text{Μήτσος}) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1 & (\text{Σούλα}) \end{aligned}$$

Προσέξτε πως με τους ανωτέρω “πονηρούς” περιορισμούς εξασφαλίζεται το ζητούμενο, δεδομένου ότι, εφόσον η κάθε μεταβλητή απόφασης x_{ij} μπορεί να είναι μόνο μηδέν ή ένα, μόνο μια μεταβλητή επιτρέπεται να πάρει την τιμή ένα σε κάθε περιορισμό!

Τώρα μπορεί να σκεφτείτε “τι θα γίνει όμως εάν όλα τα x_{ij} στους ανωτέρω περιορισμούς γίνουν μηδέν;” Ερχόμαστε λοιπόν στην δεύτερη ομάδα περιορισμών, που ορίζει ότι το κάθε έργο πρέπει να αναληφθεί από ένα μόνο προγραμματιστή:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 & (\text{έργο Α}) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 & (\text{έργο Β}) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 & (\text{έργο Γ}) \end{aligned}$$

Προσέξτε πως οι τρεις αυτοί περιορισμοί της δεύτερης ομάδας εξασφαλίζουν ότι οποσδήποτε ένα από τα x_{ij} του κάθε περιορισμού θα είναι μονάδα!

Ολοκληρώσαμε τον ορισμό του προβλήματος και τον παρουσιάζουμε κατωτέρω ολόκληρο:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33} \\
 \text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\
 & x_{ij} \geq 0 \text{ για } i = 1, 2, 3 \text{ και } j = 1, 2, 3 \quad (\text{nonnegativity})
 \end{aligned}$$

Θέμα 3

Μια επιχείρηση υγρών διαλυτών για πλακέτες υπολογιστών παράγει δυο προϊόντα, την κανονική και την ενισχυμένη φόρμουλα. Για την παραγωγή αυτών των δυο προϊόντων αναμιγνύει τρεις πρώτες ύλες (χημικές ουσίες). Η επιχείρηση επιθυμεί να προσδιορίσει τον βέλτιστο τρόπο ανάμιξης των τριών αυτών πρώτων υλών (και παραγωγής των δυο διαλυτών) ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδα της από πωλήσεις για χρονική περίοδο ενός έτους.

Ο μεν κανονικός διαλύτης πωλείται στην αγορά για 1 ευρώ ανά λίτρο (€/L) ο δε ενισχυμένος για 1.08 €/L. Βάσει των υποχρεώσεων της στους προμηθευτές της, η επιχείρηση πρέπει στο εξεταζόμενο διάστημα του ενός έτους να παράγει τουλάχιστον 10000 λίτρα κανονικού διαλύτη (δεν υπάρχει ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα του ενισχυμένου διαλύτη).

Διατίθενται οι ακόλουθες (μέγιστες) ποσότητες των τριών πρώτων υλών (για ένα έτος):

Πρώτη ύλη	Κόστος (€/L)	Διαθέσιμη ποσότητα (L)
A	0.50	5000
B	0.60	10000
Γ	0.84	10000

Οι προδιαγραφές για την παραγωγή των δυο διαλυτών έχουν ως ακολούθως:

Είδος διαλύτη	Προδιαγραφές περιεκτικότητας
κανονικός	όχι πάνω από 30% της πρώτης ύλης A
	τουλάχιστον 40% της πρώτης ύλης B
	όχι πάνω από 20% της πρώτης ύλης Γ
ενισχυμένος	τουλάχιστον 25% της πρώτης ύλης A
	όχι πάνω από 40% της πρώτης ύλης B
	τουλάχιστον 30% της πρώτης ύλης Γ

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, η επίλυση του οποίου θα έδινε τις ποσότητες πρώτων υλών και προϊόντων που μεγιστοποιούν τα έσοδα της επιχείρησης από πωλήσεις (δεν απαιτείται να λύσετε το πρόβλημα, απλά να γράψετε την μαθηματική του διατύπωση). Οπωσδήποτε να

ορίζονται με σαφήνεια οι μεταβλητές απόφασης (και να δηλώνεται εάν κάποιες από αυτές είναι ακέραιες ή δυαδικές), να φαίνεται καθαρά η αντικειμενική συνάρτηση (και το είδος του προβλήματος) και να είναι γραμμένοι με πληρότητα όλοι οι περιορισμοί.

Λύση

Καταρχήν ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης (decision variables) ως εξής:

x_{ij} : ποσότητα πρώτης ύλης i που θα χρησιμοποιηθεί για την παρασκευή του διαλύτη j

όπου $i = 1, 2, 3$ (για κάθε μια από τις 3 πρώτες ύλες) και $j = r, p$ (r συμβολίζει τον κανονικό [regular] και p τον ενισχυμένο [premium] διαλύτη).

Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες 6 μεταβλητές απόφασης:

x_{1r} : ποσότητα πρώτης ύλης 1 στον κανονικό διαλύτη

x_{2r} : ποσότητα πρώτης ύλης 2 στον κανονικό διαλύτη

x_{3r} : ποσότητα πρώτης ύλης 3 στον κανονικό διαλύτη

x_{1p} : ποσότητα πρώτης ύλης 1 στον ενισχυμένο διαλύτη

x_{2p} : ποσότητα πρώτης ύλης 2 στον ενισχυμένο διαλύτη

x_{3p} : ποσότητα πρώτης ύλης 3 στον ενισχυμένο διαλύτη

Για να μπορείτε εύκολα να ορίζετε τις μεταβλητές σε τέτοιου είδους προβλήματα (που αποκαλούνται προβλήματα ανάμιξης ή blending problems) μπορείτε να σχηματίζετε τον ακόλουθο εποπτικό πίνακα και απλά να γράφετε τις μεταβλητές στα αντίστοιχα κουτάκια:

		Διαλύτης	
		κανονικός	ενισχυμένος
		r	p
Πρώτη ύλη	1	x_{1r}	x_{1p}
	2	x_{2r}	x_{2p}
	3	x_{3r}	x_{3p}

Οι συνολικές ποσότητες του κάθε είδους διαλύτη που παράγονται είναι

$$\text{κανονικός διαλύτης} = x_{1r} + x_{2r} + x_{3r}$$

$$\text{ενισχυμένος διαλύτης} = x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}$$

και οι συνολικές ποσότητες πρώτων υλών που απαιτούνται είναι

$$\text{πρώτη ύλη 1} = x_{1r} + x_{1p}$$

$$\text{πρώτη ύλη 2} = x_{2r} + x_{2p}$$

$$\text{πρώτη ύλη 3} = x_{3r} + x_{3p}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (objective function) είναι η μεγιστοποίηση των ποσού που προκύπτει όταν από τα έσοδα της πώλησης των διαλυτών αφαιρέσουμε τα κόστος των πρώτων υλών (σύμφωνα και με την προφορική υπόδειξη του διδάσκοντα που έγινε κατά την διάρκεια της τελικής εξέτασης):

$$\begin{aligned} \max \quad & 1.00(x_{1r} + x_{2r} + x_{3r}) + 1.08(x_{1p} + x_{2p} + x_{3p}) \\ & - 0.50(x_{1r} + x_{1p}) - 0.60(x_{2r} + x_{2p}) - 0.84(x_{3r} + x_{3p}) \end{aligned}$$

που μετά τις πράξεις γίνεται

$$\max \quad 0.5x_{1r} + 0.4x_{2r} + 0.16x_{3r} + 0.58x_{1p} + 0.48x_{2p} + 0.24x_{3p}$$

Περνάμε τώρα στους περιορισμούς (constraints). Όσον αφορά τις διαθέσιμες ποσότητες των πρώτων υλών έχουμε τους ακόλουθους τρεις περιορισμούς:

$$\begin{aligned}x_{1r} + x_{1p} &\leq 5000 \\x_{2r} + x_{2p} &\leq 10000 \\x_{3r} + x_{3p} &\leq 10000\end{aligned}$$

Τώρα χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή για να γράψουμε τους περιορισμούς που εξασφαλίζουν ότι τηρούνται οι προδιαγραφές για την παρασκευή των δυο ειδών διαλύτη. Ο πρώτος περιορισμός ορίζει ότι ο κανονικός διαλύτης δεν μπορεί να περιέχει πάνω από 30% της πρώτης ύλης Α:

$$x_{1r} \leq 0.30 (x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$$

που μετά από πράξεις για να φέρουμε όλες τις μεταβλητές στο αριστερό σκέλος γίνεται

$$0.70 x_{1r} - 0.30 x_{2r} - 0.30 x_{3r} \leq 0$$

Ο δεύτερος περιορισμός ορίζει:

$$x_{2r} \geq 0.40 (x_{1r} + x_{2r} + x_{3r})$$

$$\Rightarrow -0.40 x_{1r} + 0.60 x_{2r} - 0.40 x_{3r} \geq 0$$

Ομοίως γράφουμε για τους λοιπούς 4 περιορισμούς:

$$-0.20 x_{1r} - 0.20 x_{2r} + 0.80 x_{3r} \leq 0$$

$$0.75 x_{1p} - 0.25 x_{2p} - 0.25 x_{3p} \geq 0$$

$$-0.40 x_{1p} + 0.60 x_{2p} - 0.40 x_{3p} \leq 0$$

$$-0.30 x_{1p} - 0.30 x_{2p} + 0.70 x_{3p} \geq 0$$

Τέλος γράφουμε τον περιορισμό για την ελάχιστη ποσότητα των 10000 λίτρων κανονικού διαλύτη που πρέπει να παράγονται ετησίως:

$$x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \geq 10000$$

Τελειώσαμε!

Ανακεφαλαιώνοντας, ο πλήρης ορισμός του προβλήματος αυτού έχει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\max \quad & 0.5 x_{1r} + 0.4 x_{2r} + 0.16 x_{3r} + 0.58 x_{1p} + 0.48 x_{2p} + 0.24 x_{3p} \\ \text{s.t.} \quad & x_{1r} + x_{1p} \leq 5000 \\ & x_{2r} + x_{2p} \leq 10000 \\ & x_{3r} + x_{3p} \leq 10000 \\ & 0.70 x_{1r} - 0.30 x_{2r} - 0.30 x_{3r} \leq 0 \\ & -0.40 x_{1r} + 0.60 x_{2r} - 0.40 x_{3r} \geq 0 \\ & -0.20 x_{1r} - 0.20 x_{2r} + 0.80 x_{3r} \leq 0 \\ & 0.75 x_{1p} - 0.25 x_{2p} - 0.25 x_{3p} \geq 0 \\ & -0.40 x_{1p} + 0.60 x_{2p} - 0.40 x_{3p} \leq 0 \\ & -0.30 x_{1p} - 0.30 x_{2p} + 0.70 x_{3p} \geq 0 \\ & x_{1r} + x_{2r} + x_{3r} \geq 10000 \\ & x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}, x_{1p}, x_{2p}, x_{3p} \geq 0 \quad (\text{nonnegativity})\end{aligned}$$

Θέμα 4

Σε μια ομάδα μεταπτυχιακών φοιτητών έχει ανατεθεί η οργάνωση ενός συνεδρίου. Σπασίγκλες από την φύση τους, οι φοιτητές αποφασίζουν να χωρίσουν το έργο σε

μεμονωμένες δραστηριότητες και να το λύσουν σαν πρόβλημα διαχείρισης έργου. Οι δραστηριότητες έχουν ως ακολούθως:

Δραστηριότητα	Περιγραφή	Προηγούμενες δραστηριότητες	Χρόνος		
			a	m	b
A	Σχεδίαση	–	1.5	2	2.5
B	Πρόσκληση ομιλητών	A	2	2.5	6
C	Απαιτούμενοι χώροι	–	1	2	3
D	Επιλογή αιθουσών	C	1.5	2	2.5
E	Εισιτήρια ομιλητών	B, D	0.5	1	1.5
F	Κρατήσεις ομιλητών	E	1	2	3
G	Μπροσούρα	B, D	3	3.5	7
H	Διανυκτερεύσεις	G	3	4	5
I	Εκκρεμότητες	F, H	1.5	2	2.5

όπου οι χρόνοι είναι σε εβδομάδες και τα a , m και b συμβολίζουν τον ελάχιστο, πιθανότερο και μέγιστο χρόνο κάθε δραστηριότητας αντίστοιχα.

1. Σχεδιάστε το γράφημα του αντίστοιχου δικτύου.
2. Επιλύστε το δίκτυο με τη μέθοδο PERT, προσδιορίστε την κρίσιμη διαδρομή και υπολογίστε τον χρόνο ολοκλήρωσης του έργου.
3. Εκτιμήστε διάστημα εμπιστοσύνης 95% για τον χρόνο ολοκλήρωσης του έργου.

Λύση

Λύνεται με τη βοήθεια του προγράμματος CPM/PERT (γραμμένο από τον διδάσκοντα σε Visual Basic) που ευρίσκεται στη σελίδα του μαθήματος <http://paravantis.unipi.gr/or.html>.