

Κεφάλαιο 1

Ασφάλιση Ιδιοκτησίας και Ευθύνης

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανασκόπηση των κυριότερων καλύψεων που εμπεριέχονται στην ασφάλιση ιδιοκτησίας και ευθύνης (property & liability insurance). Σκοπός μας δεν είναι να δώσουμε λεπτομερή περιγραφή των ασφαλιστηρίων συμβολαίων διαφόρων καλύψεων ασφάλισης ιδιοκτησίας και ευθύνης, αλλά να παρουσιάσουμε μια γενική εικόνα ασφάλισης ιδιοκτησίας και ευθύνης, όπως υπάρχει σχεδόν σε όλο τον κόσμο.

1.2 Ασφάλιση Αυτοκινήτου

- 1) Υποχρεωτική κάλυψη: Με βάση την ελληνική νομοθεσία, η υποχρεωτική κάλυψη είναι η αστική ευθύνη έναντι τρίτων η οποία διακρίνεται σε αστική ευθύνη για σωματικές βλάβες (ανά θύμα) και σε αστική ευθύνη για υλικές ζημιές (ανά ατύχημα).
- 2) Προαιρετική κάλυψη: Έκρηξη, φωτιά, προσωπικό ατύχημα, οδική βοήθεια, επισκευή οχήματος σε συνεργαζόμενα συνεργεία, ιατροφαρμακευτική κάλυψη για προσωπικό ατύχημα κ.λπ.
- 3) Μικτή ασφάλιση: η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση της αποκατάστασης των υλικών ζημιών του κατόχου του οχήματος από σύγκρουση, πρόσκρουση, ανατροπή ή κατακρήμνιση ακόμα και στην περίπτωση που ο κάτοχος του αυτοκινήτου είναι υπεύθυνος για το τροχαίο ατύχημα.

Εξαιρέσεις

Δεν καλύπτονται οι ζημιές που θα προκληθούν στο όχημα:

- α) Από πρόθεση του ασφαλισμένου.
- β) Από τρομοκρατικές ενέργειες.
- γ) Αν το μεταφερόμενο φορτίο δεν προβλέπεται από την άδεια κυκλοφορίας.
- δ) Από κίνηση χωρίς οδηγό.
- ε) Από οδηγό υπό την επήρεια αλκοόλ.

1.3 Ασφάλιση Εργατικού Ατυχήματος

Εργατικό ατύχημα είναι το ατύχημα που συμβαίνει στον εργαζόμενο κατά τη διάρκεια της εργασίας του από αιφνίδιο, βίαιο γεγονός (συμβάν) το οποίο δεν επιτρέπει στον εργαζόμενο να εργαστεί.

1.3.1 Αντικειμενικός Σκοπός Αποζημίωσης Εργατικών Ατυχημάτων

Σε περίπτωση ατυχήματος, ο εργοδότης είναι υποχρεωμένος για:

1. Πλήρη κάλυψη εργατικών ατυχημάτων ή ασθένειας.
2. Προστασία σε περίπτωση απώλειας εισοδήματος για ορισμένο χρονικό διάστημα.
3. Ιατροφαρμακευτική περίθαλψη και αποκατάσταση.
4. Ενθάρρυνση για τη δημιουργία ασφαλούς περιβάλλοντος εργασίας.

Αναλυτικότερα, προκειμένου να ενταχθεί ένα «συμβάν» στην έννοια του εργατικού ατυχήματος, θα πρέπει να συντρέξουν σωρευτικά οι εξής προϋποθέσεις:

1. Το συμβάν να είναι αιφνίδιο, βίαιο.
2. Το συμβάν να έγινε κατά την εκτέλεση της εργασίας ή με αφορμή την εργασία (π.χ. μετακίνηση εργαζομένων για λόγους εργασίας).
3. Να υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του συγκεκριμένου συμβάντος και της εργασίας.
4. Η πρόκληση του βίαιου συμβάντος να μην οφείλεται σε πρόθεση του εργαζομένου.
5. Το συμβάν να προκαλεί αδυναμία στον εργαζόμενο να εργαστεί πέραν των τριών ημερών (αυτό ισχύει για την Ελλάδα συγκεκριμένα).

Οι διατάξεις που σχετίζονται με τα εργατικά ατυχήματα καλύπτουν τις εξής περιπτώσεις ατυχημάτων (ΓΣΕΕ, 2020).

- α) Κατά την εκτέλεση της εργασίας: Ατυχήματα που συμβαίνουν κατά την εκτέλεση της εργασίας σαν άμεση συνέπεια αυτής (τραυματισμός του εργαζομένου από μηχάνημα, πτώση κατά την εκτέλεση της εργασίας κ.λπ.).
- β) Με αφορμή την εργασία: Ατυχήματα που συμβαίνουν με αφορμή την εργασία, δηλαδή εκτός του τόπου και του χρόνου εργασίας, με την προϋπόθεση να έχουν έστω και έμμεση σχέση με την εργασία. Έχει κριθεί από τα δικαστήρια ότι αποτελούν εργατικά ατυχήματα και εκείνα που συμβαίνουν κατά τη μετάβαση στην εργασία ή κατά την ενέργεια μιας πράξης προς το συμφέρον του εργοδότη, ακόμα και χωρίς την εντολή του ή κατά τη διάρκεια του μεσημβρινού διαλείμματος στον τόπο της εργασίας κατά την προσέλευση ή αναχώρηση και για χρονικό διάστημα μιας ώρας αντίστοιχα.
- γ) Από επαγγελματική ασθένεια: Ατυχήματα που οφείλονται σε επαγγελματικές ασθένειες, δηλαδή ατυχήματα που οφείλονται στις επιδράσεις των συνθηκών εργασίας, καθώς και κάθε επιδείνωση προϋπάρχουσας ασθένειας που συνέβη λόγω εξακολούθησης της εργασίας.

Σύμφωνα με τη νομοθεσία του Εθνικού Φορέα Κοινωνικής Ασφάλισης - ΕΦΚΑ (πρώην ΙΚΑ) ως εργατικά ατυχήματα χαρακτηρίζονται τα εξής:

- i) Ο θάνατος ή αναπηρία: Προκλήθηκε από βίαιο περιστατικό που έγινε κατά τη μετάβαση του ασφαλισμένου από το σπίτι του στην εργασία ή κατά την επιστροφή του. Χαρακτηρίζεται ως εργατικό ατύχημα αρκεί να υπάρχει στη συγκεκριμένη περίπτωση αιτιώδης σύνδεσμος μεταξύ συμβάντος και εργασίας.
- ii) Το βίαιο συμβάν: Το ατύχημα που μπορεί να πάθει ο μισθωτός με τις κανονικές συνθήκες της εργασίας του δεν θεωρείται εργατικό ατύχημα. Το βίαιο συμβάν είναι δυνατό να οφείλεται σε βλάβη ή και δυσλειτουργία μηχανήματος, στην ενέργεια που χρησιμοποιείται, σε πτώση του ίδιου του εργαζόμενου, σε κατάρρευση οικοδομήματος ή σε άλλες αιτίες.
- iii) Η συνυπαιτιότητα: Η αμέλεια του παθόντος δεν αίρει την έννοια του εργατικού ατυχήματος, εκτός αν ο παθών εκ προθέσεως προκάλεσε το ατύχημα.
- iv) Η αναγνώριση της πνευματικής ή ψυχικής διαταραχής ως ανικανότητα: Αποτελεί εργατικό ατύχημα η ψυχική ή άλλη νόσος που οφείλεται σε έντονο ψυχικό κλονισμό, φόβο, απειλή ή άλλο παρόμοιο γεγονός, το οποίο υπήρξε η αιτία για την πρόκληση του ατυχήματος.

1.3.2 Ασφαλιστικές Καλύψεις

- i) Ιατροφαρμακευτική και Νοσοκομειακή περίθαλψη: Εάν ο εργαζόμενος είναι ασφαλισμένος στον ΕΦΚΑ, για τα έξοδα ιατροφαρμακευτικής και νοσοκομειακής περίθαλψης καλύπτεται από τον ΕΦΚΑ. Διαφορετικά, ο εργοδότης είναι υποχρεωμένος να πληρώσει τα έξοδα.
- ii) Εφάπαξ αποζημίωση: Όταν ο εργαζόμενος δεν είναι ασφαλισμένος στον ΕΦΚΑ δικαιούται εφάπαξ αποζημίωση από τον εργοδότη, η οποία κυμαίνεται, ανάλογα με τον βαθμό ανικανότητας για εργασία (πλήρης διαρκής ανικανότητα, μερική διαρκής, πλήρης πρόσκαιρη, μερική πρόσκαιρη, θάνατος). Επίσης, ο εργαζόμενος μπορεί να λάβει αποζημίωση λόγω ηθικής βλάβης ή ψυχικής οδύνης.
- iii) Αποζημίωση για ηθική βλάβη ή ψυχική οδύνη: Όλοι οι εργαζόμενοι, εφόσον υποστούν εργατικό ατύχημα που οφείλεται σε δόλο ή αμέλεια του εργοδότη, δικαιούνται χρηματική αποζημίωση για ηθική βλάβη. Σε περίπτωση θανάτου η αποζημίωση δίνεται στην οικογένεια.
- iv) Αποδοχές - Επίδομα ασθενείας: Κατά το διάστημα της ανικανότητάς του ο εργαζόμενος δικαιούται επίσης επίδομα ασθενείας από τον ΕΦΚΑ και το υπόλοιπο του μισθού του από τον εργοδότη για διάστημα 15 ημερών, εάν έχει υπηρεσία μικρότερη του έτους ή ενός μηνός για υπηρεσία πάνω από ένα έτος.

1.4 Ασφάλιση Περιουσίας

Η ασφάλιση περιουσίας καλύπτει ζημιές στο ακίνητο που προήλθαν από συγκεκριμένες αιτίες με ένα ανώτατο όριο καταβολής αποζημίωσης.

- 1) Καιρικά φαινόμενα: Ζημιές που έχουν προκληθεί από θύελλα, καταιγίδα, χιονόπτωση, χαλαζόπτωση και παγετό.

- 2) Φωτιά: Ζημιές που προκλήθηκαν από πυρκαγιά και τα παράγωγά της (καπνός κ.λπ.).
- 3) Πρόσκρουση: Πρόσκρουση οχημάτων, πτώση στύλων, δένδρων, κλαδιών κ.λπ.
- 4) Διαρροή: Βλάβη σωληνώσεων ύδρευσης, θέρμανσης και αποχέτευσης.
- 5) Ηλεκτρικές εγκαταστάσεις: Ζημιές που προκλήθηκαν από βραχυκύκλωμα ηλεκτρικών εγκαταστάσεων και συσκευών.
- 6) Κλοπή-ληστεία: Κλοπή περιεχομένων από διάρρηξη ή ληστεία, καθώς και ζημιές που προκλήθηκαν.
- 7) Σωματικές βλάβες: Κάλυψη για τους συνήθεις κινδύνους, όπως σωματικές βλάβες σε επισκέπτες, υλικές ζημιές της ιδιοκτησίας κ.λπ.

Οι ζημιές που προέρχονται από πόλεμο ή πυρηνική καταστροφή ή από δόλο του ιδιοκτήτη εξαιρούνται. Εξαιρούνται επίσης περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να ανακύψει θέμα αστικής ευθύνης με αποτέλεσμα η επιχείρηση του ασφαλισμένου να είναι εκτεθειμένη σε οικονομικούς κινδύνους από τον λόγο αυτό. Στην περίπτωση αυτή η ασφάλιση της γενικής αστικής ευθύνης δεν προστατεύει για αυτό το τυχαίο περιστατικό ή για επαγγελματική αμέλεια, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε μια δαπανηρή νομική διαδικασία.

1.5 Γενική Αστική Ευθύνη

Υπάρχουν πολλές εξειδικευμένες επιλογές προστασίας αστικής ευθύνης που ο ασφαλισμένος μπορεί να επιλέξει.

- 1) Επαγγελματική αστική ευθύνη, λάθη και παραλείψεις: Η ασφάλιση λαθών και παραλείψεων προστατεύει από ένα λάθος το οποίο μπορεί να προκαλέσει τραυματισμό ή μεγαλύτερη βλάβη σε τρίτους. Παρέχει επίσης κάλυψη στην περίπτωση που μηνυθείτε από κάποιον ότι από αμέλεια σας προκαλέσατε κάποια οικονομική ζημία. Αυτού του είδους η ασφάλιση παρέχει προστασία σε πολλούς ελεύθερους επαγγελματίες, όπως γιατρούς, δικηγόρους, λογιστές, μηχανικούς κ.λπ.
- 2) Αστική ευθύνη διευθυντών και ανώτερων υπαλλήλων: Προστατεύει από πλευράς αστικής ευθύνης έναντι τρίτων τους διευθυντές, προϊσταμένους, διαχειριστές χαρτοφυλακίων, για παραβάσεις που προέρχονται από λανθασμένη εκτίμηση και προκάλεσαν οικονομικές ζημιές.

1.6 Ναυτασφάλεια

Η ναυτασφάλεια καλύπτει (αποζημιώνει) απώλειες που συνδέονται με έκθεση στον κίνδυνο στη θάλασσα, περιλαμβάνει εγχώριες ή υπερατλαντικές αποστολές και παρέχει κάλυψη για όλους τους τύπους καραβιών. Για εγχώριες μεταφορές κάθε χώρα έχει αναπτύξει δική της σχετική ασφαλιστική νομοθεσία. Εντούτοις, για την ασφάλιση διεθνών θαλασσιών μεταφορών έχει επιβληθεί το αγγλικό δίκαιο.

Αναλυτικά, η ναυτασφάλεια περιλαμβάνει τις κάτωθι καλύψεις κινδύνου:

- 1) Πληρώματος και εμπορευμάτων, δηλαδή απώλειες που συνδέονται με την έκθεση εμπορευμάτων που μεταφέρονται με πλοία.
- 2) Μέρους ή ολόκληρου του πλοίου (π.χ. για ζημιές στο σκάφος και τις μηχανές του).
- 3) Αβέβαιη είσπραξη συγκεκριμένου χρηματικού ποσού με τη μορφή κέρδους, αποζημίωσης, δανείου και εγγύησης από την έκθεση του πλοίου και του εμπορεύματος. Η ασφάλιση θαλάσσιου φορτίου είναι ένας από τους κλάδους ασφαλιστικών δραστηριοτήτων. Το ασφαλιστήριο συμβόλαιο θαλάσσιου φορτίου, με την ευρύτερη έννοιά του, είναι ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο μεταφοράς.
- 4) Για ζημιές (βλάβες) που ενδέχεται να προκληθούν σε τρίτους από την έκθεση του πλοίου και του μεταφερόμενου εμπορεύματος σε θαλάσσιους κινδύνους.

Παρατήρηση 1. Υπάρχουν και άλλες κατηγορίες γενικών ασφαλίσεων, όπως πιστώσεων, εγγυήσεων, νομικής προστασίας κ.λπ., οι οποίες μπορούν να τιμολογηθούν με τον ίδιο τρόπο.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Ωφελιμότητας (Utility)

2.1 Εισαγωγή

Η θεωρία ωφελιμότητας μας παρέχει πληροφορίες για τη λήψη αποφάσεων λόγω αβεβαιότητας. Εφαρμόζεται σε άτομα, οικογένειες, επιχειρήσεις, αναλαμβάνοντας ή διαμοιράζοντας ή μεταφέροντας τον κίνδυνο. Στη θεωρία ωφελιμότητας καθιερώνονται επίπεδα ικανοποίησης τα οποία αντιστοιχούν σε διάφορα πιθανά αποτελέσματα. Υποθέτουμε μαθηματικές συναρτήσεις για να περιγράψουμε επίπεδα ικανοποίησης τα οποία είναι ασαφή. Η μορφή κάθε συνάρτησης αντανακλά τη συμπεριφορά ενός ατόμου ή μιας επιχείρησης ως προς τον κίνδυνο.

Η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ μπορεί να περιγραφεί ως μια συνάρτηση που μετρά την αξία ή την ωφελιμότητα που ένα άτομο (ή μια επιχείρηση) αποδίδει στο χρηματικό ποσό x . Η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι μία σύνθετη συνάρτηση για την οποία μπορούμε να πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας ικανοποιεί τις κάτωθι δύο συνθήκες $u'(x) > 0$ και $u''(x) < 0$. Η πρώτη συνθήκη (η πρώτη παράγωγος είναι θετική) μας λέει ότι η συνάρτηση $u(x)$ είναι αύξουσα, ενώ η δεύτερη συνθήκη (η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική) μας λέει ότι η συνάρτηση είναι κοίλη. Οι παραπάνω συνθήκες ανταποκρίνονται σε άτομα (ή επιχειρήσεις) τα οποία αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk averse), με συνάρτηση ωφελιμότητας η οποία αυξάνεται προοδευτικά με τους χαμηλότερους ρυθμούς και έχει αρνητική δεύτερη παράγωγο.

Η αρχή της φθίνουσας περιθώριας ωφελιμότητας εφαρμόζεται σε κινδυνόφοβα άτομα (risk avoider) και είναι η περίπτωση των περισσότερων ανθρώπων. Για παράδειγμα, μια αύξηση 1000 Ευρώ της περιουσίας ενός ατόμου έχει μεγαλύτερη αξία για ένα άτομο που έχει περιουσία 50000 Ευρώ σε σύγκριση με ένα άτομο που έχει περιουσία 1000000 Ευρώ.

Παρατήρηση 2. Ένα άτομο το οποίο είναι ουδέτερο κινδύνου (risk neutral) θα έχει συνάρτηση ωφελιμότητας η οποία θα είναι γραμμική. Ένα άτομο ριψοκίνδυνο (favored risk) με συνάρτηση ωφελιμότητας η οποία αυξάνεται προοδευτικά με τους ταχύτερους ρυθμούς θα έχει θετική δεύτερη παράγωγο.

Η θεωρία ωφελιμότητας είναι χρήσιμη στις ασφαλιστικές εταιρείες ώστε να αναλύουν αν κάποιο ασφαλιστικό πρόγραμμα είναι ανταγωνιστικό στην αγορά στην τιμή που προσφέρεται. Επίσης, χρησιμοποιείται από τους μελλοντικούς ασφαλισμένους για να αποτιμήσουν διάφορα ασφαλιστικά προγράμματα που προσφέρονται στην αγορά. Η θεωρία ωφελιμότητας χρησιμοποιείται για να εξηγήσει γιατί ορισμένα άτομα προτιμούνται να ασφαλιστούν και να πληρώσουν ασφάλιστρο το οποίο βάσει ορισμένων κριτηρίων δεν είναι δίκαιο. Για να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό παραθέτουμε το παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα 1. Ασφάλιση Ιδιοκτησίας για Σεισμό. Ένας ιδιοκτήτης ακινήτων θέλει να ασφαλίσει το ακίνητό του κατά του σεισμού. Το ασφαλιστήριο είναι 400 Ευρώ. Έστω ότι υπάρχει μία πιθανότητα στις 1000, ένα σπίτι να καταστραφεί ολοσχερώς από σεισμό. Σ' αυτήν την περίπτωση η καταστροφή είναι 300000 Ευρώ. Έστω ότι η αξία ωφελιμότητας χωρίς δαπάνη ασφάλισης και ζημιάς ισούται με 0 Ευρώ. Η αξία ωφελιμότητας δαπάνης 400 Ευρώ για ασφάλιση ισούται με 2. Η αξία ωφελιμότητας δαπάνης 300000 Ευρώ χωρίς ασφάλιση είναι ίση με 2000, επειδή ο ιδιοκτήτης αποστρέφεται τον κίνδυνο. Να βρείτε αν ο ιδιοκτήτης πρέπει να ασφαλίσει ή όχι το ακίνητο: α) με βάση το αναμενόμενο κόστος ζημιάς και β) με βάση το αναμενόμενο κόστος ωφελιμότητας.

Λύση: Στον παρακάτω πίνακα μας δίνονται οι πιθανότητες σεισμού και το κόστος ασφάλισης ή μη ασφάλισης.

Πίνακας 2.1: Ασφάλιση Ιδιοκτησίας για Σεισμό

	Μη Σεισμός	Σεισμός
Ασφαλισμένος	400	400
Μη ασφαλισμένος	0	300000
Πιθανότητα	999/1000	1/1000

Αν ο ιδιοκτήτης έχει ασφαλίσει το ακίνητο, το αναμενόμενο κόστος είναι

$$400 \frac{999}{1000} + 400 \frac{1}{1000} = 400 \text{ Ευρώ}$$

και αν ο ιδιοκτήτης δεν έχει ασφαλίσει το ακίνητο, το αναμενόμενο κόστος είναι

$$(0) \frac{999}{1000} + 300000 \frac{1}{1000} = 300 \text{ Ευρώ.}$$

Αν ο ιδιοκτήτης έπρεπε να αποφασίσει με βάση το αναμενόμενο κόστος να ασφαλίσει ή όχι το ακίνητο, δεν θα το ασφαλίζε γιατί το αναμενόμενο κόστος χωρίς ασφάλιση (300 Ευρώ) είναι μικρότερο σε σύγκριση με το αναμενόμενο κόστος με ασφάλιση (400 Ευρώ). Όμως, κάνοντας χρήση της θεωρίας ωφελιμότητας έχουμε τα κάτωθι:

Αν ο ιδιοκτήτης έχει ασφαλίσει το ακίνητο, το αναμενόμενο κόστος ωφελιμότητας είναι

$$400 \frac{999}{1000} (2) + 400 \frac{1}{1000} (2) = 800 \text{ Ευρώ}$$

και αν ο ιδιοκτήτης δεν έχει ασφαλίσει το ακίνητο, το αναμενόμενο κόστος ωφελιμότητας είναι

$$(0) \frac{999}{1000} (0) + 300000 \frac{1}{1000} (2000) = 600000 \text{ Ευρώ.}$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, ο ιδιοκτήτης επιλέγει να ασφαλίσει το ακίνητό του επειδή στην περίπτωση αυτή το αναμενόμενο κόστος ωφελιμότητας είναι το χαμηλότερο.

2.1.1 Συνάρτηση Ωφελιμότητας του Ασφαλισμένου

Έστω ότι η τιμή μιας απόφασης προτίμησης συνδέεται με μια συνάρτηση $u(w)$, η οποία ονομάζεται συνάρτηση ωφελιμότητας, όπου w είναι το μέγεθος του πλούτου/περιουσίας (wealth) μετρήσιμο

σε Ευρώ. Αν ο ασφαλισμένος έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w)$, τότε το ασφάλιστρο G θα προκύπτει από τη σχέση

$$u(w - G) = E[u(w - X)], \quad (2.1.1)$$

αφού $u(w - G)$ θα είναι η ωφελιμότητα κατόπιν καταβολής του ποσού G , ενώ η μέση του ωφελιμότητα για τυχαία ζημιά X (χωρίς ασφάλιση) ισούται με $E[u(w - X)]$. Η παραπάνω συνάρτηση αναφέρεται και ως εξίσωση του ασφαλισμένου. Η συνάρτηση ωφελιμότητας που μας οδηγεί στην παραπάνω σχέση είναι η περίπτωση αύξουσας και κοίλης συνάρτησης και ονομάζεται κινδυνοφοβική (risk averse). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen για κοίλες συναρτήσεις

$$E[u(X)] \leq u[E(X)], \quad (2.1.2)$$

λαμβάνουμε

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \leq u[E(w - X)] = u[(w - E(X))].$$

Επειδή η $u(w)$ είναι αύξουσα ($u'(w) > 0$), θα ισχύει

$$w - G \leq E[u(w - X)] \leq w - E(X)$$

$$\Rightarrow G \geq E(X).$$

2.1.2 Συνάρτηση Ωφελιμότητας της Ασφαλιστικής Εταιρείας

Έστω w_0 είναι το μέγεθος του πλούτου της ασφαλιστικής εταιρείας στο χρόνο μηδέν και $u(w_0)$ η συνάρτηση ωφελιμότητάς της, τότε το ελάχιστο καταβλητέο ασφάλιστρο A για κάλυψη ζημιάς X θα ικανοποιεί τη σχέση

$$u(w_0) = E[u(w_0 + A - X)]. \quad (2.1.3)$$

Αν η ασφαλιστική εταιρεία είναι κινδυνοφοβή, δηλαδή $u'(w_A) > 0$, τότε όπως και στη συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλισμένου θα έχουμε

$$u(w_0) = E[u(w_0 + A - X)] \leq u[w_0 + A - E(X)],$$

δηλαδή $A \geq E(X)$. Αν αυτό ισχύει και $G \geq E(X)$, έτσι ώστε $G \geq A \geq E(X)$, τότε δεν μειώνεται η αναμενόμενη ωφελιμότητα της ασφαλιστικής εταιρείας και του ασφαλισμένου.

2.2 Συναρτήσεις Ωφελιμότητας

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε διάφορες μορφές συναρτήσεων ωφελιμότητας.

2.2.1 Συνάρτηση Εκθετικής Ωφελιμότητας

$$u(w) = -e^{-aw}, \quad a > 0. \quad (2.2.4)$$

Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος δίνονται από τις σχέσεις

$$u'(w) = ae^{-aw} > 0$$

$$\text{και } u''(w) = -a^2e^{-aw} < 0.$$

Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής ορίζεται ως $M_X(t) = E(e^{tX})$. Με βάση τη (2.2.4) η συνάρτηση του ασφαλιζόμενου (2.1.1) παίρνει τη μορφή

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

$$\Rightarrow -e^{-a(w-G)} = E[-e^{-a(w-X)}]$$

$$\Rightarrow -e^{-aw}e^{aG} = -e^{-aw}E[e^{aX}]$$

$$\Rightarrow e^{aG} = M_X(a)$$

$$\Rightarrow G = \frac{\log M_X(a)}{a} \quad (2.2.5)$$

και η συνάρτηση του ασφαλιστή παίρνει τη μορφή

$$u(w_0) = E[u(w_0 + A - X)]$$

$$\Rightarrow -e^{-aw_0} = E[-e^{-a(w_0+A-X)}]$$

$$\Rightarrow -e^{-aw_0} = -e^{-a(w_0+A)}E[e^{aX}]$$

$$\Rightarrow e^{aA} = M_X(a)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\log M_X(a)}{a}. \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Τετραγωνική Συνάρτηση Ωφελιμότητας

Η τετραγωνική συνάρτηση ωφελιμότητας ορίζεται ως

$$u(w) = w - aw^2, \quad w < \frac{1}{2a}, \quad a > 0. \quad (2.2.7)$$

Η χρήση της σχέσης (2.2.7) περιορίζεται από τη σχέση $w < \frac{1}{2a}$ που απαιτείται για να διασφαλιστεί ότι $u'(x) > 0$. Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος δίνονται από τις σχέσεις

$$u'(w) = 1 - 2aw > 0$$

$$\text{και } u''(w) = -2a < 0. \quad (2.2.8)$$

2.2.3 Λογαριθμική Συνάρτηση Ωφελιμότητας

Η λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας ορίζεται ως

$$u(w) = a \ln(w), \quad w > 0, \quad a > 0. \quad (2.2.9)$$

Αυτή η συνάρτηση ωφελιμότητας δεν είναι κατάλληλη για χρήση σε περιπτώσεις όπου τα αποτελέσματα οδηγούν σε αρνητικό πλούτο ($w < 0$). Η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} u'(w) &= \frac{a}{w} > 0 \\ \text{και } u''(w) &= -\frac{a}{w^2} < 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

2.2.4 Συνάρτηση Ωφελιμότητας Κλασματικής Ισχύος

Η συνάρτηση ωφελιμότητας κλασματικής ισχύος ορίζεται ως

$$u(w) = w^a, \quad w > 0, \quad 0 < a < 1. \quad (2.2.11)$$

Η συνάρτηση είναι κατάλληλη για άτομα που αποστρέφονται τον κίνδυνο, επειδή

$$\begin{aligned} u'(w) &= aw^{a-1} > 0 \\ \text{και } u''(w) &= a(a-1)w^{a-2} < 0. \end{aligned}$$

Αυτή η συνάρτηση ωφελιμότητας όπως και η λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας δεν είναι κατάλληλη για χρήση σε περιπτώσεις όπου τα αποτελέσματα οδηγούν σε αρνητικό πλούτο ($w < 0$).

Παράδειγμα 2. Έστω ότι το σύστημα διαχείρισης κινδύνου μιας εταιρείας έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(P) = \sqrt{P-100}$, όπου $P \geq 100$ είναι το κέρδος. Η εταιρεία εφαρμόζει δύο σενάρια επένδυσης, Α και Β, όπως εμφανίζονται στον Πίνακα 2.2.

α) Να δείξετε ότι η διαχείριση είναι κινδυνόφοβη. β) Ποιο σενάριο θα επιλέξει ο διαχειριστής κινδύνου βασιζόμενος i) στη μέση τιμή, ii) στη μέση ωφελιμότητα;

Πίνακας 2.2: Επενδυτικό Χαρτοφυλάκιο

Διαχείριση Κινδύνου			
Σενάριο Α		Σενάριο Β	
Πιθανότητες	Κέρδος	Πιθανότητες	Κέρδος
0.20	275	0.30	300
0.30	325	0.40	400
0.40	400	0.20	412
0.10	450	0.10	501

Λύση: α) Λαμβάνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης ωφελιμότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} u'(P) &= \frac{1}{2}(P-100)^{-1/2} > 0, \\ u''(P) &= -\frac{1}{4}(P-100)^{-3/2} < 0, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι η διαχείριση είναι κινδυνόφοβη.

β) Με βάση τη μέση τιμή, τα Σενάρια A και B (Πίνακας 2.2) μας δίνουν αντίστοιχα

$$\begin{aligned} E_A &= (275)(0.20) + (325)(0.30) + (400)(0.40) + (450)(0.10) \\ &= 357.5 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E_B &= (300)(0.30) + (400)(0.40) + (412)(0.20) + (501)(0.10) \\ &= 382.5 \end{aligned}$$

από τα οποία προκύπτει ότι το κέρδος είναι μεγαλύτερο για το Σενάριο B.

γ) Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση ωφελιμότητας στα δύο σενάρια επένδυσης, στον Πίνακα 2.3 λαμβάνουμε τις τιμές ωφελιμότητας που έχουν προκύψει εφαρμόζοντας τη συνάρτηση ωφελιμότητας με τις αντίστοιχες τιμές κέρδους, π.χ.

Πίνακας 2.3: Επενδυτικό Χαρτοφυλάκιο - Ωφελιμότητα

Διαχείριση Κινδύνου			
Σενάριο A		Σενάριο B	
Πιθανότητες	Ωφελιμότητα	Πιθανότητες	Ωφελιμότητα
0.20	13.2288	0.30	14.1421
0.30	15.0000	0.40	17.3205
0.40	17.3205	0.20	17.6635
0.10	18.7083	0.10	20.0250

$$u(275) = \sqrt{275 - 100} = 13.2288, \quad u(300) = \sqrt{300 - 100} = 14.1421 \text{ κ.λπ.}$$

Με βάση τη μέση ωφελιμότητα, το Σενάριο A και το Σενάριο B μας δίνουν αντίστοιχα

$$\begin{aligned} E_{u_A} &= (13.2288)(0.20) + (15.0000)(0.30) + (17.3205)(0.40) + (18.7083)(0.10) \\ &= 15.95279 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E_{u_B} &= (14.1421)(0.30) + (17.3205)(0.40) + (17.6635)(0.20) + (20.0250)(0.10) \\ &= 16.70603. \end{aligned}$$

Με βάση τις τιμές των μέσων ωφελιμοτήτων, ο διαχειριστής κινδύνου θα επιλέξει το Σενάριο B ($E_{u_B} = 16.7060 \geq E_{u_A} = 15.9448$).

Παράδειγμα 3. Έστω ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι $u(w) = -e^{-3w}$. Ο διαχειριστής κινδύνου πρέπει να επιλέξει μεταξύ δύο προοπτικών κέρδους: α) $X_1 \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ και β) $X_2 \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1.5)$. Τι θα επιλέξει ο διαχειριστής κινδύνου;

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής είναι $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. Με βάση την προοπτική α) $X_1 \sim N(2, 1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} E[u(X_1)] &= -E(e^{-3X_1}) \\ &= -e^{-(2)(3) + \frac{1}{2}(1)(3^2)} \\ &= -0.22313 \end{aligned}$$

και με βάση την προοπτική β) $X_2 \sim N(3, 1.5)$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} E[u(X_2)] &= -E(e^{-3X_2}) \\ &= -e^{-(3)(3) + \frac{1}{2}(1.5)(3^2)} \\ &= -0.1053992. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο διαχειριστής θα επιλέξει την προοπτική β), επειδή $-0.1053992 > -0.22313$.

Παράδειγμα 4. Έστω $u(w) = w^3$, $w = 2$ είναι ο πλούτος ενός ατόμου και $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ είναι η συνάρτηση απώλειας. Να βρεθεί το μικτό ασφάλιστρο (μέγιστο ασφάλιστρο) που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλιζόμενος.

Λύση: Από τη σχέση (2.1.1) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} u(w - G) &= E[u(w - X)] \\ \Rightarrow (2 - G)^3 &= \int_0^\infty (2 - X)^3 e^{-x} dx = 2 \quad \left(\int u dv = uv - \int v du \right) \\ (2 - G)^3 &= 2 \Rightarrow (2 - G) = 2^{1/3} \\ \Rightarrow G &= 2 - 2^{1/3}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5. Έστω $u(w) = a \ln(w)$, $a > 0$, $w = 2$ είναι ο πλούτος ενός ατόμου και $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ είναι η συνάρτηση απώλειας. Να βρεθεί το μικτό ασφάλιστρο.

Λύση: Με βάση την εξίσωση του ασφαλισμένου, έχουμε

$$\begin{aligned} u(w - G) &= E[u(w - X)] \\ \Rightarrow a \ln(2 - G) &= \int_0^1 a \ln(2 - x) dx \quad \left(\int \ln(u) du = u \ln(u) - u \right) \\ &= 0.3863a \\ \Rightarrow \ln(2 - G) &= 0.3863 \\ \Rightarrow G &= 0.528474 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6. Ένα άτομο αντιμετωπίζει μια τυχαία απώλεια X , η οποία ακολουθεί την κατανομή Γάμμα (Gamma) με παραμέτρους $\alpha = 3$ και $\beta = 0.02$. Το άτομο αυτό βασιζόμενο στη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = -e^{0.002w}$ μπορεί να έχει πλήρη ασφάλιση πληρώνοντας ένα ασφάλιστρο 150 Ευρώ. Να βρείτε αν το άτομο αυτό είναι αποφασισμένο να ασφαλιστεί με το συγκεκριμένο ασφάλιστρο.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια της κατανομής Γάμμα είναι $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ και με βάση τη σχέση (2.2.5) το μέγιστο ασφάλιστρο υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} G &= \frac{\ln M_X(a)}{a} \\ &= \frac{\ln \left(\frac{0.02}{0.02-0.002} \right)^3}{0.002} \\ &= \frac{0.3169815}{0.002} \\ &= 158.0408. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το άτομο αυτό είναι αποφασισμένο να ασφαλιστεί με το συγκεκριμένο ασφάλιστρο των 150 Ευρώ.

Παράδειγμα 7. Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = w - 0.001w^2$, όπου w είναι ο πλούτος. Ο τρέχων πλούτος του ατόμου αυτού είναι 300 Ευρώ. Ποιο είναι το μέγιστο στοίχημα που προτίθεται να παίξει το άτομο αυτό σε ένα τυχερό παιχνίδι, όπου υπάρχει η πιθανότητα 25% να κερδίσει 100 Ευρώ συν επιστροφή του ποσού που έπαιξε στο στοίχημα;

Λύση: Χωρίς το στοίχημα ο πλούτος του ατόμου είναι 300 Ευρώ και η αναμενόμενη θέση ωφελιμότητας είναι

$$u(300) = 300 - (0.001)(300^2) = 210. \quad (2.2.12)$$

Αν το άτομο παίξει το στοίχημα, με πιθανότητα 0.25 αναμένεται να κερδίσει 100 Ευρώ συν να πάρει πίσω τα χρήματα του στοιχήματος και ο πλούτος του θα γίνει $300 + 100 = 400$ Ευρώ. Με πιθανότητα 0.75 αναμένεται να χάσει X Ευρώ και ο πλούτος του θα γίνει $300 - X$ Ευρώ. Έτσι, η αναμενόμενη ωφελιμότητα θα είναι

$$0.25[(300 + 100) - (0.001)(300 + 100)^2] + 0.75[(300 - x) - 0.001(300 - x)^2]. \quad (2.2.13)$$

Εξισώνοντας τις εξισώσεις (2.2.12) και (2.2.13) λαμβάνουμε την παρακάτω δευτεροβάθμια εξίσωση με τις αντίστοιχες λύσεις:

$$-x^2 - 400x + 10000 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -423.607, x_2 = 23.6068.$$

Συνεπώς, το μέγιστο στοίχημα που μπορεί να παίξει το άτομο αυτό σε ένα τυχερό παιχνίδι είναι 23.6068 Ευρώ.

Άσκηση 1. Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = 1000w - w^2$, όπου w είναι ο πλούτος. Ο τρέχων πλούτος του ατόμου αυτού είναι 200 Ευρώ. Ποιο είναι το μέγιστο στοίχημα που μπορεί να παίξει το άτομο αυτό σε ένα τυχερό παιχνίδι, όπου υπάρχει πιθανότητα 30% να κερδίσει 100 Ευρώ συν επιστροφή του ποσού που έπαιξε στο στοίχημα;

Υπόδειξη Λύσης: $u(200) = 1000(200) - 200^2 = 160000$,

$$0.30[1000(200 + 100) - (200 + 100)^2] + 0.70[1000(200 - x) - (200 - x)^2],$$

$$(-0.7x^2 - 420x + 15000 = 0, x = 33.8092, x = -633.809).$$

Άσκηση 2. Έστω μία ασφαλιστική εταιρεία χρησιμοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = w - 0.001w^2$ και παρέχει πλήρη ασφάλιση για απώλεια X , με $E(X) = V(X) = 100$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο ασφαλιστρο το οποίο η ασφαλιστική εταιρεία θα αποδεχθεί, αν ο πλούτος του ασφαλισμένου είναι 100 Ευρώ. Τι παρατηρείτε;

Υπόδειξη Λύσης: $(100 - G) - 0.001(100 - G)^2 = 100 - E(X) - 0.001E(100 - X)^2$,

$$(-0.001G^2 - 0.8G - 90.1 = 0, G = 100.1, G = -900.1).$$

Άσκηση 3. Έστω μία ασφαλιστική εταιρεία χρησιμοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = w - 0.01w^2$ και παρέχει πλήρη ασφάλιση για απώλεια X , με μέση τιμή και διασπορά 200 Ευρώ. Να υπολογίσετε το ελάχιστο ασφαλιστρο το οποίο η ασφαλιστική εταιρεία θα αποδεχθεί, αν ο πλούτος του ασφαλισμένου είναι 170 Ευρώ.

Υπόδειξη Λύσης: $(170 - G) - 0.01(100 - G)^2 = 170 - E(X) - 0.01E(170 - X)^2$,

$$(-0.01G^2 + 2.4G - 78 = 0, G = 38.7596, G = 201.24).$$

Άσκηση 4. Έστω ένα άτομο χρησιμοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = 1 - e^{-w/10000}$, όπου w είναι ο πλούτος. Αν ο τρέχων πλούτος του ατόμου είναι 2000 Ευρώ να υπολογίσετε το μέγιστο ποσό που θα έπαιξε το άτομο αυτό για να λάβει μέρος σε ένα τυχερό παιχνίδι δίκαιης ρίψης νομίσματος όπου έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει 1500 Ευρώ. Στην περίπτωση που κερδίσει δεν λαμβάνει πίσω το ποσό που έπαιξε.

Υπόδειξη Λύσης: $u(2000) = 1 - e^{-2000/10000} = 0.1812692$

$$0.50[1 - e^{-(2000+1500-x)/10000}] + 0.50[1 - e^{-(2000-x)/10000}],$$

$$(x = 721.9009).$$