

Μάθημα περιγραφών

- Εφαρμόζω σε άτομα, επιχειρήσεις. Υπάρχει μια μαθηματική συνάρτηση για περιγραφή του επιπέδου ικανοποίησης.
- Η μορφή κάθε συνάρτησης ανανεώνεται τη συγκεκριμένη επί, πόσο ή υπερέχει στον κίνδυνο.

Συνάρτηση περιγραφών

Συνβολισμός: $u(x)$

Περιγραφή ή μέτρα των αξιών ή της υπερίσχυσης που αποδίδεται στο χρηματικό ποσό x .

Υπάρχουν τρεις ειδών περιπτώσεις:

- α) Το άτομο/επιχείρηση κινδυνόφωβος
- β) $+/-$ ουδέτερο στον κίνδυνο
- γ) $-/-$ ρισκοκίνητος.

Αντί π.χ. κινδυνόφοβος - ρισκοκίνητος ατομικό.

Έστω ένα ρισκοκίνητος και ένα κινδυνόφοβο άτομο στα οποία προσφέρονται οι εξής επιλογές:

Επιλογή Α: Σίγουρα $+100€$

Επιλογή Β: Ρίχνω νομίσματος και σε περίπτωση νίκης $+200€$.

Ποιος θα επέλεγε τι?

Απάντηση: Και ο δύο επιλογή, μέση τιμή $€100$.

Προφανώς ο κινδυνόφοβος θα επέλεγε την σίγουρη ενώ ο ρισκοκίνητος τον τρόπο!

Αίτη, παίρνει πίσω και η περιθώρια επένδυση. Π.χ. 620
επένδυο άτομο μια αίτηση 7-1 περιθώρια 1000€, έχει
παραβίτη αfix αν η περιθώρια 50€ σε 620€
με το αν είχε 100€.

Π.χ

Ιδιότητα, δίνει με αfix 440€ το σπίτι του για αγορά.

Αγοράζομαι: 440€.

Η πιθανότητα ολοκληρωθεί κατασκευή, αν αγοράζει είναι 0,1%.
με συνολικά κόστος 325.000€.

Εάν αfix επένδυση, χωρίς τμήση αγοράς, είναι με 0.

Εάν -/- - τμήση 440 είναι 2.

-/- - τμήση 325.000 είναι 2000.

Να βρείτε αν ο ιδιοκτήτης πρέπει να αγοράσει ή
όχι το ακίνητο με βάση:

α) Το καθαρό κόστος (μην)

β) Το καθαρό κόστος επένδυσης.

Λύση

α) Α. αγοράζει το ακίνητο, το καθαρό κόστος είναι:

$$440 \cdot 99,9\% + 440 \cdot 0,1\% = 440.$$

Α. Δεν το αγοράζει, το καθαρό κόστος είναι:

$$0 \cdot 99,9\% + 325000 \cdot 0,1\% = 325.$$

Αρα με βάση το καθαρό κόστος (μην), ο ιδιοκτήτης δεν θα
το αγοράζει καθότι $325 < 440$.

β) Αν το αβγαλίσω, το αμπερίσιο κέρος αυξάνεται:

$$440 \cdot 99,9\% \cdot 2 + 440 \cdot 0,1\% \cdot 2 = 880$$

Αν δεν το αβγαλίσω, το αμπερίσιο κέρος αυξάνεται:

$$0 \cdot 99,9\% \cdot 2000 + 325000 \cdot 0,1\% \cdot 2000 = 650000.$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο ιδιοκτήτης επιλέγει να αβγαλίσει καθίς τον εορτή λιπότερο $880 < 650000$.

Με βάση αυτή την κριτική φαίνεται ο ιδιοκτήτης ότι είναι επιβιωτικός.

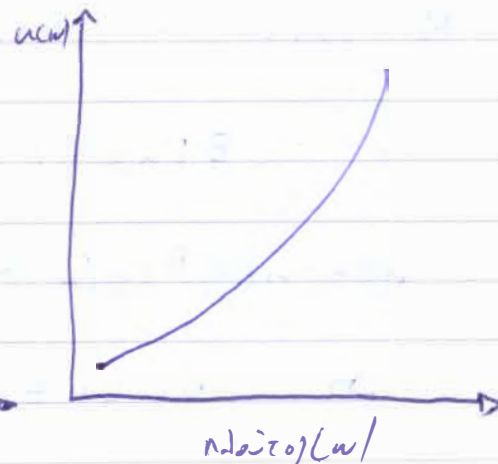
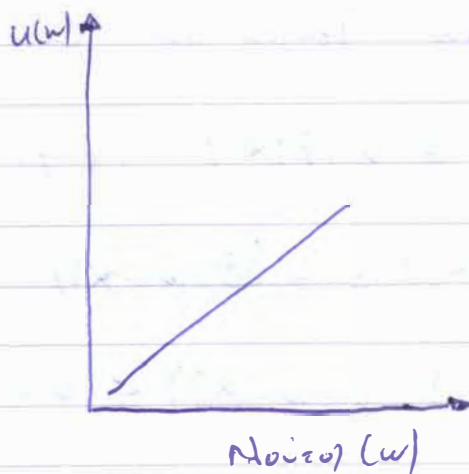
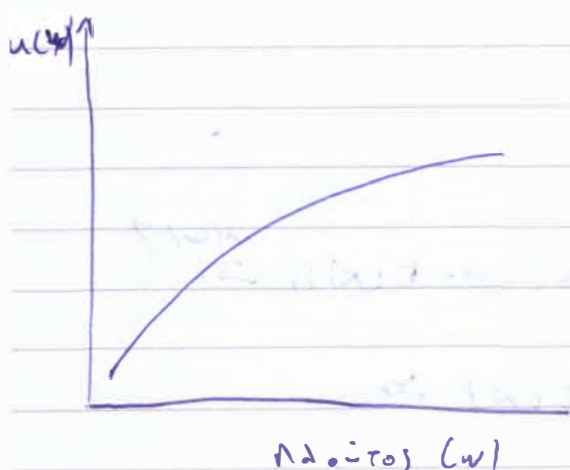
Στην περίπτωση αυτή είναι risk neutral.

Τις φαίνεται γενικά αυτή οι 3 περιπτώσεις?

Επιβιωτικός

Risk Neutral

Προσπαικός



$$u'(w) > 0$$

$$u''(w) < 0$$

(επιβιωτικός)

$$u'(w) > 0$$

$$u''(w) = 0$$

(επιβιωτικός)

$$u'(w) > 0$$

$$u''(w) > 0$$

(προσπαικός)

Στα κινδυνόβια άτομα έχουμε περιθώρια (οριακή) υπερίκτιση, ενώ στα ριζοκίχνα άτομα περιθώρια (οριακή) υποίκτιση.

Συνθήκες υπερίκτισης υποίκτισης

Αν $u(w)$ η συν. υπερίκτισης υποίκτισης, τότε το υποίκτηρο G προκύπτει από:

$$u(w-G) = E(u(w-X))$$

Η υπερίκτιση του τιμήει η περιουσία του κατά G , ισοδυναμεί με την ίδια υπερίκτιση (κρίση) της περιουσίας του υποίκτη για υποίκτη.

w η περιουσία του ατόμου

X η τυχαία ζημία X χωρίς υποίκτη.

$u(w-G)$ η υπερίκτιση του ατόμου κατόπιν κατωβλ. του G

$E(u(w-X))$ η ίδια υπερίκτιση για τυχαία ζημία X .

Η συνάρτηση υπερίκτισης του πωρ οδηγεί στα ορίγια αυτή είναι η κινδυνόβια συνάρτηση.

Με χρήση κριτηρίων Jensen για κινδυνόβια:

$$E(u(X)) \leq u(E(X)) \text{ έχουμε:}$$

$$u(w-G) = E(u(w-X)) \leq u(E(w-X)) = u(w-E(X)) \xrightarrow{u(w) \uparrow}$$

$$\Rightarrow w-G \leq E(u(w-X)) \leq w-E(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{G \geq E(X)}$$

Συνάρτηση χρησίμησης Αρραδιστική

w_0 : πλούτος σταρξία του χρώου 0.

$u(w_0)$: συν. χρησίμησης Αρραδιστική.

Το Ελάχιστο καταβλητικό κεφάλαιο A για κίνηση (μ, σ) X

$$u(w_0) = E(u(w_0 + A - X))$$

Αν η σταρξία κινδυνεύει, $(u'(w_0) > 0)$, τότε όρα με κεφάλαιον έχομε:

$$u(w_0) = E(u(w_0 + A - X)) \leq u(w_0 + A - E(X))$$

Συνεπώς $A \geq E(X)$ και αν $G \geq E(X)$, τότε $G \geq A \geq E(X)$ και δεν μειώνεται η διαρπύση χρησίμησης της σταρξίας με τον κεφάλαιον.

Συνάρτηση Οφελιμότητας

• Εκθετική χρησίμηση: $u(w) = -e^{-aw}$, $a > 0$

• Τετραγωνική συνάρτηση χρησίμησης: $u(w) = w - aw^2$, $w < \frac{1}{2a}$, $a > 0$.

• Λογαριθμική συν. χρησίμησης: $u(w) = a \ln(w)$, $w > 0$, $a > 0$.

• Συν. κλάσσης, ισχύει: $u(w) = w^a$, $w > 0$, $0 < a < 1$.

Ασκηση

Σύμφωνα διαχ. κριτήρια έχει συντάξει υπηρεσία $u(P) = \sqrt{P-100}$,
όπου P το κέρδος.

Η εταιρία εφαρμόζει 2 βεβαια ενδεύα A & B.

α) Μπορεί η εταιρία να διαφοροποιηθεί

β) Ποιο βεβαιο θα επιλέξει ο διαχειριστής κριτήριο βελτιστο

i) αν πόνος πόνος

ii) αν πόνος υπηρεσία.

Συμπεριφορά A		Συμπεριφορά B	
Π.δ.	Κέρδος	Π.δ.	Κέρδος
30%	110	20%	100
25%	225	45%	260
25%	320	25%	436
20%	420	10%	599

Λύση

$$α) \quad u'(P) = (\sqrt{P-100})' = \frac{1}{2} (P-100)^{-1/2} > 0$$

$$u''(P) = -\frac{1}{4} (P-100)^{-3/2} < 0$$

Αποδείχθηκε.

$$β) \quad i) \quad E_A = 30\% \cdot 110 + 25\% \cdot 225 + 25\% \cdot 320 + 20\% \cdot 420 = 253,25$$

$$E_B = 20\% \cdot 100 + 45\% \cdot 260 + 25\% \cdot 436 + 10\% \cdot 599 = 309,9$$

ii) Εφαρμόζω τον υπολογισμό των δύο βεβαιών.

Σεμείο Α		Σεμείο Β	
Π.δ.	Εξοδισμός	Π.δ.	Εξοδισμός
30%	3,16	20%	0
25%	11,18	45%	12,65
25%	14,83	25%	18,33
20%	17,89	10%	22,34

$u(110) = \sqrt{110 - 100} = \sqrt{10}$

$$E_{uA} = 3,16 \cdot 30\% + 11,18 \cdot 25\% + 14,83 \cdot 25\% + 17,89 \cdot 20\% = 11,03$$

$$E_{uB} = 0 \cdot 20\% + 12,65 \cdot 45\% + 18,33 \cdot 25\% + 22,34 \cdot 10\% = 12,51$$

Σε αυτή τη περίπτωση ο διαχειριστής επιλέγει το Β.

Άσκηση

Εστω $u(w) = -e^{-2w}$

Έχουμε 2 προοπτικές κερδών

α) $X_1 \sim N(\mu=2, \sigma^2=1)$

β) $X_2 \sim N(\mu=3, \sigma^2=1,5)$

Τι θα επιλέξει ο διαχειριστής κερδών?

Λύση.

α) $E(u(X_1)) = -E(e^{-2X_1}) = -e^{-2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2} = -0,13534$

(χρήση προηγούμενης) $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}$

$$b) E(u(X_2)) = -E(e^{-2X_2}) = -e^{-3 \cdot 2 + \frac{1}{2}(1,5) \cdot 2} = -0,04979.$$

Άρα ~~B~~ b) > a), δε ενδιφέρει το b).

Άσκηση

Έστω $u(w) = \underline{w}^2$, $w = 2$ και δίκαιο η επιρροή των ατόμων $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Να βρεθεί το ριζικό αβεγαίσιμο που είναι διατεταγμένο με αύξηση ο αβγ(ω).

Λύση

$$\Rightarrow u(w-G) = E(u(w-x)) \Rightarrow$$

$$(2-G)^2 = \int_0^{\infty} \underbrace{(2-x)^2}_{\text{Παραγοντική ολοκλήρωση}} e^{-x} dx =$$

$$\Rightarrow \int f'g dx = fg - \int f g' dx$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{(2-x)^2}_{f'} \underbrace{\left(-\frac{1}{x} e^{-x}\right)}_{g'} dx = \left[\underbrace{(2-x)^2}_{f'} \underbrace{(-e^{-x})}_{g'} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \underbrace{2(2-x)}_{f'} \underbrace{\frac{1}{x} (-e^{-x})}_{g'} dx =$$

$$= \underbrace{4}_{f'} - \underbrace{2}_{f'} \left\{ \underbrace{\left[\underbrace{(2-x)}_{f'} \underbrace{(-e^{-x})}_{g'} \right]_0^{\infty}}_{f' g'} - \int_0^{\infty} \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^{-x}}_{g'} dx \right\} =$$

$$= 4 - 2 \{ 2 - 1 \} = \underline{2}.$$

$$\text{Άρα } (2-G)^2 = 2 \Rightarrow 2-G = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{G = 2 - \sqrt{2}} \approx 0,5857$$

Παρατηρούμε ότι $G \leq E(X) = 1$ να είναι το δίκαιο αβεγαίσιμο, που σημαίνει ότι ο αβεγαίσιμος δε πληρώνει μικρότερο αβεγαίσιμο από το δίκαιο, να τον είναι κινδυνολήπης.

Άσκηση

Δίνεται $u(w) = 1000w - w^2$.

$$w = 200.$$

Ποιο το μέγιστο στοιχείο που μπορεί να πειστεί σε τυχρό παιχνίδι όπου υπάρχει πιθαν. 30% να κερδίσει 100 € + επιστροφή του ποσού που έπαιξε στο στοιχείο?

Λύση

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------|-------------|-----|
| | | $+ (x - x)$ | |
| • Αν κερδίσει ο παίκτης πίνει | $200 + 100 = 300$ | } | 30% |
| • Αν χάσει " " | $200 - x$ | | 70% |

Αν κερδίσει υπολογίζεται:

$$E(u) = 30\% \cdot u(300) + 70\% \cdot u(200 - x).$$

Επίσης, υπολογίζεται σε περίπτωση που δεν παίζει: $u(200)$.

Συνθήκη ισοφορίας:

$$u(w - G) = E[u(w - X)]$$

$$u(200) = 30\% \cdot u(300) + 70\% \cdot u(200 - x)$$

$$\begin{array}{l} w - x \quad w + 100 \\ (70\%) \quad (30\%) \end{array}$$

Λίγες ως προς x :

$$x = -633$$

$$x = 33,01$$

→ ακέραιο δια.

$$1000 \cdot 200 - 200^2$$

Άσκηση. Ασύμμετρα στατιστικά χρησιμοποιείται συν. ωφέλιμότητα $u(w) = w - 0,001w^2$

Ομοσχετισμένη πιθανή αβγύλη για ανώτατα X , με $E(X) = V(X) = 100$.

Μ.ο. ελάχιστο αβγύρα το οποίο η εταιρεία θα αποδεχθεί αν ο πιθανός τω αβγύρα είναι 100€.

Λύση

$$u(100 - G) = E(u(100 - X))$$

$$100 - G - 0,001(100 - G)^2 = E((100 - X) - 0,001 E((100 - X)^2))$$

$$= E((100 - X)) - 0,001 [V(100 - X) + E^2(100 - X)]$$

$$\Rightarrow 100 - G - 0,001(100 - G)^2 = 0 - 0,001[100 - 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - G - 0,001(100 - G)^2 = 0,1 \Rightarrow$$

$$0,001(100 - G)^2 - (100 - G) + 0,1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 1000x + 100 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 1000^2 - 4 \cdot 100 = 999.600$$

$$x_1 = 100,1 \quad \text{ή} \quad x_2 = -900,1$$

αποδεκτή

Άσκηση

Έστω $u(w) = a \ln(w)$, $a > 0$, $w=2$ πλοίο αρίστη και $f(x)=1$, $0 < x < 1$ η συν. αρίστη. Ν.β. αβγατίστερο.

Λύση

$$u(w-h) = E(u(w-x)) \Rightarrow$$

$$a \ln(w-h) = \int_0^1 a \ln(w-x) dx = 0,3863 \cdot a.$$

$$(\int \ln x dx = x \ln x - x)$$

$$\ln(2-h) = 0,3863 \Rightarrow h = 0,528474$$

Άσκηση

Αντίστοιχη τυχαία αρίστη X , η οποία ακολουθεί την Γαμ. κατανομή με $a=1,5$ και $b=0,015$.

Το ατόμο έχει βασίμως σε υψηλότερο $u(w) = -e^{-aw}$ προφίλ η έχει πτώση αβγών πληρώσεως αβγατίστερο 100€ Το ατόμο έχει την προτίμηση να αβγατίσει με το υπερκέρτος αβγών?

Λύση

$$u(w-h) = E(u(w-x)) \Rightarrow \text{Συνάρτηση αβγατίστων} \\ \text{υψηλότερο.}$$

$$-e^{-a(w-h)} = E(-e^{-a(w-x)}) \Rightarrow$$

$$-e^{-aw} e^{ah} = -e^{-aw} E(e^{ax}) \Rightarrow$$

$$e^{ah} = M_x(a) \Rightarrow$$

$$h = \frac{\log M_x(a)}{a}$$

Αρα $G = \frac{\ln M_x(a)}{a}$ π

$$G = \frac{\ln \left(\frac{0,015}{0,015 - 0,001} \right)^{3,5}}{0,001} = 103,79.$$

Συνεπώς το κόστος είναι αναμενόμενο να αυξηθεί π.σ. το αέριο που 100€.