

Τιμολόγηση Ασφαλιστρων - Μέθοδοι Τιμολόγησης

Άσκηση 1

Ασφάλιστρο: 1000 Ευρώ

Γενικά έξοδα: 12%

Φόροι και άδειες: 6% ✂

Κέρδος και ενδεχόμενα απώλειας: 5%

Προμήθειες: 15%

Αν οι φόροι και οι άδειες για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο θα είναι ένα πάγιο ποσό των 100 Ευρώ, ποια η επίδραση στο ασφάλιστρο;

Τιμολόγηση Ασφαλιστρων - Μέθοδοι Τιμολόγησης

Λύση: Ο μεταβλητός συντελεστής ισούται με

$V = 0.12 + 0.15 + 0.06 = 0.33$ και το κέρδος είναι $Q = 0.05$. Το υπάρχον ασφάλιστρο θα ισούται με:

$$\begin{aligned}\underline{\bar{R}_0} &= \frac{(\bar{L} + \bar{\Delta}_{LAE} + \bar{\Delta}_{Fix})}{(1 - V - Q)} \quad \text{4} \\ \Rightarrow 1000 &= \frac{(\bar{L} + \bar{\Delta}_{LAE} + \bar{\Delta}_{Fix})}{(1 - 0.12 - 0.15 - 0.06 - 0.05)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{L} + \bar{\Delta}_{LAE} + \bar{\Delta}_{Fix}} = 1000 (0.62) = \underline{\underline{620.}}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

Το σύνολο των πάγιων δαπανών (αναμενόμενο μέσο κόστος ζημιάς, συν ΕΔΖ, συν πάγιες δαπάνες ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο) είναι 620.
Έτσι το νέο ασφαλιστρο υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{(\bar{L} + \bar{\Delta}_{LAE} + \bar{\Delta}_{Fix})}{(1 - \underline{V} - Q)} \\ &= \frac{620}{(1 - \underline{0.12} - \underline{0.15} - \underline{0.05})} \\ &= \underline{911.7647}. \quad \leftarrow\end{aligned}$$

Άρα, το νέο ασφαλιστρο συμπεριλαμβανομένου του νέου φόρου των 100 Ευρώ είναι

$$(911.7647 + 100) = \underline{1011.7647}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Balancing Back

Άσκηση 2

Τα δεδομένα μιας ασφαλιστικής εταιρείας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Δεν το χρειάζομαι για αυτήν την προβολή!!!

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Ομάδα (Περιοχή)	Τρέχουσα Σχετικότητα	Πλήθος Ασφαλισμένων Αυτοκινήτων (MEK)	Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο	Ζημιές (L) και ΔΕΔΖ (ALAE)
A	1.00 .	70 .	1000 -	700 .
B	1.10 .	40 .	800 -	500 .

Να βρεθούν: α) οι ενδεικτικές σχετικότητες ως προς την ομάδα βάσης A με τη μέθοδο καθαρού ασφαλίστρου, β) Υποθέτουμε ότι το υπάρχον ασφάλιστρο για την κλάση A είναι 200 ευρώ. Έστω ότι θέλουμε μία αύξηση της τιμής του ασφαλίστρου μεγέθους 10%. Να βρεθεί ο συντελεστής off-balance και ο συντελεστής balance-back με βάση τις νέες ενδεικτικές σχετικότητες που έχουν υπολογιστεί.

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Balancing Back

Λύση:

α) Η νέα ενδεικτική σχετικότητα της ομάδας B (A είναι η ομάδα βάσης) με βάση τον δείκτη κόστους ζημιών: καθαρός αβγαλίστρος (μικρότερος)

$$\rightarrow LC_A = \frac{\text{Ζημιές A}}{M_{EK_A}} = \frac{700}{70} = \underline{10}$$

$$\rightarrow LC_B = \frac{\text{Ζημιές B}}{M_{EK_B}} = \frac{500}{40} = \underline{12.5}$$

Τιμολόγηση Ασφαλιστρών - Balancing Back

και οι ενδεικτικές σχετικότητες υπολογίζονται ως

$$\rightarrow D_{newA} = LC_A / LC_A = 10/10 = 1$$

$$\rightarrow D_{newB} = \underline{LC_B} / \underline{LC_A} = \underline{12.5/10} = \underline{1.25}$$

β) Ας υποθέσουμε ότι το υπάρχον ασφαλιστρο για την κλάση A είναι 200 Ευρώ και η μεταβολή στην τιμή μέτρησης βάσης είναι 10%. Τότε το δεδολεωμένο ασφαλιστρο σε τρέχουσες τιμές (ΔΑΤΤ) είναι

$$\rightarrow \underline{\Delta A T T} = \left[\overset{D_{oldA}}{(1.00)} \left(\overset{D_{oldB}}{(200)} \right) (70) \right] + (1.10)(200)(40)$$

1 A 21: 100
0.9 B 25: 90

$$= \underline{22800.}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

Αν η τιμή μέτρησης βάσης μεταβάλλεται κατά 10%, τότε το δεδουλευμένο ασφαλιστρο με βάση τις προτεινόμενες σχετικότητες (ΔΑΠΣ) θα είναι

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{\Delta\text{ΑΠΣ}} &= \overset{D_{\text{newA}}}{(1.00)} \overset{D_{\text{newB}}}{(1.10)} (200)(70) + (1.25) \overset{D_{\text{newB}}}{(1.10)} (200)(40) \\ &= \underline{26400} \end{aligned}$$

και η αύξηση σε σχέση με το δεδουλευμένο ασφαλιστρο σε τρέχουσες τιμές (ΔΑΤΤ) είναι

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\Delta\text{ΑΠΣ}}{\Delta\text{ΑΤΤ}} &= \frac{26400}{22800} = \underline{1.157895} \quad \neq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Αύξηση} = (1.157895 - 1.00)100\%$$

$$= \underline{15.7895\%}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

Αν δεν αλλάξουμε την τιμή μέτρησης βάσης, η μεταβολή των σχετικοτήτων θα αυξήσει τα εισερχόμενα ασφαλίστρα κατά 15.7895%. Θεωρώντας μια μεταβολή στην τιμή μέτρησης μεγέθους 10%, χωρίς εξισορρόπηση ισοζυγίου (balance-back) τα εισερχόμενα ασφαλίστρα θα αυξηθούν κατά 15.7895%. Για να πετύχουμε το στόχο μεταβολής 10%, δεν θα πρέπει να αυξήσουμε την τιμή μέτρησης βάσης κατά 10% αλλά σύμφωνα με το συντελεστή

$$\frac{1.10}{1.157895} = \underline{0.9499}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Μεταβολή} &= (0.9499 - 1.00)100\% \\ &= -5.01\%.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να έχουμε μια συνολική αύξηση 10%, θα πρέπει να μειώσουμε την τιμή μέτρησης βάσης κατά -5.01%, δηλαδή το

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

ασφάλιστρο από 200 Ευρώ θα πρέπει να γίνει $200(0.9499) = \underline{189.98}$ Ευρώ. Για να επαληθεύσουμε τη συνολική αύξηση 10% λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \Delta\text{ΑΠΣ2} &= (1.00)(\underline{1.10})(\underline{189.98})(70) + (1.25)(\underline{1.10})(\underline{189.98})(40) \\ &= \underline{25077.36} \end{aligned}$$

$\downarrow$ via ασφάλιστρο βάλω

και η αύξηση ως προς το δεδολεμένο ασφάλιστρο σε τρέχουσες τιμές ($\Delta\text{ΑΤΤ}$) είναι

$$\Rightarrow \frac{\Delta\text{ΑΠΣ2}}{\Delta\text{ΑΤΤ}} = \frac{25077.36}{22800} = \underline{1.09984}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Αύξηση} &= (1.09984 - 1.00)100\% \\ &= \underline{9.984\% \approx 10\%}. \end{aligned}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

Άσκηση 3

Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα.

Βαλάν

(1)	(2)	(3)	(4)
Ομάδα (Περιοχή)	Τρέχουσα Σχετικότητα	Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο	Ζημιές (L) και ΔΕΔΖ (ALAE)
A	1.0	500 •	320 •
B	1.1	400 •	280 •

Η υπάρχουσα τιμή του ασφαλίστρου είναι 100 Ευρώ και θέλουμε μία αύξηση μεγέθους 15%. Να βρεθούν: α) ο δείκτης ζημιών για κάθε κλάση και οι ενδεικτικές σχετικότητες ως προς την κλάση (ομάδα) A, β) ο συντελεστής off-balance, γ) ο συντελεστής balance-back και δ) τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα σύμφωνα με τις ενδεικτικές αλλαγές τιμών, έτσι ώστε να έχουμε μία συνολική αύξηση μεγέθους 15%.

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

Εξισορρόπηση Ισοζυγίου με Βάση το Δείκτη Ζημιάς

(1) Ομάδα (Περιοχή) (i)	(2) Τρέχουσα Σχετικότητα	(3) Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο	(4) Ζημιές (L) και ΔΕΔΖ (ALAE)	(5) Δείκτης Ζημιάς $LR=(4)/(3)$	(6) Ενδεικτική Σχετικότητα: D_{newi}
A	1.00	500	320	0.64 -	1.000
B	1.10	400	280	0.70 .	1.2031

Λύση: α) Οι νέες ενδεικτικές σχετικότητες υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \underline{D_{newB}} &= \underline{D_{oldB}} * \underline{LR_B / LR_A} \\ &= (1.10) * 0.70 / 0.64 \\ &= \underline{1.2031.} \end{aligned}$$

μ. καθαρός
αβφαλίςτρον

$$D_{newB} = \frac{LR_B}{LR_A}$$

(Αντίστροφο)

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Balancing Back

β) Αν έχουμε καθορίσει ότι χρειαζόμαστε μία αύξηση μεγέθους 15%, η ενδεικτική τιμή είναι $(1.15)(100) = \underline{115}$ Ευρώ. Τότε η ενδεικτική αλλαγή τιμών για κάθε ομάδα είναι:

→ Περιοχή Α: $\frac{\overbrace{(1.00)}^{\text{New A}} \overbrace{(115)}^{\text{Old A}}}{\overbrace{(1.00)}^{\text{New A}} \overbrace{(100)}^{\text{Old A}}} = 1.15,$ Αύξηση 15%, -

Περιοχή Β: $\frac{\overbrace{(1.2031)}^{\text{New B}} \overbrace{(115)}^{\text{Old B}}}{\overbrace{(1.10)}^{\text{New B}} \overbrace{(100)}^{\text{Old B}}} = \underline{1.2578},$ Αύξηση 25.78%. '

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω ενδεικτικές αλλαγές τιμών στα υφιστάμενα ασφάλιστρα, έχουμε

→ ΔΑ-Περιοχή Α = $\underline{(500)(1.15) = 575},$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Balancing Back

$$\rightarrow \Delta\text{Α-Περιοχή B} = (400)(1.2578) = 503.12.$$

Έτσι το σύνολο των δεδουλευμένων ασφαλίσεων είναι

$$\begin{aligned}\text{Νέο Δεδουλευμένο Ασφάλιστρο (ΔΑ)} &= 575 + 503.12 \\ &= \underline{1078.12}.\end{aligned}$$

Συγκρινόμενο με το σύνολο των υφιστάμενων δεδουλευμένων ασφαλίσεων

$$\frac{\text{Νέο ΔΑ}}{\text{Υπάρχον ΔΑ}} = \frac{1078.12}{\underbrace{900}_{500 + 400}} = \underline{1.1979}, \neq 1.15$$

παρατηρούμε ότι υπάρχει μία αύξηση μεγέθους 19.79%. Η διαφορά μεταξύ 15% και 19.79% είναι η απόκλιση από το ισοζύγιο (off-balance).

Τιμολόγηση Ασφαλίστρων - Balancing Back

γ) Για να πετύχουμε το στόχο μεταβολής 15% θα πρέπει να αυξήσουμε την τιμή μέτρησης βάσης με έναν συντελεστή απόκλισης ισοζυγίου (balance-back factor).

$$\frac{1.15}{1.1979} = 0.96.$$

δ) Η διορθωμένη τιμή βάσης του ασφαλίστρου γίνεται $(0.96)(115) = 110.4$, η οποία παράγει τις διορθωμένες αλλαγές τιμών ανά ομάδα:

$$\text{Περιοχή A: } \frac{(1.0000)(110.4)}{(1.0000)(100)} = 1.104, \quad \text{Αύξηση } \underline{10.4\%}, \quad -$$

$$\text{Περιοχή B: } \frac{(1.2031)(110.4)}{(1.1)(100)} = 1.2075, \quad \text{Αύξηση } \underline{20.75\%}, \quad \checkmark$$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Balancing Back

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω ενδεικτικές αλλαγές τιμών στα υφιστάμενα ασφαλίστρα, έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A\text{-Περιοχή A} = (500)(1.104) = 552, \\ \Delta A\text{-Περιοχή B} = (400)(1.2075) = 483. \end{array} \right.$$

Έτσι το σύνολο των δεδουλευμένων ασφαλίσεων (ΔA) είναι Νέο

$$\underline{\text{Νέο } (\Delta A)} = 552 + 483 = \underline{1035}.$$

Συγκρινόμενο με το σύνολο των υφιστάμενων δεδουλευμένων ασφαλίσεων

$$\frac{\text{Νέο } \Delta A}{\text{Υπάρχον } \Delta A} = \frac{1035}{900} = \underline{\underline{1.15}} \text{ (δηλαδή αύξηση 15\%)}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

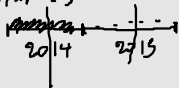
→ Συντελεστές Τάσης (Trend Factors)

Άσκηση 4

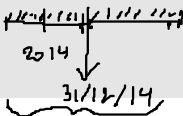
Μέσο Κόστος Ζημιάς (ΜΚΖ), Λογάριθμος ΜΚΖ

(1)	(2)	(3)	(4)
Έτος Ατυχήματος	Έτος - 2014 X	Μέσο Κόστος Ζημιάς Y*	Λογάριθμος Μέσου Κόστους Ζημιάς Y
2014	0	112.67	4.7244 = $\ln(112.67)$
2015	1	113.94	4.7357
2016	2	128.16	4.8533
2017	3	130.88	4.8743
2018	4	131.07	4.8757
2019	5	138.94	4.9340

Ατυχήματα



Ασφαλιστήριο Συμβολαίον



Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

Θα υπολογίσουμε τη μελλοντική τιμή του μέσου κόστους ζημιάς, της οποίας το μέσο σημείο (μέση ημερομηνία του έτους ατυχήματος) είναι η 1/11/2022.

Θα εφαρμόσουμε το εκθετικό μοντέλο παλινδρόμησης θέτοντας στον άξονα των Y το λογάριθμο του μέσου κόστους ζημιάς και στον άξονα των X τα έτη ατυχήματος, όπως εμφανίζονται στον πίνακα. Θεωρούμε ότι το έτος 2014 είναι το έτος μηδέν (0).

Το εκθετικό μοντέλο έχει τη μορφή

$$Y^* = \beta_0^* e^{\beta_1 X} u \quad (32)$$

με παραμέτρους β_0^* , β_1 και σφάλμα u . Λογαριθμίζοντας το μετατρέπουμε σε μορφή απλής γραμμικής παλινδρόμησης ως

$$\ln(Y^*) = \ln(\beta_0^*) + \beta_1 X + \ln(u) \Rightarrow Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon. \quad (33)$$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

Με βάση τις τιμές των X και Y αντίστοιχα του παραπάνω πίνακα εκτιμούμε τις παραμέτρους β_0 και β_1 της (33) και έχουμε

$$Y = \underset{\beta_0}{4.72654} + \underset{\beta_1}{0.04254}X$$

$$\Rightarrow \underline{Y^*} = \underline{e^{4.72654+0.04254X}}. \quad (34)$$

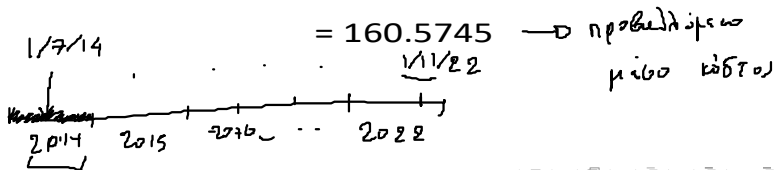
Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα πρέπει να γίνει πρόβλεψη της νέας τιμής του ασφαλίστρου, την 1/11/2022 με βάση το έτος ατυχήματος.

Με βάση την εξίσωση πρόβλεψης (34) και θεωρώντας ότι η αρχή της μέτρησης είναι η 1/7/2014, η τιμή του X είναι 8.33 (8 έτη και 4 μήνες) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} Y &= 4.7244 + 0.042546 (8.33) \\ &= 5.078808 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y^* = e^{4.7244 + 0.04254 (8.33)}$$



Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

Συνήθως, οι αναλογιστές δίνουν περισσότερο βάρος στα πρόσφατα έτη, που συνεπάγεται ότι η διαδικασία πρόβλεψης βάσει της γραμμικής παλινδρόμησης πρέπει να τροποποιηθεί, δηλαδή το προβαλλόμενο κόστος ζημιάς θα πρέπει να υπολογιστεί ως

$$\text{Προβαλλόμενο Κόστος Ζημιάς} = (\text{Παρατηρούμενο Κόστος Ζημιάς})e^{\beta_1 \times \gamma}.$$

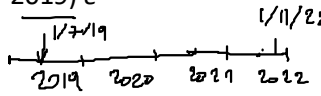
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μελλοντική τιμή του μέσου κόστους ζημιάς την 1/11/2022, βασιζόμενοι στα έτη ατυχήματος 2018 και 2019 θα πρέπει να υπολογίσουμε τα κάτωθι:

γ

$$\text{Προβαλλόμενο Κόστος Ζημιάς (με βάση το 2019)} =$$

L_0

$$= (\text{Παρατηρούμενο Κόστος Ζημιάς 2019}) e^{0.04254 \times \gamma}$$

$$= (\underline{138.94}) e^{0.04254 (\underbrace{3.33})} = \underline{160.0843}$$


Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

και

Προβαλλόμενο Κόστος Ζημιάς (με βάση το 2018) =

$$= (\text{Παρατηρούμενο Κόστος Ζημιάς 2018}) e^{0.04254 \times}$$

$$= \underbrace{(131.07)} e^{0.04254 \underbrace{(4.33)}}$$

$$= 157.5794.$$

Τιμολόγηση Ασφαλιστρών - Trend Factors

Με βάση το έτος ασφαλιστηρίου συμβολαίου θα πρέπει να τροποποιήσουμε τα έτη προβολής.

Έτσι, θεωρώντας το 2014 ως το έτος ασφαλιστηρίου συμβολαίου μηδέν (0), τότε η ημερομηνία αρχής της μέτρησης θα είναι η 31/12/2014 (ή 1/1/2015). Έτσι, η τιμή του X (μέχρι την 1/11/2022) θα είναι 7.83 (7 έτη και 10 μήνες). Έτσι:

$$7 + \frac{10}{12}$$

$$\rightarrow Y = 4.7244 + 0.042546 (7.83) \\ = 5.057535$$

$$\Rightarrow Y^* = e^{4.7244 + 0.04254 (6.75)} \\ = \underline{157.2025}$$

Τιμολόγηση Ασφαλίσεων - Trend Factors

Προβαλλόμενο Κόστος Ζημιάς (με βάση το 2018) =

$$= (\text{Παρατηρούμενο Κόστος Ζημιάς 2018}) e^{0.04254 \times}$$

$$= (131.07) e^{0.04254 \times (3.83)}$$

$$= 163.5257.$$

Αντικαθιστώντας

$$u(w) = a \ln w$$

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

$$w = 4$$

Αντικαθιστώντας?

Λίγη

$$u(w - G) = E(u(w - X)) \Rightarrow$$

$$a \ln(4 - G) = \int_0^1 a \ln(4 - x) dx \Rightarrow$$

$$\ln(4 - G) = \int_0^1 \ln(4 - x) dx \quad \text{Θέτω } u = 4 - x.$$

$$= \int_4^3 \ln u (-du) = \int_3^4 \ln u du =$$

$$= [u \ln u - u]_3^4 = 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3 = 1,2793 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(4 - G) = 1,2793 \Rightarrow$$

$$4 - G = e^{1,2793} \Rightarrow$$

$$\boxed{G = 0,5121}$$

Аванс о выплатах

$$W = 225$$

$$X \sim U(0, 25)$$

$$u(W) = \sqrt{W}$$

$$G = ?$$

Найти

$$u(W-G) = E(u(W-G)) \Rightarrow$$

$$\sqrt{W-G} = \int_0^{25} \sqrt{225-x} \cdot \frac{1}{25} dx =$$

$$= \frac{1}{25} \left[-\frac{(225-x)^{3/2+1}}{3/2} \right]_0^{25} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{2}{3} \left[-(225-25)^{3/2} + 225^{3/2} \right] = 14,57528 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{225-G} = 14,57528 \Rightarrow \boxed{G = 12,5613}$$