

## Άσκηση 1

Δίνεται λογαριθμική ημερίδα:

| $i/j$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $i = 1, 2, 3$ |
|-------|-------|-------|-------|---------------|
| $a_1$ | 6     | 4,4   | 2,2   | $j = 0, 1, 2$ |
| $a_2$ | 5,6   | 4,2   | 2,2   |               |
| $a_3$ | 5,8   | 2,31  | 2,32  |               |

Να εφαρμόσει το μοντέλο λογαριθμικής ημερίδας:  $\ln Y = Z = a + j\beta + \varepsilon$ ,  $j = 0, 1, 2$   
 δοθέντος  $\varepsilon \sim N(0, \hat{\sigma}^2 = 0,051984)$ .

Λύση

α) Να συμπληρώσει πίνακα οριστικών

$$Z = \begin{bmatrix} 6 \\ 4,4 \\ 2,2 \\ 5,6 \\ 4,2 \\ 5,8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Να δείξετε ότι οι συντελεστές λογαριθμικής ημερίδας είναι  $a = 5,86$  και  $\beta = -1,74$ .

Λύση

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Z$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4,4 \\ 2,2 \\ 5,6 \\ 4,2 \\ 5,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Ορίζεται  $D = 6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 20$ .

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 9/20 & -4/20 \\ -4/20 & 6/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/10 \\ -2/10 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Άρα  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Z = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/10 \\ -2/10 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28,2 \\ 13,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,86 \\ -1,74 \end{bmatrix}$

γ) Να υπολογιστεί μέση τιμή, διασπορά και συνδιασπορά  $Y_{22}$ ,  $Y_{31}$ ,  $Y_{32}$ .

Λύση.

$$E(Z_i) = \hat{Z}_i = \begin{matrix} & 3 \times 2 & & 2 \times 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 5,86 \\ -1,74 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2,38 \\ 4,12 \\ 2,38 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \hat{Z}_{22} \\ \hat{Z}_{31} \\ \hat{Z}_{32} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} E(Z_{22}) \\ E(Z_{31}) \\ E(Z_{32}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Υπολογισμός του MSE:

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Z_i - \hat{\beta}_1 X_{i1} - \hat{\beta}_2 X_{i2})$$

$$s_z^2 = \frac{1}{6-2} \cdot [(6 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 0)^2 + (4,4 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 1)^2 + (2,2 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 2)^2 + (5,6 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 0)^2 + (4,2 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 1)^2 + (5,8 - 5,86 \cdot 1 + 1,74 \cdot 0)^2] \approx 0,052$$

Παραγωγή διασπορών - Διασπορών:

$$s_z^2 = (X' (X'X)^{-1} X' + I) = \begin{bmatrix} \text{Var}(Z_{22}) & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{31}) & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{31}, Z_{22}) & \text{Var}(Z_{31}) & \text{Cov}(Z_{31}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{32}, Z_{22}) & \text{Cov}(Z_{32}, Z_{31}) & \text{Var}(Z_{32}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0884 & 0,0156 & 0,0364 \\ 0,0156 & 0,0624 & 0,0156 \\ 0,0364 & 0,0156 & 0,0884 \end{bmatrix}$$

Μέση τιμή

$$E(Y_{22}) = \exp\left(\underbrace{E(Z_{22})}_{(2,38)} + \underbrace{\frac{\text{Var} Z_{22}}{2}}_{0,0884/2}\right) = 11,29319$$

$$E(Y_{31}) = 63,51017$$

$$E(Y_{32}) = 11,29319.$$

Διασπορά

$$\text{Var}(Y_{22}) = (E(Y_{22}))^2 \cdot (\exp(\text{Var} Z_{22}) - 1) = 11,29319^2 \cdot [e^{0,0884} - 1] = 11,78753$$

$$\text{Var}(Y_{31}) = 259,7117$$

$$\text{Var}(Y_{32}) = 11,78753$$

### 4) Συμμεταστροφισμός

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{22}, Y_{31}) &= E(Y_{22}) E(Y_{31}) \cdot [e^{\rho(\text{Cov}(Z_{22}, Z_{31}))} - 1] = \\ &= 11,29319 \cdot 63,51017 \cdot [e^{0,0156} - 1] = 11,27655 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Y_{22}, Y_{32}) = 4,727841$$

$$\text{Cov}(Y_{31}, Y_{32}) = 11,27655.$$

5) Να βρείτε το συνολικό τελικό κέρδη in

Λύση.

$$R = E(Y_{22}) + E(Y_{31}) + E(Y_{32}) = 11,29319 + 63,51017 + 11,29319 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 86,09655}$$

6) Να υπολογίσετε τα τελικά οφέλη.

$$s.e. \hat{Y}_{22} = \sqrt{\text{Var } Y_{22}} = \sqrt{11,78753} = 3,432972$$

$$s.e. \hat{Y}_{31} = \sqrt{\text{Var } Y_{31}} = \sqrt{259,7117} = 16,11557$$

$$s.e. \hat{Y}_{32} = \sqrt{\text{Var } Y_{32}} = \sqrt{11,78753} = 3,432972.$$

## Άσκηση 2

Δίνεται τριπλό λογαριθμικό μοντέλο.

| $i/j$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | 3     | 3,5   | 4     |
| $a_2$ | 2,5   | 2     |       |
| $a_3$ | 1,5   |       |       |

Να εφαρμοστεί το πολλαπλό παλινδρόμηση:  $Y_{ij} = Z = \alpha \cdot i + \beta \cdot j + \varepsilon_{ij}$ ,  
 $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 0, 1, 2$ , με  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, 2,276974)$ .

α) Να συμπληρωθεί πίνακας δεδομένων και προβλέψεων.

Λύση

$$Z = \begin{bmatrix} 3 \\ 3,5 \\ 4 \\ 2,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Να δείξετε ότι οι συντελεστές παλινδρόμησης είναι  
 $\alpha = 0,8052632$  και  $\beta = 1,5789474$ .

Λύση

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Z$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ορίζεται:  $D = 20 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 95$ .

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6/95 & -5/95 \\ -5/95 & 20/95 \end{bmatrix}$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3,5 \\ 4 \\ 2,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 13,5 \end{bmatrix}$$

Άρα  $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 6/95 & -5/95 \\ -5/95 & 20/95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 13,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8052632 \\ 1,5789474 \end{bmatrix}$

γ) Υπολογίστε την τιμή, διασπορά και συσχετισμό  $\gamma_{22}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$ .

$$E(Z_f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8052632 \\ 1,5789474 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,768921 \\ 3,994737 \\ 5,573684 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε MSE:

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Z_i - \hat{\alpha} X_{i1} - \hat{\beta} X_{i2})^2 = 2,276974.$$



Πίνακας Διασποράς - Συνδιασποράς:

$$\sigma_z^2 (X_f (X'X)^{-1} X_f' + I) = \begin{bmatrix} \text{Var}(Z_{22}) & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{31}) & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{31}, Z_{22}) & \text{Var}(Z_{31}) & \text{Cov}(Z_{31}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{32}, Z_{22}) & \text{Cov}(Z_{32}, Z_{31}) & \text{Var}(Z_{32}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3,8109349 & 0,6628532 & 1,581898 \\ 0,6628532 & 1,581898 & 1,174439 \\ 1,581898 & 1,174439 & 4,050616 \end{bmatrix}$$

Μέση τιμή

$$E(Y_{22}) = \exp\left(E(Z_{22}) + \frac{\text{Var}(Z_{22})}{2}\right) = e^{4,768421 + \frac{3,8109349}{2}} = 791,4673.$$

$$E(Y_{31}) = 287,2988$$

$$E(Y_{32}) = 1996,183$$

Διασποράς

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{22}) &= [E(Y_{22})]^2 [\exp(\text{Var}(Z_{22})) - 1] = 791,4673^2 (e^{3,8109349} - 1) = \\ &= 27683,190 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y_{31}) = 2227,135$$

$$\text{Var}(Y_{32}) = 224870,694$$

Συνολική απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{22}, Y_{31}) &= E(Y_{22}) E(Y_{31}) [\exp(\text{Cov}(Z_{22}, Z_{31})) - 1] = \\ &= 791,4673 \cdot 287,2988 \cdot (e^{0,8628532} - 1) = 311.501,2 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Y_{22}, Y_{32}) = 610.506,7$$

$$\text{Cov}(Y_{31}, Y_{32}) = 1282,536$$

5) Να βρεθεί το τμήμα συνολικού κινδύνου.

Λύση

$$R = E(Y_{22}) + E(Y_{31}) + E(Y_{32}) = 3074,95$$

ε) Να υπολογιστεί το τμήμα βλάβης.

$$se \hat{Y}_{22} = \sqrt{\text{Var} Y_{22}} = 5261,482$$

$$se \hat{Y}_{31} = 1492,359$$

$$se \hat{Y}_{32} = 14995,69$$