

Άσκηση 1

Αυθαίρετο αβαλίσιο (Τύπος): 350€

Πιθανότητα καταστροφής (ιδιοκτήτης λόγω πυρκαγιάς): 0,002

Κόστος σε περίπτωση καταστροφής λόγω πυρκαγιάς: 260.000

Αξία υπερίκτιστος χωρίς δανείον αβαλίσιο: 0

-/- δανείον 350€ : 2

-/- δανείον 260.000€ : 2000

Να βρείτε αν ο ιδιοκτήτης πρέπει να ασφαλίσει το ακίνητο με βάση:

α) Το αναμενόμενο κόστος (μηνιά)

β) Το αναμενόμενο κόστος υπερίκτιστος.

Λύση

α) Αναμενόμενο κόστος αν ασφαλιστεί: $350 \cdot 0,998 + 350 \cdot 0,002 = 350$

Αναμενόμενο κόστος αν δεν ασφαλιστεί: $0 \cdot 0,998 + 260.000 \cdot 0,002 = 520$

Αρα με βάση το αναμενόμενο κόστος, ο ιδιοκτήτης θα το ασφαλίσει καθώς $350 < 520$.

β) Αναμενόμενο κόστος υπερίκτιστος αν ασφαλιστεί:

$$350 \cdot 0,998 \cdot 2 + 350 \cdot 0,002 \cdot 2 = 700$$

Αναμενόμενο κόστος υπερίκτιστος αν δεν ασφαλιστεί:

$$0 \cdot 0,998 \cdot 0 + 260.000 \cdot 0,002 \cdot 2000 = 1.040.000$$

Οπότε και σε αυτή την περίπτωση ο ιδιοκτήτης επιλέγει να ασφαλίσει.

Άσκηση 2.

Συνάρτηση υπερίκνησης ατόμων: $u(w) = 1 - e^{-w/10000}$, w : πλούτος.

Αν τρέχον πλούτος είναι 2000, υπολογίστε το μικρότερο ποσό που θα έπαιζε το άτομο αυτό για συμμετοχή σε τυχερό παιχνίδι (πλην) κερδίζοντας όταν έχει πιθανότητα 50% να κερδίσει 1500€. Στην περίπτωση που κερδίσει δεν πληρώνει τίποτα το ποσό που έπαιζε.

Λύση.

Έστω x το ποσό στο παιχνίδι.

Αν κερδίσει ο πλούτος που γίνεται: $2000 - x + 1500 = 3500 - x$

Αν χάσει ———— : $2000 - x$

Αναμενόμενη υπερίκνηση: $E(u) = 50\% \cdot u(3500 - x) + 50\% \cdot u(2000 - x)$

Υπερίκνηση αν δεν παίζει: $u(2000) = 1 - e^{-2000/10000} = 0,1812692$

Εξισώνοντας:

$$u(2000) = E(u) \Rightarrow 0,5 \cdot (1 - e^{-\frac{3500-x}{10000}}) + 0,5(1 - e^{-\frac{2000-x}{10000}}) = 0,1812692$$

$$\Rightarrow 0,5 - 0,5 \cdot e^{-\frac{3500}{10000}} e^{\frac{x}{10000}} + 0,5 - 0,5 \cdot e^{-\frac{2000}{10000}} e^{\frac{x}{10000}} = 0,1812692 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,5 \cdot e^{-0,35} e^{\frac{x}{10000}} + 0,5 \cdot e^{-0,2} e^{\frac{x}{10000}} = 0,818731 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{10000}} = 1,07486 \Rightarrow \frac{x}{10.000} = \ln 1,07486 \Rightarrow \boxed{x = 721,9009}$$

Άσκηση 3.

Δεδομένα ασφαλιστικής παραχώρησης των ασφαλιστών είναι:

Ομάδα	Τρίμηνα Ισχυριμένα	Πληρωμ. ΜΕΚ	Οδοντ. Αποβόρο	Ζημ. + ΑΛΑΕ
A	1	80	8000	6400
B	1,1	40	4400	3300

Να βρεθεί:

- ο δείκτης πληρωμ. για κάθε κλάση
- οι ενδεικτικοί εξισωμένοι κ. ηρω. της ομάδας A με τη μέθοδο
 - δίκτα πληρωμ.
 - κρίσης πληρωμ.
- Εάν οι δείκτες κλάσης γίνουν αμοιβαίους +10%. Να βρεθεί ο συντελεστής off-balance και balance back με βάση τη νέα ενδεικτική εξισωμένη κ. ηρω. υπολογιστεί.

Λύση.

$$a) LR_A = \frac{6400}{8000} = 0,8$$

$$LR_B = \frac{3300}{4400} = 0,75$$

$$b) i) D_{new,B} = D_{old,B} \cdot \frac{LR_B}{LR_{Base}} = 1,1 \cdot \frac{0,75}{0,8} = 1,03125$$

(Ομάδα βάσης η A).

$$ii) LC_A = \frac{Z_{μικρ} A}{MEK_A} = \frac{6400}{80} = 80$$

$$LC_B = \frac{Z_{μικρ} B}{MEK_B} = \frac{3300}{40} = 82,5$$

$$D_{newA} = \frac{L_{CA}}{L_A} = \frac{80}{80} = 1$$

$$D_{newB} = \frac{L_{CB}}{L_A} = \frac{82,5}{80} = 1,03125$$

γ) Υπολογίζουμε ότι το κεφάλαιο του κλάου Α είναι 100€ και η μεταβολή της τιμής κέρσους βάσης είναι +10%.
Τότε το δίδακτικό αβ/επο σε τρέχουσα τιμή είναι:

⊛ Μεθοδολογία LL

$$\Delta ATT = 1 \cdot 100 \cdot 80 + 1,1 \cdot 100 \cdot 40 = 12400$$

Το δίδακτικό αβ/επο με βάση τη προτεινόμενη σχετικότητα:

$$\Delta ANS = 1 \cdot 1,1 \cdot 100 \cdot 80 + 1,03125 \cdot 1,1 \cdot 100 \cdot 40 = 13337,5$$

$$\text{Τότε: } \frac{\Delta ANS}{\Delta ATT} = \frac{13337,5}{12400} = 1,0756 \neq 1,1$$

$$\Rightarrow \text{Αύξηση} = 1,0756 - 1 = 7,56\%$$

Διότι αν δεν προσαρμόζατε την μεταβολή της τιμής κέρσους βάσης, το αβ/επο θα αυξανόταν κατά 7,56% και όχι κατά 10%.

Αρα θα πρέπει να γίνει αύξηση της βάσης σύμφωνα με τον συντελεστή:

$$\frac{1,1}{1,0756} = 1,02268 \rightarrow \text{Μεταβολή} = 2,268\%$$

BALANCE BACK FACTOR

Το κεφάλαιο λοιπόν από 100€ πρέπει να γίνει: $100 \cdot 1,02268 = 102,268$.

Ενδεικτικά:

$$\Delta \text{ΑΠΣ 2} = 1 \cdot 1,1 \cdot 102,268 \cdot 80 + 1,03125 \cdot 1,1 \cdot 102,268 \cdot 40 = 13639,99 \sim 13640$$

$$\text{Άρα } \frac{\Delta \text{ΑΠΣ 2}}{\Delta \text{ΑΤΤ}} = \frac{13640}{12400} = 1,1 \quad \checkmark$$

⊙ Mc Loss Ratio μέθοδο:

Εξισοτιών αλλαγές για κάθε οφειλή:

$$\text{Ποσότητα A: } \frac{1 \cdot 1,1 \cdot 100}{1 \cdot 100} = 1,1 \quad (\text{Αύξηση } 10\%)$$

$$\text{Ποσότητα B: } \frac{1,03125 \cdot 1,1 \cdot 100}{1,1 \cdot 100} = 1,03125 \quad (\text{Αύξηση } 3,125\%)$$

Εφαρμόζουμε στα Δεδομένα Αρχ/εργα:

$$\Delta \text{Α - ποσότητα A} = 8000 \cdot 1,1 = 8800$$

$$\Delta \text{Α - ποσότητα B} = 4400 \cdot 1,03125 = 4537,5$$

$$\text{Νέο Δεδομ. αργ/εργα: } 8800 + 4537,5 = 13337,5$$

Συγκρίνουμε με το οικόπεδο των τριχούτων ΔΑ:

$$\frac{\text{Νέο } \Delta \text{Α}}{\text{Ταμχον } \Delta \text{Α}} = \frac{13337,5}{12400} = 1,0756 \neq 1,1$$

$$\text{Υπολογίζουμε BALANCE-BACK FACTOR: } \frac{1,1}{1,0756} = 1,02268 \quad \text{Ε.Ο.Κ.}$$

Άσκηση 4

Δίνονται εμπειρικοί τριγωνοί πυρηνών.

Έτος Ατυχήματος	0	1	2
2023	50	60	66
2024	45	54	
2025	70		

Να βρεθούν οι τελικοί πυρήνι και τα αποτελέσματα

A) με τον πίνακα Chain ladder

B) με τον πίνακα B-F, αν τα αβγάκια για το 2023 ήταν 82,5, για το 2024 62,5 και για το 2025 90, και ο δείκτης πυρήνι για κάθε έτος ορίζεται 80%.

Γ) Με τον C-C πίνακα θα βρεθούν οι νέες αβγάκια και ο δείκτης πυρήνι B.

Δ) Με τον Separation πίνακα, αν οι αβγάκια πυρήνι για το 2023 ήταν 5, για το 2024 4 και για το 2025 5.

Λύση.

A)	1/0	2/1
Ιντερλόκι	$f_1 = 1,2$	$f_2 = 1,1$
Εξισότι		

$$\text{όπου } f_1 = \frac{60 + 54}{50 + 40} = 1,2 \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{66}{60} = 1,1.$$

Έτος	Πληρωσίμους (Διαβίοντες)	Τελικοί Ζητή	Αποτελέσματα
2023	66	66	0
2024	54	59,4 (54 · f_1)	4,9
2025	70	92,4 (70 · $f_1 \cdot f_2$)	22,4

B/	Ero)	Anzahlgera	LR	V_i^{Prior}
	2023	82,5	80%	66
	2024	62,5	80%	50
	2025	90	80%	72

$$F_2^{ult} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{1,1}$$

$$F_1^{ult} = \frac{1}{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{1,32}$$

Nisi (upij) Exponen:

$$\hat{C}_{21} = V_2^{Prior} \cdot F_2^{ult} = 45,45$$

$$\hat{C}_{30} = V_3^{Prior} \cdot F_1^{ult} = 54,54$$

Analiza: $\hat{R}_2^{BF} = 50 - 45,45 = 4,55$

$$\hat{R}_3^{BF} = 72 - 54,54 = 17,46$$

$$R^{TotBF} = 22,01$$

Takij /upij

$$\hat{C}_{22}^{BF} = 54 + 4,55 = 58,55$$

$$\hat{C}_{32}^{BF} = 70 + 17,46 = 87,46$$

$$C_{Tot}^{BF} = 66 + 58,55 + 87,46 = 212,01$$

5) Cape Cod:

$$L = \frac{66 + 54 + 70}{82,5 \cdot 1 + 62,5 \cdot \frac{1}{1,1} + 90 \cdot \frac{1}{1,32}} = 0,915663$$

Anodipera:

$$\hat{R}_2^u = (1 - F_2^u) \cdot L \cdot P_2 = \left(1 - \frac{1}{1,1}\right) \cdot 0,915663 \cdot 62,5 = 5,2026$$

$$\hat{R}_3^u = (1 - F_3^u) \cdot L \cdot P_3 = \left(1 - \frac{1}{1,32}\right) \cdot 0,915663 \cdot 90 = 19,9781$$

$$\hat{R}_{\text{cor}}^u = 5,2026 + 19,9781 = 25,18$$

Telikij kyllä:

$$\hat{C}_2^u = 54 + 5,2026 = 59,2026$$

$$\hat{C}_3^u = 70 + 19,9781 = 89,9781$$

$$\hat{C}_{\text{cor}}^u = 66 + 54 + 70 + 25,18 = 215,18$$

Δ) Separation.

Κίνη το τρίτο προσέφυκο.

Εξο)	0	1	2	Αποσύνθετο Πλῆθος, ημίν
2023	50	10	6	5
2024	45	9		4
2025	70			5

Διαπίρ τι πλῆθος:

Εξο)	0	1	2
2023	10	2	1,2
2024	11,25	2,25	
2025	14		

↓ πλῆθος διαχωρισμοῦ

Εξο)	0	1	2	Αν. Πλῆθος, ημίν
2023	$\lambda_0 r_0 = 10$	$\lambda_1 r_1 = 2$	$\lambda_2 r_2 = 1,2$	$n_1 = 5$
2024	$\lambda_1 r_0 = 11,25$	$\lambda_2 r_1 = 2,25$	$\lambda_3 r_2 = \dots$	$n_2 = 4$
2025	$\lambda_2 r_0 = 14$	$\lambda_3 r_1 = \dots$	$\lambda_4 r_2 = \dots$	$n_3 = 5$

Κίνη αἰσθημα ἀνῶτα:

$$\delta_0 = \lambda_0 r_0 = 10$$

$$\delta_1 = \lambda_1 r_0 + \lambda_1 r_1 = 11,25 + 2 = 13,25$$

$$\delta_2 = \lambda_2 r_0 + \lambda_2 r_1 + \lambda_2 r_2 = 14 + 2,25 + 1,2 = 17,45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 (r_0 + r_1 + r_2) = 17,45 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 17,45}$$

1

$$\lambda_2 r_2 = 1,2 \Rightarrow r_2 = \frac{1,2}{17,45} \Rightarrow \boxed{r_2 = 0,0688}$$

$$S_1 = \lambda_1 (r_0 + r_1) = \lambda_1 (1 - r_2) = 13,25 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 14,23}$$

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_1 = 4,25 \Rightarrow r_1 (\lambda_1 + \lambda_2) = 4,25 \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{4,25}{14,23 + 17,45} \Rightarrow \boxed{r_1 = 0,1341}$$

$$r_0 = 1 - r_1 - r_2 \Rightarrow \boxed{r_0 = 0,797}$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 17,45 \cdot \frac{17,45}{14,23} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 21,4}$$

$$\text{Agora } \lambda_3 r_1 = 21,4 \cdot 0,1341 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 r_1 = 2,86974}$$

$$\lambda_3 r_2 = 21,4 \cdot 0,0688 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 r_2 = 1,47232}$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 \cdot \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = 26,24}$$

$$\lambda_4 \cdot r_2 = 26,24 \cdot 0,0688 \Rightarrow \boxed{\lambda_4 r_2 = 1,8}$$

$$\text{Solução Análoga: } \lambda_3 r_1 + \lambda_3 r_2 + \lambda_4 r_2 = 2,86974 + 1,47232 + 1,8 = 6,14206$$

Άσκηση 4

Δίνονται ταξινομημένα μέρη:

i/j	b_0	b_1	b_2
a_1	2,8	3,2	3,5
a_2	2,5	2,3	
a_3	1,9		

Να εφαρμοστεί το μοντέλο μετεξέλιξης:

$$\ln Y_{ij} = Z_{ij} = a_i + b_j + \varepsilon_{ij}, \quad i=1,2,3, \quad j=0,1,2$$

Συμπεραίνει ότι $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 = 1,593053)$

A) Να συμπληρώσετε πίνακα σχεδιασμού του μοντέλου μετεξέλιξης, και των πίνακων σχεδιασμού πριβλέψης)

B) Υπολογίστε συντ. μετεξέλιξης) a και b .

Γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη συνδιασπορά των Y_{22} , Y_{31} & Y_{32} .

Δ) Υπολογίστε το συνολικό τελικό αποτέλεσμα.

Λύση

A)

$$Z = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 3,2 \\ 3,5 \\ 2,5 \\ 2,3 \\ 1,9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_f = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B) \quad \hat{\theta} = (X'X)^{-1} X'Z$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Opiforwa: $D = 20 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 95$.

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 6/95 & -5/95 \\ -5/95 & 20/95 \end{bmatrix}$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,8 \\ 3,2 \\ 3,5 \\ 2,5 \\ 2,3 \\ 1,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,8 \\ 12,5 \end{bmatrix}$$

Apa $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 6/95 & -5/95 \\ -5/95 & 20/95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24,8 \\ 12,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,908421 \\ 1,3263158 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{matrix}$

Г)

$$E(Z_f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,908421 \\ 1,3263158 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,469474 \\ 4,051579 \\ 5,377895 \end{bmatrix}$$

Πίσω) Διασπορά-οι Διασπορά:

$$\sigma^2 (X_f (X'X)^{-1} X_f' + I) = \begin{bmatrix} \text{Var } Z_{22} & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{31}) & \text{Cov}(Z_{22}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{31}, Z_{22}) & \text{Var } Z_{31} & \text{Cov}(Z_{31}, Z_{32}) \\ \text{Cov}(Z_{32}, Z_{22}) & \text{Cov}(Z_{32}, Z_{31}) & \text{Var } Z_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2,666267 & 0,6036831 & 1,1067527 \\ 0,6036831 & 2,3308875 & 0,8216798 \\ 1,1067527 & 0,8216798 & 2,8339568 \end{bmatrix} \quad (\Delta \text{ιστάρι})$$

Νίσι) Τιμή)

$$E(Y_{22}) = \exp(E(Z_{22}) + \frac{\text{Var } Z_{22}}{2}) = 331,1618$$

$$E(Y_{31}) = 184,3844$$

$$E(Y_{32}) = 893,2559$$

Διασπορά)

$$\text{Var}(Y_{22}) = [E(Y_{22})]^2 [\exp(\text{Var } Z_{22}) - 1] = 140836$$

$$\text{Var } Y_{31} = 315738,1$$

$$\text{Var } Y_{32} = 12.776586$$

Integrationen.

$$\text{Cov}(Y_{22}, Y_{31}) = E(Y_{22}) E(Y_{31}) \cdot [\exp(\text{Cov}(Z_{22}, Z_{31})) - 1] = 50610$$

$$\text{Cov}(Y_{22}, Y_{32}) = 598877,0.$$

$$\text{Cov}(Y_{31}, Y_{32}) = 209883,1$$

$$\Delta) R = E(Y_{22}) + E(Y_{31}) + E(Y_{32}) = 1408,002.$$