

Κεφάλαιο 1

Χρηματοοικονομικές Ράντες

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε περιληπτικά την έννοια του επιτοκίου, της παρούσας αξίας, της συσσωρευμένης αξίας καθώς και άλλα χρηματοοικονομικά στοιχεία, που σχετίζονται με το επιτόκιο.

1.1 Σύνθετο Επιτόκιο (Compound Interest)

Έστω x είναι το αρχικό κεφάλαιο και θέλουμε να το τοκίσουμε για n έτη με επιτόκιο (σύνθετο) $i\%$ ανά έτος. Το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του $n^{\text{ου}}$ έτους θα είναι $x(1+i)^n$.

Παράδειγμα 1. Έχουμε 100 Ευρώ και θέλουμε να τα τοκίσουμε για 3 έτη με επιτόκιο (σύνθετο) $i = 10\%$ ανά έτος.

Λύση: Στο τέλος του $1^{\text{ου}}$ έτους τα 100 Ευρώ θα γίνουν 110, δηλαδή

$$100(1 + 0.10) = 100(1.10) = 110,$$

στο τέλος του $2^{\text{ου}}$ έτους θα γίνουν

$$100(1 + 0.10)(1 + 0.10) = 110(1 + 0.10) = 121$$

και στο τέλος του $3^{\text{ου}}$ έτους θα γίνουν

$$100(1 + 0.10)(1 + 0.10)(1 + 0.10) = 121(1 + 0.10) = 133.1.$$

Άρα, έχουμε

$$100(1 + i)^3 = 100(1 + 0.10)^3 = 133.1.$$

Παράδειγμα 2. Πόσο πρέπει να επενδύσει αρχικά κάποιος, έτσι ώστε στο τέλος της περιόδου να λάβει μία νομισματική μονάδα (1 ν.μ.).

Λύση: Έστω x είναι το αρχικό κεφάλαιο και i είναι το επιτόκιο. Οπότε έχουμε

$$x(1+i) = 1 \text{ ν.μ.} \Rightarrow x = \frac{1}{1+i} = v,$$

όπου v είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας (discounted factor), δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο που πρέπει να επενδύσουμε για να λάβουμε στο τέλος της περιόδου 1 ν.μ.

1.1.1 Απλό Επιτόκιο (Simple Interest)

Έστω x είναι το αρχικό κεφάλαιο και θέλουμε να το τοκίσουμε για n έτη με επιτόκιο (απλό) $i\%$ ανά έτος. Το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του $n^{\text{ου}}$ έτους θα είναι $x(1+ni)$.

Παράδειγμα 3. Έχουμε 100 Ευρώ και θέλουμε να τα τοκίσουμε για 3 έτη με επιτόκιο (απλό) $i = 10\%$ ανά έτος.

Λύση: Το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του 3^{ου} έτους θα είναι

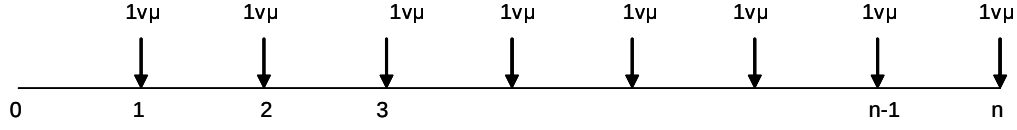
$$100[1 + 3(0.10)] = 130.$$

Παρατήρηση 1. Στο εξής όταν μιλάμε για επιτόκιο θα αναφερόμαστε στο σύνθετο επιτόκιο.

1.2 Πρόσοδος ή Ράντα (Annuity)

Ως ράντα ορίζουμε μία σειρά ίσων πληρωμών που πραγματοποιούνται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Π.χ. οι δόσεις που πληρώνουμε για ένα δάνειο αποτελούν μία ράντα.

Ορισμός 1. Ανηξιοπρόθεσμη ράντα (annuity - immediate): Οι πληρωμές είναι καταβλητέες στο τέλος κάθε περιόδου (έτος). Η συνολική παρούσα αξία (ΠΑ), $a_{\overline{n}|i}$, ισούται με το άθροισμα των παρούσων αξιών κάθε ετήσιας πληρωμής, δηλαδή



Σχήμα 1.1: Ληξιπρόθεσμη ράντα

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n \\
 &= v(1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}) \\
 &= v \sum_{i=0}^{n-1} v^i = v \frac{1 - v^n}{1 - v} \\
 &= v \frac{1 - v^n}{iv} = \frac{1 - v^n}{i}, \tag{1.2.1}
 \end{aligned}$$

επειδή

$$1 - v = 1 - \frac{1}{1 + i} = \frac{i}{1 + i} = iv.$$

Έτσι, από την (1.2.1) έχουμε

$$a_{\overline{n}|} i = 1 - v^n \Rightarrow a_{\overline{n}|} i + v^n = 1, \tag{1.2.2}$$

το οποίο σημαίνει, ότι θεωρούμε επένδυση 1 ν.μ. που θα επιφέρει τόκο i πληρωτέο στο τέλος κάθε έτους. Η παρούσα αξία (ΠΑ) του τόκου αυτού είναι $a_{\overline{n}|} i$. Στο τέλος n ετών η αρχική επένδυση με παρούσα αξία v^n επιστρέφεται. Έτσι και οι δύο πλευρές της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν την ΠΑ επένδυσης 1 ν.μ. την ημέρα της επένδυσης.

Αν $n \rightarrow \infty$, τότε έχουμε την απειροστή ληξιπρόθεσμη ράντα (perpetuity-immediate)

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{\infty}|} &= v \frac{1 - v^{\infty}}{1 - v} \\
 &= \frac{v}{iv}
 \end{aligned}$$

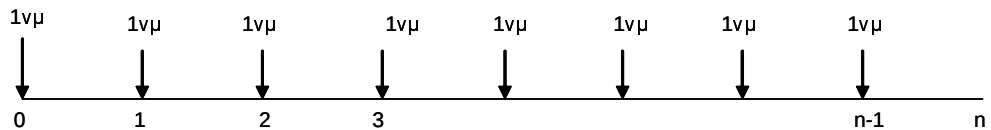
$$= \frac{1}{i},$$

$$\text{επειδή } v^\infty = \frac{1}{(1+i)^\infty} = 0.$$

Ορισμός 2. Η συνολική συσσωρευμένη αξία (*total accumulated value*), $s_{\overline{n}|}$, είναι το άθροισμα των αθροιστικών τιμών κάθε ληξιπρόθεσμης ετήσιας πληρωμής, δηλαδή

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1 \\ &= 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^j \\ &= \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} \\ &= \frac{1 - (1+i)^n}{-i} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Ορισμός 3. Προκαταβλητέα ράντα (*annuity - due*) $\ddot{a}_{\overline{n}|}$: Οι πληρωμές είναι καταβλητέες στην αρχή κάθε περιόδου (έτος). Η συνολική παρούσα αξία (ΠΑ), $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, ισούται με το άθροισμα των παρούσων αξιών κάθε ετήσιας πληρωμής, δηλαδή



Σχήμα 1.2: Προκαταβλητέα ράντα

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i = \frac{1 - v^n}{1 - v} \\
&= \frac{1 - v^n}{iv} = \frac{1 - v^n}{d},
\end{aligned}$$

όπου d είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο (discounted rate), τέτοιο ώστε

$$d = 1 - v = iv.$$

Αν $n \rightarrow \infty$, τότε λαμβάνουμε την απειροστή προκαταβλητέα ράντα (perpetuity-due)

$$\ddot{a}_{\infty|} = \frac{1 - v^\infty}{1 - v} = \frac{1}{d}.$$

Ορισμός 4. Για προκαταβλητέες ετήσιες πληρωμές η συνολική συσσωρευμένη αξία $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) \\
&= (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \\
&= (1+i)[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}] \\
&= (1+i) \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^j = (1+i) \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} \\
&= (1+i) \frac{1 - (1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i/(1+i)} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{iv} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Παράδειγμα 4. Να αποδειχθεί ότι

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n.$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n$$

και

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την $a_{\overline{n}|}$ με το $(1+i)^n$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}(1+i)^n &= (v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n)(1+i)^n \\ &= \frac{(1+i)^n}{1+i} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^2} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \\ &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1 \\ &= s_{\overline{n}|}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5. Να αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i.$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i &= \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i \\ &= \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \\ &= \frac{i}{1 - 1/(1+i)^n} \\ &= \frac{i}{1 - v^n} \\ &= \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί η σχέση

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n.$$

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d.$$

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1.$$

Άσκηση 4. Να αποδειχθεί ότι

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}.$$

1.3 Μεταβαλλόμενες Ράντες

Θεωρούμε μία γενική ληξιπρόθεσμη ράντα με n περιόδους πληρωμών, στην οποία οι πληρωμές αρχίζουν με X και μετά αυξάνονται κατά Y ανά περίοδο

$$A = Xv + (X + Y)v^2 + (X + 2Y)v^3 + \cdots + (X + (n-1)Y)v^n. \quad (1.3.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.3.5) με το $1+i$ έχουμε

$$(1+i)A = X + (X + Y)v + (X + 2Y)v^2 + \cdots + (X + (n-1)Y)v^{n-1}. \quad (1.3.6)$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε την (1.3.5) από την (1.3.6) και λαμβάνουμε

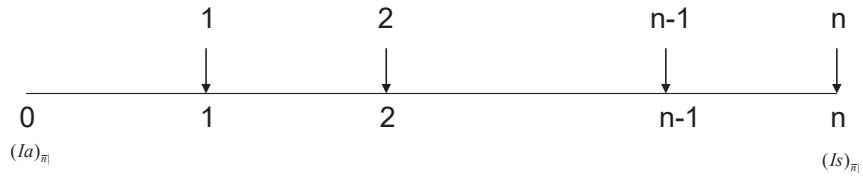
$$\begin{aligned} iA &= X + Y(v + v^2 + \cdots + v^{n-1}) - Xv^n - (n-1)Yv^n \\ &= X(1 - v^n) + Y(v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n) - nYv^n \\ &= X(1 - v^n) + Yv \sum_{r=0}^{n-1} v^r - nYv^n. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 A &= X \left(\frac{1 - v^n}{i} \right) + Y \left(\frac{a_{\overline{n}|}}{i} \right) - nY \frac{v^n}{i} \\
 &= X \left(\frac{1 - v^n}{i} \right) + Y \left(\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \right) \\
 &= Xa_{\overline{n}|} + Y \left(\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \right). \tag{1.3.8}
 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι η παρούσα αξία μιας ράντας n ετών A ανατοκισμένη για n έτη μας δίνει την συσσωρευμένη τιμή B στο χρόνο n , δηλαδή $B = A(1+i)^n$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
 B &= Xa_{\overline{n}|}(1+i)^n + Y \left(\frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \right) (1+i)^n \\
 &= Xs_{\overline{n}|} + Y \left(\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i} \right). \tag{1.3.9}
 \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Αύξουσα Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Αν στην (1.3.8) θέσουμε $X = Y = 1$, τότε έχουμε μία αύξουσα ράντα της οποίας η παρούσα αξία συμβολίζεται με $(Ia)_{\overline{n}|}$ και ισούται με

$$\begin{aligned}
 (Ia)_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i} \\
 &= \frac{a_{\overline{n}|}(1+i) - nv^n}{i}. \tag{1.3.10}
 \end{aligned}$$

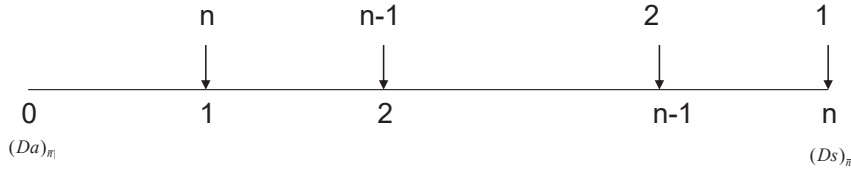
Η συσσωρευμένη τιμή συμβολίζεται με $(Is)_{\overline{n}}$ και ισούται με

$$(Is)_{\overline{n}} = \frac{s_{\overline{n}}(1+i) - nv^n}{i}. \quad (1.3.11)$$

Στη συνέχεια, αν στην (1.3.8) θέσουμε $X = n$ και $Y = -1$, τότε έχουμε μία φθίνουσα ράντα της οποίας η παρούσα αξία συμβολίζεται με $(Da)_{\overline{n}}$ και ισούται με

$$\begin{aligned} (Da)_{\overline{n}} &= na_{\overline{n}} - \frac{a_{\overline{n}} - nv^n}{i} \\ &= \frac{n - nv^n - a_{\overline{n}} + nv^n}{i} \\ &= \frac{n - a_{\overline{n}}}{i}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Η συσσωρευμένη τιμή συμβολίζεται με $(Ds)_{\overline{n}}$ και ισούται με



Σχήμα 1.4: Φθίνουσα Ληξιπρόθεσμη Ράντα

$$\begin{aligned} (Ds)_{\overline{n}} &= (Da)_{\overline{n}}(1+i)^n \\ &= \frac{n - a_{\overline{n}}}{i}(1+i)^n \\ &= \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}}}{i}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Παράδειγμα 6. Να γραφεί η μαθηματική σχέση που παρουσιάζει την παρούσα αξία μιας ράντας, η οποία αρχίζει με πληρωμή 1 Ευρώ και αυξάνεται κατά 1 Ευρώ για 10 έτη και στη συνέχεια η πληρωμή μειώνεται κατά 1 Ευρώ ανά έτος για 5 έτη.

Λύση:

$$(I\alpha)_{\overline{10}|} + v^9(D\alpha)_{\overline{6}|} = \frac{a_{\overline{10}|}(1+i) - 10v^{10}}{i} + v^9 \frac{6 - a_{\overline{6}|}}{i}.$$

1.4 Κλασματικές Ράντες

Η συχνότητα με την οποία ο τόκος πληρώνεται και ανατοκίζεται ονομάζεται περίοδος μετατροπής επιτοκίου (interest conversion period). Έστω m ο αριθμός περιόδων πληρωμών σε μία περίοδο μετατροπής

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m, \quad (1.4.14)$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1]. \quad (1.4.15)$$

Παράδειγμα 7. Έστω ότι ένα δάνειο χρεώνει 16% ανά έτος μετατρέψιμο ανά μήνα (convertible monthly). Αυτό συνεπάγεται ότι το πραγματικό επιτόκιο είναι ανά μήνα (effective monthly)

$$\frac{0.16}{12} = 0.01333.$$

Συνεπώς, για μια περίοδο ενός έτους η συσσωρευμένη τιμή 1 ν.μ. θα είναι

$$(1 + 0.01333)^{12} = 1.1722708,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι το πραγματικό επιτόκιο ανά έτος είναι 17.22708%.

1.4.1 Προεξοφλητικό Επιτόκιο

$$v = (1+i)^{-1} = 1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m, \quad (1.4.16)$$

το οποίο συνεπάγεται

$$(1-d)^{1/m} = 1 - \frac{d^{(m)}}{m} \quad (1.4.17)$$

και

$$d^{(m)} = m[1 - (1 - d)^{1/m}] = m[1 - v^{1/m}]. \quad (1.4.18)$$

Υπάρχει μία σχέση μεταξύ του επιτοκίου i και του προεξοφλητικού επιτοκίου d . Η παρακάτω ισοδυναμία ισχύει γιατί και οι δύο πλευρές ισοδυναμούν με το $i + 1$, δηλαδή

$$1 + i = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m. \quad (1.4.19)$$

Παράδειγμα 8. Να βρεθεί το προεξοφλητικό επιτόκιο, μετατρέψιμο ανά 3 μήνες, το οποίο είναι ισοδύναμο με το επιτόκιο 12% ανά έτος μετατρέψιμο ανά μήνα.

Λύση:

$$\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4} = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12},$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$1 - \frac{d^{(4)}}{4} = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{-3} = 0.9705901$$

και

$$d^{(4)} = 4(1 - 0.9705901) = 0.11764.$$

Παράδειγμα 9. Να βρεθεί το προεξοφλητικό επιτόκιο, μετατρέψιμο ανά εξάμηνο, το οποίο είναι ισοδύναμο με το επιτόκιο 12% ανά έτος μετατρέψιμο ανά μήνα.

Λύση:

$$\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12},$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$1 - \frac{d^{(2)}}{2} = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{-6} = 0.9420452$$

και

$$d^{(2)} = 2(1 - 0.9420452) = 0.1159095.$$

1.5 Ράντες Πληρωτέες Συχνότερα από τη Συχνότητα Μετατροπής του Επιτοκίου

Ορισμός 5. $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ είναι η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία πληρώνει ποσό ίσο με $\frac{1}{m}$ νομισματικές μονάδες στο τέλος κάθε m (μήνα, $m = 12$, τρίμηνο, $m = 4$, κ.λπ.) της περιόδου μετατροπής του επιτοκίου σε σύνολο n περιόδων μετατροπής του επιτοκίου.

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{\frac{m-1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{m}{m}} && 1^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \frac{1}{m}v^{1+\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{1+\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{1+\frac{m-1}{m}} + \frac{1}{m}v^{1+\frac{m}{m}} && 2^\circ \text{ έτος} \\
 &\vdots \\
 &+ \frac{1}{m}v^{(n-1)+\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{(n-1)+\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{(n-1)+\frac{m-1}{m}} + \frac{1}{m}v^{(n-1)+\frac{m}{m}} && n^\circ \text{ έτος} \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \left(1 + v^{1/m} + v^{2/m} + \dots + v^{n-(1/m)} \right) \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \sum_{j=0}^{n-(1/m)} v^{j/m} \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{1/m}} \right) \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \left(\frac{1 - v^n}{1 - [1/(1+i)]^{1/m}} \right) \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \left(\frac{1 - v^n}{\frac{(1+i)^{1/m}-1}{(1+i)^{1/m}}} \right) \\
 &= \frac{1}{m}v^{1/m} \left(\frac{1 - v^n}{m[(1+i)^{1/m} - 1]} \right) \\
 &= \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}, \tag{1.5.20}
 \end{aligned}$$

η οποία προκύπτει με βάση τη σχέση (1.4.15).

1.6 Ένταση Ανατοκισμού

Από τη σχέση (1.4.15) έχουμε $i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1]$. Παρατηρούμε ότι όσο το μεγαλώνουν οι τιμές του m , οι τιμές του $i^{(m)}$ γίνονται μικρότερες προσεγγίζοντας κάποιο όριο. Έτσι, έχουμε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[(1+i)^{1/m} - 1]}{1/m} = \frac{0}{0}. \quad (1.6.21)$$

Επειδή το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hopital και χρησιμοποιώντας τη σχέση $a^x = e^{\log a^x}$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dm} e^{[\log_e(1+i)^{1/m} - 1]}}{\frac{d}{dm} \left(\frac{1}{m}\right)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{m} \log_e(1+i)} \left[-\frac{1}{m^2} \log_e(1+i)\right]}{-\frac{1}{m^2}} \\ &= \log_e(1+i). \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Το όριο αυτό ονομάζεται ένταση ανατοκισμού και συμβολίζεται με το γράμμα δ . Έτσι έχουμε

$$\delta = \log_e(1+i) \Rightarrow e^\delta = (1+i). \quad (1.6.23)$$

1.7 Συνεχείς Ράντες

Ορισμός 6. Στην περίπτωση όπου σε μία ράντα οι πληρωμές περιόδων είναι συχνότερες (μη πεπερασμένες) από τη μετατροπή του επιτοκίου, έχουμε μία συνεχή ράντα, η παρούσα αξία της οποίας ισούται με

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^n e^{\log_e v^t} dt \\
&= \left. \frac{e^{\log_e v^t}}{\log_e v} \right|_0^n \\
&= \frac{v^n - 1}{-\log_e(1+i)} \\
&= \frac{1 - v^n}{\delta} \\
&= \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} , \tag{1.7.24}
\end{aligned}$$

όπου $\delta = \log_e(1+i)$ και $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$. Επίσης, ισχύει

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τη συσσωρευμένη αξία μιας συνεχούς ράντας $\bar{a}_{\overline{n}|}$ ως

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{\overline{n}|} &= \int_0^n (1+t)^t dt = \int_0^n e^{\log_e(1+t)^t} dt \\
&= \left. \frac{e^{\log_e(1+t)^t}}{\log_e(1+t)} \right|_0^n \\
&= \frac{(1+t)^n - 1}{\delta} \\
&= \frac{i}{\delta} s_{\overline{n}|} . \tag{1.7.25}
\end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

Κεφάλαιο 2

Ασφαλίσεις Ζωής και Θανάτου

2.1 Πίνακες Θνησιμότητας

Ορίζουμε τις κάτωθι συναρτήσεις:

- (i) l_x : πλήθος ατόμων που είναι εν ζωή στην ηλικία x ,
- (ii) d_x : πλήθος ατόμων ηλικίας x που έχουν αποθάνει μέχρι την ηλικία $x+1$,
όπου $d_x = l_x - l_{x+1}$,
- (iii) ${}_nq_x$: η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να αποθάνει, πριν φθάσει στην ηλικία $x+n$,
- (iv) ${}_np_x$: η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να φθάσει στην ηλικία $x+n$,

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_nq_x, \quad \text{όπου} \quad {}_np_x + {}_nq_x = 1.$$

Παράδειγμα 10. Ο παρακάτω πίνακας είναι ένα συμβολικό παράδειγμα πίνακα επιβίωσης, όπου $l_0 = 1000$ είναι ο αρχικός πληθυσμός ηλικίας 0 (1000 νεογέννητα).

Πίνακας Θνησιμότητας			
Ηλικία	l_x	d_x	q_x
0	$l_0 = 1000$	$d_0 = 245$	$q_0 = 0.2450$
1	$l_1 = 755$	$d_1 = 60$	$q_1 = 0.0795$
2	$l_2 = 695$	$d_2 = 80$	$q_2 = 0.1151$
3	$l_3 = 615$	$d_3 = 100$	$q_3 = 0.1626$
4	$l_4 = 515$	$d_4 = 135$	$q_4 = 0.2621$
5	.	.	.

π.χ.

$$d_0 = l_0 - l_1 = 1000 - 755, \quad d_1 = l_1 - l_2 = 755 - 695,$$

$$q_0 = \frac{245}{1000} = 0.245, \quad q_1 = \frac{60}{755} = 0.0795.$$

Παράδειγμα 11. Με βάση τον παραπάνω πίνακα να βρεθούν τα εξής: α) η πιθανότητα ένα νεογέννητο να ζήσει μέχρι την ηλικία των 4 ετών, β) η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 1 και 4 ετών.

Λύση: α) Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να ζήσει μέχρι την ηλικία των 4 ετών είναι

$$\frac{l_4}{l_0} = \frac{515}{1000} = 0.515.$$

β) Ο αριθμός αποθανόντων μεταξύ των ηλικιών 1 και 4 ετών είναι $l_1 - l_4$, άρα η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 1 και 4 ετών είναι

$$\begin{aligned} \frac{l_1 - l_4}{l_0} &= \frac{755 - 515}{1000} = 0.24 \\ &= \frac{d_1 + d_2 + d_3}{l_0} = \frac{60 + 80 + 100}{1000} = 0.24. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 12. Να αποδειχθεί ότι

$${}_{n+k}p_x = {}_np_{x+k} {}_kp_x.$$

Λύση:

$${}_{n+k}p_x = \frac{l_{x+n+k}}{l_x} = \frac{l_{x+n+k}}{l_x} \frac{l_{x+k}}{l_{x+k}} = {}_np_{x+k} {}_kp_x.$$

Παράδειγμα 13. Έστω ότι η γενική συνάρτηση επιβίωσης είναι της μορφής

$$l_x = l_0 \left(1 - \frac{x}{\omega} \right),$$

όπου $l_0 = 1000$ είναι ο αρχικός πληθυσμός ηλικίας 0 και ω είναι το ανώτατο όριο ηλικίας 125 έτη. Να βρεθούν: α) η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 60 και 70, β) η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να πεθάνει μετά τα 70, γ) η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να φθάσει τα 125, δ) να ορίσετε τα ακόλουθα: ${}_{20}q_{40}$ και ${}_{30}p_{40}$.

Λύση: Με βάση τη γενική συνάρτηση επιβίωσης λαμβάνουμε

$$l_{40} = 1000 \left(1 - \frac{40}{125} \right) = 680, \quad l_{60} = 1000 \left(1 - \frac{60}{125} \right) = 520$$

και

$$l_{70} = 1000 \left(1 - \frac{70}{125} \right) = 440. \quad \text{Έτσι, έχουμε:}$$

α) Η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 60 και 70 ισούται με

$$\frac{l_{60} - l_{70}}{l_{40}} = \frac{520 - 440}{680} = 0.117647059.$$

β) Η πιθανότητα άτομο ηλικίας 40 ετών να πεθάνει μετά τα 70 ισούται με

$${}_{30}p_{40} = \frac{l_{70}}{l_{40}} = \frac{440}{680} = 0.647058824.$$

γ) Επειδή το ανώτατο όριο ηλικίας είναι 125 έτη, αυτό σημαίνει ότι κανείς δεν επιβιώνει μετά τα 125, δηλαδή

$$l_{125} = 0.$$

δ) Έχουμε

$${}_{20}q_{40} = 1 - {}_{20}p_{40} = 1 - \frac{l_{40+20}}{l_{40}} = 1 - \frac{l_{60}}{l_{40}} = 1 - \frac{520}{680}$$

και

$${}_{30}p_{40} = \frac{l_{40+30}}{l_{40}} = \frac{l_{70}}{l_{40}} = \frac{440}{680} = 0.647058824.$$

Άσκηση 5. Να κατασκευαστεί ένας πίνακας θνησιμότητας με βάση τις ακόλουθες πιθανότητες θνησιμότητας $q_0 = 0.30$, $q_1 = 0.15$, $q_2 = 0.25$, $q_3 = 0.75$, $q_4 = 1.00$ και $l_0 = 1000$.

Άσκηση 6. Να κατασκευαστεί ένας πίνακας θνησιμότητας που να περιέχει τα l_x , d_x και q_x , με βάση τις ακόλουθες πιθανότητες θνησιμότητας, $q_0 = 0.15$, $d_1 = 5$, $q_2 = 0.05$, $d_3 = 6$ και $l_0 = 100$.

2.1.1 Πιθανότητες Θνησιμότητας όταν έχουμε Κλασματικές Τιμές του n

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τις πιθανότητες επιβίωσης και θνησιμότητας για μη ακέραιες τιμές του n . Οι τιμές αυτές δεν λαμβάνονται κατ' ευθείαν από τους πίνακες θνησιμότητας, αλλά μέσω κατάλληλων προσεγγίσεων (παρεμβολή). Θεωρούμε επίσης ότι κατά την διάρκεια του έτους, οι θάνατοι εμφανίζονται ομοιόμορφα.

Παράδειγμα 14. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας 30 ετών να ζήσει τους επόμενους 3 μήνες, δηλαδή την πιθανότητα ${}_{1/4}p_{30}$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, αναμένουμε ότι $\frac{1}{4}d_{30}$ άτομα πεθαίνουν κατά την διάρκεια του πρώτου τριμήνου ($1/4$) του έτους και $l_{30} - \frac{1}{4}d_{30}$ άτομα μένουν εν ζωή. Έτσι, λαμβάνουμε μια προσεγγιστική τιμή για την $\frac{1}{4}d_{30}$, η οποία είναι

$${}_{1/4}p_{30} = \frac{l_{30} - \frac{1}{4}d_{30}}{l_{30}} = \frac{l_{30} - \frac{1}{4}(l_{30} - l_{31})}{l_{30}} = \frac{\frac{3}{4}l_{30} + \frac{1}{4}l_{31}}{l_{30}}.$$

2.1.2 Συναρτήσεις Μετατροπής Επιτοκίου και Θνησιμότητας

Οι συναρτήσεις μετατροπής δημιουργήθηκαν για την διευκόλυνση των μαθηματικών υπολογισμών που σχετίζονται με τις ράντες ζωής και θανάτου. Για τη δημιουργία αυτών των συναρτήσεων χρειαζόμαστε το πλήθος ατόμων ηλικίας x , δηλαδή το l_x , $x = 0, 1, 2, \dots$ και το επιτόκιο i . Τις υπόλοιπες συναρτήσεις που χρειαζόμαστε, μπορούμε να τις δημιουργήσουμε με βάση το l_x και το i . Π.χ. $d_x = l_x - l_{x+1}$ και $v = \frac{1}{1+i}$. Οι συναρτήσεις μετατροπής ορίζονται ως εξής:

$$D_x = v^x l_x,$$

$$\begin{aligned}
N_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+\omega-x-1}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \omega. \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} l_{x+t} v^{x+t} = l_x v^x + l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + \cdots + l_{\omega-1} v^{\omega-1}
\end{aligned}$$

ή

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots$$

και

$$N_{x+1} = \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots,$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+\omega-x-1} \quad (\text{όπου } C_x = v^{x+1} d_x) \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{x+t+1} d_{x+t} = v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + \cdots + v^{\omega} d_{\omega-1}
\end{aligned}$$

ή

$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots.$$

Παρατήρηση 2. Στη συνάρτηση N_{x+1} ο δείκτης είναι $x+1$, γιατί η πρώτη πληρωμή γίνεται στο χρόνο $x+1$, δηλαδή το άθροισμα αρχίζει από την τιμή $t=1$. Στη συνάρτηση N_x ο δείκτης είναι x γιατί η πρώτη πληρωμή γίνεται στο χρόνο x , δηλαδή το άθροισμα αρχίζει από την τιμή $t=0$. Αν είχαμε τη συνάρτηση N_{x+n+1} η πρώτη πληρωμή θα γινόταν στο χρόνο $x+\nu+1$, δηλαδή το άθροισμα θα αρχίσει από την τιμή $t=n+1$ κ.ο.κ.

2.1.3 Σύνθετες Συναρτήσεις Μετατροπής Επιτοκίου και Θνησιμότητας

Σε ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα (pension plan) τα μέλη του αποχωρούν για διάφορους λόγους, όπως λόγω θνησιμότητας (mortality-m), ανικανότητας (disability-d), παραίτησης - απόλυσης (withdraw-w) ή συνταξιοδότησης (retirement-r). Το συνολικό πλήθος ατόμων ηλικίας x που έχουν αποχωρήσει του συνταξιοδοτικού προγράμματος μέχρι την ηλικία $x + 1$ είναι

$$d_x^{(\tau)} = d_x^{(m)} + d_x^{(d)} + d_x^{(w)} + d_x^{(r)},$$

όπου $d_x^{(m)}$ είναι το πλήθος ατόμων που έχουν πεθάνει, $d_x^{(d)}$ είναι το πλήθος ατόμων που έχουν αποχωρήσει λόγω ανικανότητας, $d_x^{(w)}$ είναι το πλήθος ατόμων που έχουν παραιτηθεί ή έχουν απολυθεί από τη δουλειά τους και $d_x^{(r)}$ είναι το πλήθος ατόμων που έχουν συνταξιοδοτηθεί.

Ορίζουμε τα κάτωθι:

- (i) $l_x^{(\tau)}$: πλήθος ατόμων που είναι εν ζωή στην ηλικία x ,
- (ii) $d_x^{(\tau)}$: πλήθος ατόμων ηλικίας x που έχουν αποχωρήσει του συνταξιοδοτικού προγράμματος μέχρι την ηλικία $x + 1$, όπου $d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}$,
- (iii) ${}_nq_x^{(\tau)}$: η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να αποχωρήσει του συνταξιοδοτικού προγράμματος πριν φθάσει στην ηλικία $x + n$,
- (iv) ${}_np_x^{(\tau)}$: η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να φθάσει στην ηλικία $x + n$

$${}_np_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = 1 - {}_nq_x^{(\tau)}, \quad \text{όπου } {}_np_x^{(\tau)} + {}_nq_x^{(\tau)} = 1.$$

Οι σύνθετες συναρτήσεις μετατροπής επιτοκίου και θνησιμότητας ορίζονται ως

$$D_x^{(\tau)} = v^x l_x^{(\tau)},$$

$$N_x^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}^{(\tau)} \quad \text{ή} \quad N_x^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(\tau)}$$

και

$$N_{x+1}^{(\tau)} = \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}^{(\tau)},$$

$$M_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{(m)}, \quad \text{όπου } C_x^{(m)} = v^{x+1} d_x^{(m)}.$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις

$$M_x^{(d)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{(d)}, \quad M_x^{(w)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{(w)} \quad \text{και} \quad M_x^{(r)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}^{(r)},$$

$$\text{όπου } C_x^{(d)} = v^{x+1} d_x^{(d)}, \quad C_x^{(w)} = v^{x+1} d_x^{(w)} \quad \text{και} \quad C_x^{(r)} = v^{x+1} d_x^{(r)}.$$

2.2 Ετήσιες Ράντες Ζωής

Ορισμός 7. Ράντα ζωής ληξιπρόθεσμη (*annuity immediate*): η πληρωμή καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου.

Ορισμός 8. Ράντα ζωής προκαταβλητέα (*annuity due*): η πληρωμή καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

2.2.1 Ασφάλιση Προικοδότησης

Ορισμός 9. Στην ασφάλιση προικοδότησης (*n-year pure endowment*), το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο ή ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (*EMA*), $A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}}$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε μετά από n έτη και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 νομισματική μονάδα (ν.μ.) (πχ. 1 ν.μ. = 1 Ευρώ).

Έστω l_x πλήθος ατόμων ηλικίας x που συνάπτουν ασφάλεια και $A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}}$ είναι το ενιαίο ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσει κάθε άτομο ηλικίας x , για να εισπράξει μετά από n έτη 1 ν.μ. Έτσι στην αρχή, η ασφαλιστική εταιρία θα εισπράξει $l_x A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{}}$ ν.μ.

Οι $l_x A_{x:\overline{n}|}^1$ ν.μ. θα τοκιστούν για n έτη με επιτόκιο i , οπότε τα χρήματα που θα συσσωρευτούν μετά από n έτη, θα μοιραστούν στα l_{x+n} άτομα ηλικίας $x+n$ που βρίσκονται εν ζωή, δηλαδή

$$l_x A_{x:\overline{n}|}^1 (1+i)^n = l_{x+n} (1 \text{ ν.μ.}),$$

το οποίο μας δίνει

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = {}_n p_x v^n \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \frac{v^{x+n}}{v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Παράδειγμα 15. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφαλιστρο (EMA) το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Ηλίας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε στην ηλικία των 65 ετών και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει το ποσό των 500000 Ευρώ. (Επιτόκιο 4.0%, $D_{30} = 29803$, $D_{65} = 6895$).

Λύση: Ο κ. Ηλίας, για να λάβει στην ηλικία των 65 ετών 1 Ευρώ, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

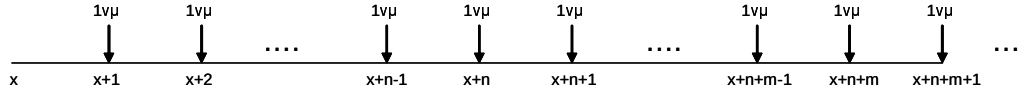
$$A_{30:\overline{35}|}^1 = \frac{D_{65}}{D_{30}} = \frac{6895}{29803} = 0.2313525.$$

Συνεπώς, για να λάβει στην ηλικία των 65 ετών 500000 Ευρώ θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (0.2313525)(500000) = 115676.2$ Ευρώ.

2.2.2 Ισόβια Ράντα Ζωής

Ορισμός 10. Ισόβια ράντα ζωής (*whole life annuity*): Οι πληρωμές θα καταβάλλονται από την ασφαλιστική εταιρία στον ασφαλιζόμενο περιοδικά και κατά σταθερά διαστήματα, εφόσον βρίσκεται εν ζωή.

Στην ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφαλιστρο, a_x , είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους (πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x+1$) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα (πχ. 1 Ευρώ).

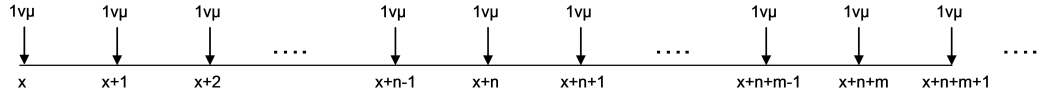


Σχήμα 2.1: Ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
 a_x &= A_{x:\overline{1}|} + A_{x:\overline{2}|} + \cdots + A_{x:\overline{n-1}|} + A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n+1}|} + \cdots + A_{x:\overline{n+m}|} + \cdots \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} A_{x:\overline{t}|} \\
 &= {}_1p_x v + {}_2p_x v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x v^{n-1} + {}_np_x v^n + \cdots + {}_{n+m}p_x v^{n+m} + \cdots \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_x v^t \\
 &= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n+m}}{D_x} + \cdots \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{2.2.2}
 \end{aligned}$$

Στην **ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής**, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, $\ddot{a}_x$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους (πρώτη πληρωμή στην ηλικία x) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα. Η ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής ισούται με την ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής συν τον πρώτο όρο τη μονάδα (1).

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_x &= 1 + A_{x:\overline{1}|} + A_{x:\overline{2}|} + \cdots + A_{x:\overline{n}|} + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} A_{x:\overline{t}|} \\
 &= 1 + {}_1p_x v + {}_2p_x v^2 + \cdots + {}_np_x v^n + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tp_x v^t
 \end{aligned}$$



Σχήμα 2.2: Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \frac{D_{x+n}}{D_x} + \dots = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{N_x}{D_x}.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Παράδειγμα 16. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA) το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Ηλίας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε από την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λαμβάνει το ποσό των 3000 Ευρώ α) στο τέλος του κάθε έτους, β) στην αρχή κάθε έτους. (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $N_{30} = 677106$, $D_{31} = 28629$, $N_{31} = 647303$).

Λύση: α) Ο κ. Ηλίας, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 1 Ευρώ θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

$$\begin{aligned}
 a_{30} &= \frac{N_{30+1}}{D_{30}} = \frac{N_{31}}{D_{30}} \\
 &= \frac{647303}{29803} \\
 &= 21.71939.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3000 Ευρώ, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (21.71939)(3000) = 65158.17$ Ευρώ.

β) Ο κ. Ηλίας για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 1 Ευρώ θα πρέπει να

καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

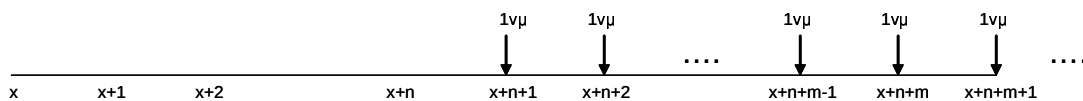
$$\begin{aligned}\ddot{a}_{30} &= \frac{N_{30}}{D_{30}} \\ &= \frac{677106}{29803} \\ &= 22.71939.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 3000 Ευρώ θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (22.71939)(3000) = 68158.17$ Ευρώ.

2.2.3 Μέλλουσα n Ετών Ισόβια Ράντα Ζωής

Ορισμός 11. Μέλλουσα n ετών ράντα ζωής (n -year deferred life annuity): Οι πληρωμές θα καταβάλλονται από την ασφαλιστική εταιρία στον ασφαλιζόμενο μετά από n έτη περιοδικά και κατά σταθερά διαστήματα, εφόσον βρίσκεται εν ζωή.

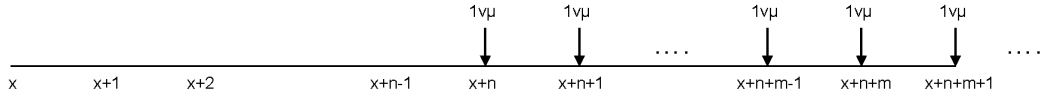
Στην μέλλουσα n ετών ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, ${}_n/a_x$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει μετά από n έτη (πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x + n + 1$), στο τέλος κάθε έτους και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.



Σχήμα 2.3: Μέλλουσα ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
{}_n/a_x &= A_{\frac{1}{x:n+1|}} + A_{\frac{1}{x:n+2|}} + A_{\frac{1}{x:n+3|}} + \dots = \sum_{t=n+1}^{\infty} A_{\frac{1}{x:t|}} \\
&= {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + {}_{n+3}p_x v^{n+3} + \dots = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_t p_x v^t \\
&= \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \frac{D_{x+n+3}}{D_x} + \dots = \frac{\sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n+1}}{D_x}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Στην μέλλουσα n ετών ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, ${}_n/\ddot{a}_x$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει μετά από n έτη (πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x+n$) στην αρχή κάθε έτους και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.



Σχήμα 2.4: Μέλλουσα ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
{}_n/\ddot{a}_x &= A_{\frac{1}{x:n|}} + A_{\frac{1}{x:n+1|}} + A_{\frac{1}{x:n+2|}} + \dots = \sum_{t=n}^{\infty} A_{\frac{1}{x:t|}} \\
&= {}_n p_x v^n + {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \dots = \sum_{t=n}^{\infty} {}_t p_x v^t \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \dots = \frac{\sum_{t=n}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Παράδειγμα 17. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA) το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Νίκος ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λαμβάνει το ποσό των 3000 Ευρώ α) στο τέλος κάθε έτους, β) στην αρχή κάθε έτους. (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $N_{50} = 259619$, $N_{51} = 246384$).

Λύση: α) Ο κ. Νίκος για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 1 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

$$\begin{aligned} {}_{20}/a_{30} &= \frac{N_{30+20+1}}{D_{30}} = \frac{N_{51}}{D_{30}} \\ &= \frac{246384}{29803} \\ &= 8.267087. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3000 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (8.267087)(3000) = 24801.26$ Ευρώ.

β) Ο κ. Νίκος για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 1 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

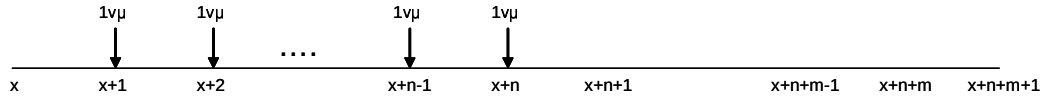
$$\begin{aligned} {}_{20}/\ddot{a}_{30} &= \frac{N_{30+20}}{D_{30}} = \frac{N_{50}}{D_{30}} \\ &= \frac{259619}{29803} \\ &= 8.71117. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 3000 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (8.71117)(3000) = 26133.51$ Ευρώ.

2.2.4 Πρόσκαιρη n Ετών Ράντα Ζωής

Ορισμός 12. Πρόσκαιρη n ετών ράντα ζωής (n -year temporary life annuity): Οι πληρωμές θα καταβάλλονται από την ασφαλιστική εταιρία στον ασφαλιζόμενο για προκαθορισμένο αριθμό περιόδων (πχ. Έστω $n=10$).

Στην πρόσκαιρη n ετών ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, $a_{x:\overline{n}|}$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαλιζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους, για n έτη (η πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x+1$ και τελευταία στην ηλικία $x+n$) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.



Σχήμα 2.5: Πρόσκαιρη n ετών ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

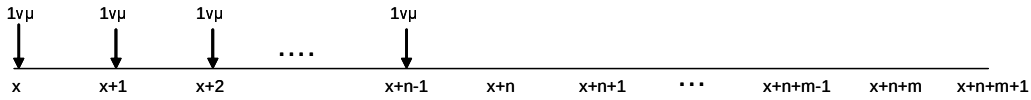
$$\begin{aligned}
 a_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{1}|} + A_{x:\overline{2}|} + \cdots + A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n A_{x:\overline{t}|} \\
 &= {}_1p_x v + {}_2p_x v^2 + \cdots + {}_np_x v^n = \sum_{t=1}^n {}_tp_x v^t \\
 &= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{\sum_{t=1}^n D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} - \frac{\sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \\
 &= a_x - {}_na_x.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Στην πρόσκαιρη ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής η συσσωρευμένη αξία, $s_{x:\overline{n}|}$, είναι το ποσό που θα συσσωρευτεί στην ηλικία $x+n$, αν ένα άτομο ηλικίας x από τη

στιγμή που ασφαρίζεται, λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους για n έτη και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι

$$a_{x:\overline{n}|} = s_{x:\overline{n}|} A_{x:\overline{n}|} \frac{1}{v}. \quad (2.2.7)$$

Στην πρόσκαιρη n ετών προκαταβλητέα ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους για n έτη (η πρώτη πληρωμή στην ηλικία x και τελευταία στην ηλικία $x + n - 1$) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.



Σχήμα 2.6: Πρόσκαιρη n ετών προκαταβλητέα ράντα ζωής

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + A_{x:\overline{1}|} \frac{1}{v} + A_{x:\overline{2}|} \frac{1}{v} + \cdots + A_{x:\overline{n-1}|} \frac{1}{v} = \sum_{t=0}^{n-1} A_{x:\overline{t}|} \frac{1}{v} \\ &= 1 + {}_1p_x v + {}_2p_x v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x v^{n-1} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x v^t \\ &= 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} - \frac{\sum_{t=n}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \ddot{a}_x - {}_n\ddot{a}_x. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Στην πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής, η συσσωρευμένη αξία, $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$, είναι το ποσό που θα συσσωρευτεί στην ηλικία $x + n$, αν ένα άτομο ηλικίας x από τη στιγμή που ασφαρίζεται λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους για n έτη και εφόσον

βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{x:\overline{n}|} A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{i}}. \quad (2.2.9)$$

Παράδειγμα 18. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Γιάννης ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε από την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λαμβάνει επί 20 έτη των το ποσό των 3000 Ευρώ α) στο τέλος του κάθε έτους, β) στην αρχή κάθε έτους. (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $N_{30} = 677106$, $N_{31} = 647303$, $N_{50} = 259619$, $N_{51} = 246384$).

Λύση: α) Ο κ. Γιάννης για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 1 Ευρώ από την υπογραφή της σύμβασης για 20 έτη, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

$$\begin{aligned} a_{30:\overline{20}|} &= \frac{N_{30+1} - N_{30+20+1}}{D_{30}} = \frac{N_{31} - N_{51}}{D_{30}} \\ &= \frac{647303 - 246384}{29803} \\ &= 13.4523. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3000 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (13.4523)(3000) = 40356.9$ Ευρώ.

β) Ο κ. Γιάννης για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 1 Ευρώ από την υπογραφή της σύμβασης για 20 έτη, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

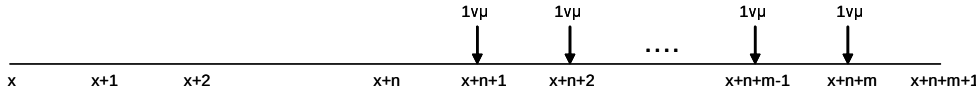
$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30:\overline{20}|} &= \frac{N_{30} - N_{30+20}}{D_{30}} = \frac{N_{30} - N_{50}}{D_{30}} \\ &= \frac{677106 - 259619}{29803} \\ &= 14.00822. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 3000 Ευρώ για 20 έτη, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (14.00822)(3000) = 42024.66$ Ευρώ.

2.2.5 Μέλλουσα n Ετών Πρόσκαιρη m Ετών Ράντα Ζωής

Ορισμός 13. Μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών ράντα ζωής (*n-year deferred m-year temporary life annuity*): Οι πληρωμές θα καταβάλλονται από την ασφαλιστική εταιρία στον ασφαλιζόμενο, μετά από n έτη για προκαθορισμένο αριθμό m ετών.

Στην μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, ${}_n/a_{x:\overline{m}|}$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει μετά από n έτη στο τέλος κάθε έτους για m έτη (πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x + n + 1$ και τελευταία στην ηλικία $x + n + m$) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.

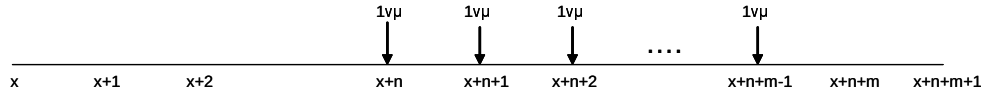


Σχήμα 2.7: Μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
 {}_n/a_{x:\overline{m}|} &= A_{\overline{1}|_{x:n+1|}} + A_{\overline{1}|_{x:n+2|}} + \cdots + A_{\overline{1}|_{x:n+m|}} = \sum_{t=n+1}^{n+m} A_{\overline{1}|_{x:t|}} \\
 &= {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \cdots + {}_{n+m}p_x v^{n+m} = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_t p_x v^t \\
 &= \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n+m}}{D_x} = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{\sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} - \frac{\sum_{t=n+m+1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}. \tag{2.2.10}
 \end{aligned}$$

Στην μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών προκαταβλητέα ράντα

ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο, ${}_n/\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$, είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει μετά από n έτη στην αρχή κάθε έτους για m έτη (πρώτη πληρωμή στην ηλικία $x+n$ και τελευταία στην ηλικία $x+n+m-1$) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα.



Σχήμα 2.8: Μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών προκαταβλητέα ράντα ζωής

$$\begin{aligned}
 {}_n/\ddot{a}_{x:\overline{m}|} &= A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n+1}|} + \cdots + A_{x:\overline{n+m-1}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} A_{x:\overline{t}|} \\
 &= {}_n p_x v^n + {}_{n+1} p_x v^{n+1} + \cdots + {}_{n+m-1} p_x v^{n+m-1} = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_t p_x v^t \\
 &= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n+m-1}}{D_x} = \frac{\sum_{t=n}^{n+m-1} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{\sum_{t=n}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} - \frac{\sum_{t=n+m}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} \\
 &= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}. \tag{2.2.11}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 19. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Γιώργος ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λαμβάνει επί 10 έτη το ποσό των 3000 Ευρώ α) στο τέλος του κάθε έτους, β) στην αρχή κάθε έτους (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $N_{50} = 259619$, $N_{51} = 246384$, $N_{60} = 149448$, $N_{61} = 140830$).

Λύση: α) Ο κ. Γιώργος για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 1 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και για μια περίοδο 10 ετών,

θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

$$\begin{aligned} {}_{20}/a_{30:\overline{10}|} &= \frac{N_{30+20+1} - N_{30+20+10+1}}{D_{30}} = \frac{N_{51} - N_{61}}{D_{30}} \\ &= \frac{246384 - 140830}{29803} = 3.54172. \end{aligned}$$

Έτσι, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3000 Ευρώ, μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και για μια περίοδο 10 ετών, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (3.54172)(3000) = 10625.17$ Ευρώ.

β) Ο κ. Γιώργος για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 1 μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και για μια περίοδο 10 ετών, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία

$$\begin{aligned} {}_{20}/\ddot{a}_{30:\overline{10}|} &= \frac{N_{30+20} - N_{30+20+10}}{D_{30}} = \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{30}} \\ &= \frac{259619 - 149448}{29803} = 3.69664. \end{aligned}$$

Έτσι, για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3000 Ευρώ μετά από 20 έτη από την υπογραφή της σύμβασης και για μια περίοδο 10 ετών, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία $EMA = (3.69664)(3000) = 11089.92$ Ευρώ.

Άσκηση 7. Να επαναλάβετε όλα προηγούμενα παραδείγματα ασφάλισης ζωής εφαρμόζοντας πίνακες θνησιμότητας γυναικών με επιτόκιο $i = 4.0\%$. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 8. Να επαναλάβετε όλα προηγούμενα παραδείγματα ασφάλισης ζωής εφαρμόζοντας πίνακες θνησιμότητας ανδρών, και γυναικών με επιτόκιο $i = 3.0\%$. Τι παρατηρείτε;

Πίνακας 2.1: Ράντες Ζωής (Life Annuities)

Ασφάλιση Προικοδότησης n Ετών	$A_{x:\overline{n} }$	$\frac{D_{x+n}}{D_x}$
Ληξιπρόθεσμη Ασφάλιση		
Ισόβια Ράντα Ζωής	a_x	$\frac{N_{x+1}}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Ράντα Ζωής	n/a_x	$\frac{N_{x+n+1}}{D_x}$
Πρόσκαιρη n Ετών Ράντα Ζωής	$a_{x:\overline{n} } = a_x - n/a_x$	$\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Πρόσκαιρη m Ετών Ράντα Ζωής	$n/a_{x:\overline{m} } = n/a_x - n+m/a_x$	$\frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$
Προκαταβλητέα Ασφάλιση		
Ισόβια Ράντα Ζωής	$\ddot{a}_x$	$\frac{N_x}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Ράντα Ζωής	$n/\ddot{a}_x$	$\frac{N_{x+n}}{D_x}$
Πρόσκαιρη n Ετών Ράντα Ζωής	$\ddot{a}_{x:\overline{n} } = \ddot{a}_x - n/\ddot{a}_x$	$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Πρόσκαιρη m Ετών Ράντα Ζωής	$n/\ddot{a}_{x:\overline{m} } = n/\ddot{a}_x - n+m/\ddot{a}_x$	$\frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$

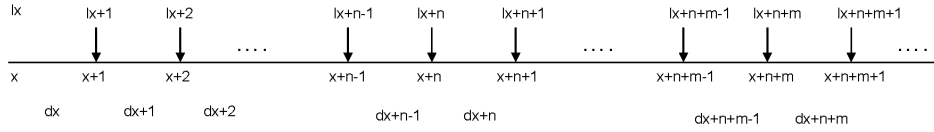
2.3 Ασφαλίσεις σε Περίπτωση Θανάτου

Σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλλει στους κληρονόμους του ένα ορισμένο ποσό, όπως ορίζεται από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Συνήθως, το ασφαλισμένο ποσό πληρώνεται στο τέλος του έτους στο οποίο έχει συμβεί ο θάνατος του ασφαλισμένου.

2.3.1 Ισόβια Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου

Ορισμός 14. Στην ισόβια ασφάλιση (*whole life insurance*): η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του αποθανόντα, οποιαδήποτε στιγμή και αν επέλθει ο θάνατος, ένα ορισμένο ποσό.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο A_x (παρούσα αξία) που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε όταν πεθάνει η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλει στους κληρονόμους του 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του.



Σχήμα 2.9: Ισόβια ασφάλιση θανάτου

Έστω l_x ισούται με το πλήθος ατόμων ηλικίας x που συνάπτουν ισόβια ασφάλιση. Η ασφαλιστική εταιρία θα εισπράξει το ποσό A_x από κάθε ασφαλισμένο. Έτσι, για τους l_x θα εισπράξει το συνολικό ποσό

$$l_x A_x.$$

Αν κατά τη διάρκεια του $1^{\text{ου}}$ έτους από τη σύναψη του συμβολαίου πεθάνουν d_x , τότε για κάθε έναν από αυτούς που έχουν πεθάνει και στο τέλος του $1^{\text{ου}}$ έτους, η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλει στους κληρονόμους 1 ν.μ., δηλαδή ένα συνολικό ποσό d_x ν.μ., η παρούσα αξία του οποίου είναι

$$v d_x.$$

Αν κατά τη διάρκεια του $2^{\text{ου}}$ έτους πεθάνουν d_{x+1} , τότε για κάθε έναν από αυτούς και στο τέλος του $2^{\text{ου}}$ έτους η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλει στους κληρονόμους το ποσό των d_{x+1} ν.μ., η παρούσα αξία του οποίου είναι

$$v^2 d_{x+1}.$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν το τρόπο, στο τέλος του $n^{\text{ου}}$ έτους η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλλει στους κληρονόμους το ποσό των d_{x+n-1} ν.μ., η παρούσα αξία του οποίου είναι

$$v^n d_{x+n-1}.$$

Συνεπώς, θα έχουμε

$$A_x l_x = v d_x + v^2 d_{x+1} + \cdots + v^n d_{x+n-1} + \cdots + v^{n+m} d_{x+n+m-1} + \cdots \quad (2.3.12)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.3.12) με v^x , παίρνουμε

$$A_x l_x v^x = v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + \cdots + v^{x+n} d_{x+n-1} + \cdots + v^{x+n+m} d_{x+n+m-1} + \cdots$$

Θέτοντας $D_x = l_x v^x$ και $C_x = v^{x+1} d_x$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} A_x D_x &= C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + \cdots + C_{x+n+m-1} + C_{x+n+m} + \cdots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = M_x \\ \Rightarrow A_x &= \frac{M_x}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Παράδειγμα 20. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $M_{30} = 3674$).

Λύση: Το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ, ισούται με

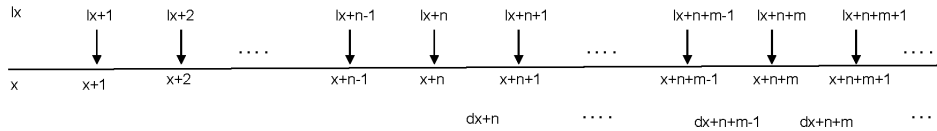
$$\begin{aligned} A_{30} &= \frac{M_{30}}{D_{30}} \\ &= \frac{3674}{29803} \\ &= 0.1232762. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ, ισούται με $EMA = (0.1232762)(100000) = 12327.62$.

2.3.2 Μέλλουσα n Ετών Ισόβια Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου

Ορισμός 15. Στην μέλλουσα n ετών ισόβια ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου (n -year deferred whole life insurance): η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του αποθανόντα ένα ορισμένο ποσό στο τέλος του έτους του θανάτου του, αν ο θάνατος επέλθει οποιαδήποτε στιγμή μετά από n έτη.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο ${}_n/A_x$ (παρούσα αξία) που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος ηλικίας x τη στιγμή που ασφαρίζεται, έτσι ώστε όταν πεθάνει μετά από n έτη η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλει στους κληρονόμους του 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του.



Σχήμα 2.10: Μέλλουσα n ετών ισόβια ασφάλιση θανάτου

Έστω l_x ισούται με το πλήθος ατόμων ηλικίας x που συνάπτουν ισόβια ασφάλιση θανάτου μέλλουσα n ετών. Η ασφαλιστική εταιρία θα εισπράξει το ποσό των ${}_n/A_x$ νομισματικών μονάδων από κάθε ασφαλισμένο. Έτσι, για τους l_x θα εισπράξει το συνολικό ποσό των

$${}_n/A_x l_x.$$

Από τα l_x άτομα, αν κανείς πεθάνει τα πρώτα n έτη, η ασφαλιστική εταιρία δεν θα πληρώσει τίποτα. Αν κατά τη διάρκεια του $(n+1)^{ου}$ έτους από τη σύναψη του συμβολαίου πεθάνουν d_{x+n} , τότε για κάθε έναν από αυτούς που έχουν πεθάνει και στο τέλος του $(n+1)^{ου}$ έτους, η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλλει

συνολικά στους κληρονόμους 1 νομισματική μονάδα, δηλαδή το συνολικό ποσό των d_{x+n} νομισματικών μονάδων, η παρούσα αξία των οποίων είναι

$$v^{n+1}d_{x+n}.$$

Αν κατά τη διάρκεια του $(n+2)^{\text{ου}}$ έτους πεθάνουν d_{x+n+1} , τότε για κάθε έναν από αυτούς και στο τέλος του $(n+2)^{\text{ου}}$ έτους, η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλει στους κληρονόμους το συνολικό ποσό των d_{x+n+1} νομισματικών μονάδων, η παρούσα αξία (Π.Α.) των οποίων είναι

$$v^{n+2}d_{x+n+1}.$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν το τρόπο, στο τέλος του $(n+m)^{\text{ου}}$ έτους η ασφαλιστική εταιρία θα καταβάλει στους κληρονόμους το ποσό των $d_{x+n+m-1}$ ν.μ., η παρούσα αξία των οποίων είναι

$$v^{n+m}d_{x+n+m-1}.$$

Συνεπώς, θα έχουμε

$${}_n/A_x l_x = v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + \dots + v^{n+m}d_{x+n+m-1} + \dots \quad (2.3.14)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.3.14) με v^x , παίρνουμε

$${}_n/A_x l_x v^x = v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + \dots + v^{x+n+m}d_{x+n+m-1} + \dots$$

Θέτοντας $D_x = l_x v^x$ και $C_x = v^{x+1}d_x$, λαμβάνουμε

$${}_n/A_x D_x = C_{x+n} + C_{x+n+1} + \dots + C_{x+n+m-1} + C_{x+n+m} + \dots$$

$$= \sum_{t=n}^{\infty} C_{x+t} = M_{x+n}$$

και

$$\begin{aligned} {}_n/A_x D_x &= M_{x+n} \\ \Rightarrow {}_n/A_x &= \frac{M_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Παράδειγμα 21. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μετά από 20 έτη οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $M_{50} = 3163$).

Λύση: Το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μετά από 20 έτη οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ, ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{20}/A_{30} &= \frac{M_{30+20}}{D_{30}} = \frac{M_{50}}{D_{30}} \\ &= \frac{3163}{29803} \\ &= 0.1061303. \end{aligned}$$

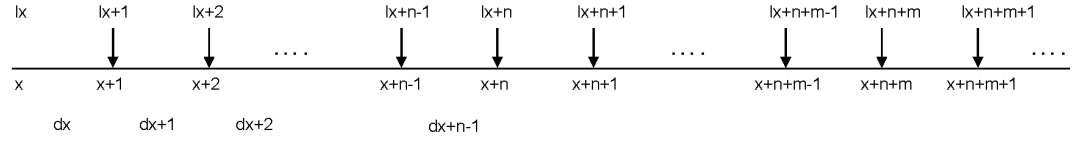
Συνεπώς, το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ, ισούται με $EMA = (0.1061303)(100000) = 10613.03$.

2.3.3 Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου

Ορισμός 16. Στην πρόσκαιρη n ετών ασφάλιση σε περίπτωση θανάτου (*n-year term insurance*): η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του αποθανόντα ένα ορισμένο ποσό στο τέλος του έτους του θανάτου του, αν ο θάνατος επέλθει εντός n ετών.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο $A_{x:\overline{n}|}$ (παρούσα αξία) που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος ηλικίας x τη στιγμή που ασφαλιζεται, έτσι ώστε αν πεθάνει εντός n ετών η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλει στους κληρονόμους του 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του.

α) τρόπος: Έστω l_x ισούται με το πλήθος ατόμων ηλικίας x που συνάπτουν πρόσκαιρη n ετών ασφάλιση θανάτου. Η ασφαλιστική εταιρία θα εισπράξει το ποσό των $A_{x:\overline{n}|}$ ν.μ από κάθε ασφαλισμένο. Έτσι, για τους l_x θα

Σχήμα 2.11: Πρόσκαιρη n ετών ασφάλιση θανάτου

εισπράττει το συνολικό ποσό των

$$A_{1:\overline{n}|} l_x.$$

Όμοια, όπως και στην (2.3.12), έχουμε

$$A_{1:\overline{n}|} l_x = v d_x + v^2 d_{x+1} + \cdots + v^n d_{x+n-1}. \quad (2.3.16)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.3.16) με v^x , παίρνουμε

$$A_{1:\overline{n}|} l_x v^x = v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + \cdots + v^{x+n} d_{x+n-1}.$$

Θέτοντας $D_x = l_x v^x$ και $C_x = v^{x+1} d_x$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} A_{1:\overline{n}|} D_x &= C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} - \sum_{t=n}^{\infty} C_{x+t} \\ \Rightarrow A_{1:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \\ &= A_x - {}_n A_x \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

β) **τρόπος:** Από την (2.3.16) έχουμε

$$A_{\overline{x:n}|} = v \frac{d_x}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x} + \cdots + v^n \frac{d_{x+n-1}}{l_x}. \quad (2.3.18)$$

Θέτοντας ${}_n/q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$, λαμβάνουμε τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} A_{\overline{x:n}|} &= v {}_0/q_x + v^2 {}_1/q_x + \cdots + v^n {}_{(n-1)}/q_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_t/q_x \\ &= \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} d_{x+t} \\ &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} v^x d_{x+t} \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Παράδειγμα 22. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA) το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 298031$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$).

Λύση: Το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ, ισούται με

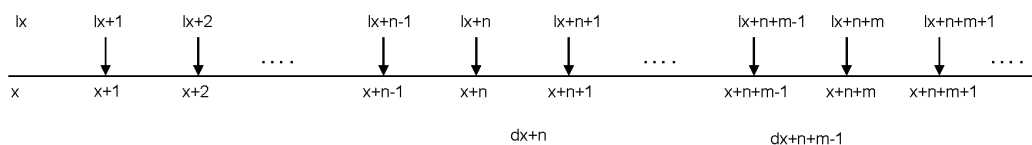
$$\begin{aligned} A_{\overline{30:20}|} &= \frac{M_{30} - M_{30+20}}{D_{30}} = \frac{M_{30} - M_{50}}{D_{30}} \\ &= \frac{3674 - 3163}{298031} \\ &= 0.01714592. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ, ισούται με $EMA = (0.01714592)(100000) = 1714.592$.

2.3.4 Μέλλουσα n Ετών Πρόσκαιρη m Ετών Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου

Ορισμός 17. Στη μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών ασφάλιση (*n-year deferred m-year term insurance*): η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του αποθανόντα ένα ορισμένο ποσό στο τέλος του έτους του θανάτου του, αν ο θάνατος του ασφαλισμένου ηλικίας x επέλθει μεταξύ των ηλικιών $x + n$ και $x + n + m$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο ${}_n/mA_x$ (παρούσα αξία) που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος ηλικίας x τη στιγμή που ασφαλίζεται, έτσι ώστε αν πεθάνει μεταξύ των ηλικιών $x + n$ και $x + n + m$, η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλει στους κληρονόμους του 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του.



Σχήμα 2.12: Μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών ασφάλιση θανάτου

Έστω ότι, l_x ισούται με το πλήθος ατόμων ηλικίας x που συνάπτουν ασφάλιση θανάτου μέλλουσα n ετών πρόσκαιρη m ετών. Η ασφαλιστική εταιρία θα εισπράξει το ποσό των ${}_n/mA_x$ ν.μ από κάθε ασφαλισμένο. Έτσι για τους l_x θα εισπράξει το συνολικό ποσό των

$${}_n/mA_x l_x.$$

Όμοια, όπως και στην (2.3.14) έχουμε

$${}_n/mA_x l_x = v^{n+1}d_{x+n} + v^{n+2}d_{x+n+1} + \cdots + v^{n+m}d_{x+n+m-1}. \quad (2.3.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.3.20) με v^x , λαμβάνουμε

$${}_n/mA_x l_x v^x = v^{x+n+1}d_{x+n} + v^{x+n+2}d_{x+n+1} + \cdots + v^{x+n+m}d_{x+n+m-1}.$$

Θέτοντας $D_x = l_x v^x$ και $C_x = v^{x+1}d_x$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} {}_n/mA_x D_x &= C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots + C_{x+n+m-1} \\ &= \sum_{t=n}^{n+m-1} C_{x+t} \\ &= \sum_{t=n}^{\infty} C_{x+t} - \sum_{t=n+m}^{\infty} C_{x+t} \\ &= M_{x+n} - M_{x+n+m} \\ \Rightarrow {}_n/mA_x &= \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x} \\ &= {}_n/A_x - {}_{n+m}/A_x. \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Παράδειγμα 23. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μεταξύ του 50ου και 60ου έτους της ηλικίας του, οι κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 100000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $M_{50} = 3163$, $M_{60} = 2783$).

Λύση: Το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μεταξύ του 50ου και 60ου έτους της ηλικίας του οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ, ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{20/10}A_{30} &= \frac{M_{30+20} - M_{30+20+10}}{D_{30}} \\ &= \frac{M_{50} - M_{60}}{D_{30}} \\ &= \frac{3163 - 2783}{29803} \\ &= 0.01275039. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA, το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο, ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ, ισούται με $EMA = (0.01275039)(100000) = 1275.039$.

2.3.5 Μικτή Ασφάλιση

Ορισμός 18. Στην μικτή ασφάλιση n ετών (n -year endowment insurance), η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει ένα ορισμένο ποσό στον ασφαλισμένο μετά από n έτη, αν βρίσκεται εν ζωή ή στους κληρονόμους του στο τέλος του έτους του θανάτου του, αν ο θάνατος του ασφαλισμένου ηλικίας x επέλθει εντός n ετών από την ημερομηνία σύναψης του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Έτσι, το EMA που πρέπει να καταβάλλει ο ασφαλισμένος είναι

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A_{1\overline{x:\overline{n}|}} + A_{\frac{1}{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Παράδειγμα 24. Να βρεθεί το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA), το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία, ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 100000 Ευρώ ή μετά από 20 έτη να εισπράξει ο ίδιος το ίδιο ποσό αν βρίσκεται εν ζωή. (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{30} = 29803$, $D_{50} = 13235$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$).

Λύση: Το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε μετά από 20 έτη, αν βρίσκεται εν ζωή να λάβει 1 Ευρώ ή αν πεθάνει μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ, ισούται με

$$\begin{aligned}
A_{30:\overline{20}|} &= A_{30:\overline{20}|}^1 + A_{30:\overline{20}|}^{\frac{1}{20}} \\
&= \frac{M_{30} - M_{30+20}}{D_{30}} + \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \\
&= \frac{3674 - 3163 + 13235}{29803} \\
&= 0.4612287.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε μετά από 20 έτη αν βρίσκεται εν ζωή να λάβει 100000 Ευρώ ή αν πεθάνει μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 100000 Ευρώ, ισούται με $EMA = (0.4612287)(100000) = 46122.87$.

Άσκηση 9. Να επαναλάβετε τα Παραδείγματα 20-24 εφαρμόζοντας τους πίνακες θνησιμότητας ανδρών, και γυναικών με επιτόκιο $i = 3.0\%$. Τι παρατηρείτε;

Πίνακας 2.2: Ασφαλίσεις σε Περίπτωση Θανάτου

Πληρωμή στο Τέλος του Έτους του Θανάτου του Ασφαλισμένου		
Ισόβια Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου	A_x	$\frac{M_x}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου	${}_n/A_x$	$\frac{M_{x+n}}{D_x}$
Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου	$A_{1:\overline{n} } = A_x - {}_n/A_x$	$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
Μέλλουσα n Ετών Πρόσκαιρη m Ετών Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου	${}_{n/m}A_x = {}_n/A_x - {}_{n+m}/A_x$	$\frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}$
Μικτή Ασφάλιση n Ετών	$A_{x:\overline{n} } = A_{\frac{1}{x:\overline{n} }} + A_{1:\overline{n} }$	$\frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$

2.4 Ασφάλιστρα υπό Μορφή Μελλοντικών Εισφορών για Μελλοντικές Παροχές

Τα ασφάλιστρα προεξοφλούνται από τους ασφαλισμένους προς την ασφαλιστική εταιρία με περιοδικές πληρωμές. Η πρώτη πληρωμή γίνεται με τη υπογραφή του συμβολαίου, οι υπόλοιπες στην αρχή κάθε περιόδου για όσο χρονικό διάστημα ορίζει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Επίσης, τα ασφάλιστρα είναι σταθερά, δηλαδή ο ασφαλισμένος πληρώνει το ίδιο ποσό κάθε περίοδο.

Η βασική ιδέα για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου είναι ότι, η Π.Α. όλων των μελλοντικών πληρωμών (εισφορών) θα πρέπει να ισούται με την Π.Α. όλων των μελλοντικών παροχών. Έστω

P : το ετήσιο ασφάλιστρο (premium),

$\ddot{a}$: η Π.Α. προκαταβλητέας ράντας ζωής,

A : το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο.

Επειδή η πρώτη πληρωμή γίνεται σχεδόν πάντοτε με τη υπογραφή του συμβολαίου, η βασική σχέση υπολογισμού του ασφαλίστρου έχει την μορφή

$$P \ddot{a} = A.$$

2.4.1 Ισόβια Ασφάλιση σε περίπτωση Θανάτου με Ισόβια Πληρωμή Ασφαλιστρών

Ορισμός 19. Το άτομο ασφαρίζεται εφ' όρου ζωής. Το ετήσιο ασφαλιστρο P_x καταβάλλεται στην αρχή κάθε έτους ισobίως (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του.

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}.$$

Παράδειγμα 25. Να βρεθεί το ποσό του ετήσιου ασφαλιστρο το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους (με τη υπογραφή του συμβολαίου) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, έτσι ώστε όταν πεθάνει, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $N_{30} = 677106$).

Λύση: Έχουμε την περίπτωση ισobίας ασφάλισης θανάτου ατόμου ηλικίας $x = 30$ ετών. Το ασφαλιστρο που πρέπει να καταβάλλει ο ασφαλισμένος στην αρχή κάθε έτους (ισobία) και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, έτσι ώστε όταν πεθάνει, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ ισούται με

$$\begin{aligned} P_{30} &= \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30}} = \frac{\frac{M_{30}}{D_{30}}}{\frac{N_{30}}{D_{30}}} = \frac{M_{30}}{N_{30}} \\ &= \left(\frac{3674}{677106} \right) \\ &= 0.005426034. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι κληρονόμοι του για να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ, ο ασφαλισμένος πρέπει να πληρώνει ετήσιο ασφαλιστρο ίσο με $(30000)(0.005426034) = 162.781$.

2.4.2 Ασφάλιση Προικοδότησης n Ετών με Πρόσκαιρη n Ετών Πληρωμή Ασφαλιστρών

Ορισμός 20. Το άτομο ασφαρίζεται για n έτη. Το ετήσιο ασφαλιστρο $P_{x:\overline{n}|}^1$ καταβάλλεται για n έτη (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από n έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ).

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}|}^1 &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{\frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \\ &= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 26. Να βρεθεί το ποσό του ετήσιου ασφαλιστρο, το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο, ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους για 20 έτη, έτσι ώστε μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $D_{50} = 13235$, $N_{30} = 677106$, $N_{50} = 259619$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $n = 20$. Το ετήσιο ασφαλιστρο που πρέπει να πληρώσει ο ασφαλισμένος για να λάβει 1 Ευρώ, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, ισούται με

$$\begin{aligned} P_{30:\overline{20}|}^1 &= \frac{D_{30+20}}{N_{30} - N_{30+20}} = \frac{D_{50}}{N_{30} - N_{50}} \\ &= \frac{13235}{677106 - 259619} \\ &= 0.03170159. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λάβει το ποσό των 30000 Ευρώ μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία ετήσιο ασφαλιστρο ίσο με $(30000)(0.031447) = 951.0477$ Ευρώ.

2.4.3 Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη n Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων

Ορισμός 21. Το άτομο ασφαρίζεται για n έτη. Το ετήσιο ασφάλιστρο $P_{1:\overline{n}|}$ καταβάλλεται για n έτη (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου μέσα σ' αυτά τα n έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του.

$$\begin{aligned} P_{1:\overline{n}|} &= \frac{A_{1:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 27. Να βρεθεί το ποσό του ασφάλιστρου το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους για 20 έτη, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$, $N_{30} = 677106$, $N_{50} = 259619$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $n = 20$. Το ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσει, έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ ισούται

$$\begin{aligned} P_{1:\overline{30:20}|} &= \frac{M_{30} - M_{30+20}}{N_{30} - N_{30+20}} = \frac{M_{30} - M_{50}}{N_{30} - N_{50}} \\ &= \frac{3674 - 3163}{677106 - 259619} \\ &= 0.00122399. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν πεθάνει μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του, για να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ, θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία ετήσιο ασφάλιστρο ίσο με $(30000)(0.00122399) = 36.7197$ Ευρώ.

2.4.4 Μικτή Ασφάλιση n Ετών Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση Θανάτου

Ορισμός 22. Το άτομο ασφαλιζεται για n έτη. Το ετήσιο ασφάλιστρο $P_{x:\overline{n}|}$ καταβάλλεται για n έτη, έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από n έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα n έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του.

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \cdot 1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 28. Να βρεθεί το ποσό του ασφάλιστρου, το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Γιώργος, ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους για 20 έτη, έτσι ώστε μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει το ποσό των 30000 Ευρώ ή αν πεθάνει μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$, $D_{50} = 13235$, $N_{30} = 677106$, $N_{50} = 259619$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $n = 20$. Το ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσει ο κ. Γιώργος, έτσι ώστε μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 Ευρώ ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ ισούται

$$\begin{aligned} P_{30:\overline{20}|} &= \frac{M_{30} - M_{30+20} + D_{30+20}}{N_{30} - N_{30+20}} \\ &= \frac{3674 - 3163 + 13235}{677106 - 259619} \\ &= 0.03292558. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λάβει ο ίδιος μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, το ποσό των 30000 Ευρώ ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι

κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 30000 Ευρώ, θα πρέπει να καταβάλλει ετήσιο ασφαλιστρο ίσο με $(30000)(0.03292558)=987.7674$ Ευρώ.

2.4.5 Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου, Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλιστρών

Ορισμός 23. Το άτομο ασφαρίζεται εφόρου ζωής. Το ετήσιο ασφαλιστρο ${}_tP_x$ καταβάλλεται στην αρχή κάθε έτους για t έτη (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του.

$$\begin{aligned} {}_tP_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\ &= \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} \\ &= \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 29. Να βρεθεί το ποσό του ασφαλιστρού το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο, ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους, για 10 έτη, έτσι ώστε οποιαδήποτε στιγμή κι αν πεθάνει οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $N_{30} = 677106$, $N_{40} = 426739$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $t = 10$. Το ετήσιο ασφαλιστρο που πρέπει να πληρώνει ο ασφαλισμένος για 10 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, έτσι ώστε ή σε περίπτωση θανάτου του (ισόβια) οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{10}P_{30} &= \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{30+10}} \\ &= \frac{3674}{677106 - 426739} \\ &= 0.01467446. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να εισπράξουν οι κληρονόμοι του στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ πρέπει να πληρώσει ετήσιο ασφαλιστρο ίσο με $(0.01467446)(30000)=440.2338$ Ευρώ.

2.4.6 Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση Θανάτου Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων

Ορισμός 24. Το άτομο ασφαρίζεται για n έτη. Το ετήσιο ασφάλιστρο ${}_tP_{x:\overline{n}|}$ καταβάλλεται για $t(t < n)$ έτη (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου στα n έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του, δηλαδή

$$\begin{aligned} {}_tP_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \\ &= \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 30. Να βρεθεί το ετήσιο ποσό του ασφάλιστρου το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο, ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους για 10 έτη, έτσι ώστε αν πεθάνει μέσα σε 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$, $D_{50} = 13235$, $N_{30} = 677106$, $N_{40} = 426739$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $t = 10$, $n = 20$. Το ετήσιο ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώνει ο ασφαλισμένος στην αρχή κάθε έτους για 10 έτη, έτσι ώστε όταν πεθάνει μέσα σε 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ, ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{10}P_{30:\overline{20}|} &= \frac{M_{30} - M_{30+20}}{N_{30} - N_{30+10}} = \frac{M_{30} - M_{50}}{N_{30} - N_{40}} \\ &= \frac{3674 - 3163}{677106 - 426739} \\ &= 0.002041004. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να εισπράξουν οι κληρονόμοι του στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ μέσα στα 20 έτη, ο ασφαλισμένος θα πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική εταιρία ετήσιο ασφάλιστρο ίσο με $(30000)(0.002041004) = 61.23012$ Ευρώ.

2.4.7 Μικτή Ασφάλιση n Ετών, Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων ($t < n$)

Ορισμός 25. Το άτομο ασφαλιζεται για n έτη. Το ετήσιο ασφάλιστρο ${}_tP_{x:\overline{n}|}$ καταβάλλεται για $t(t < n)$ έτη (και εφόσον το άτομο είναι εν ζωή), έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από n έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. ή σε περίπτωση θανάτου του, μέσα σ' αυτά τα n έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του, δηλαδή

$$\begin{aligned} {}_tP_{x:\overline{n}|} &= \frac{A_{\overline{x:\overline{n}|}} + A_{\overline{x:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 31. Να βρεθεί το ποσό του ασφάλιστρου το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ένα άτομο ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε έτους για 10 έτη, έτσι ώστε μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 30000 Ευρώ ή όταν πεθάνει μέσα στα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο $i = 4.0\%$, $M_{30} = 3674$, $M_{50} = 3163$, $D_{50} = 13235$, $N_{30} = 677106$, $N_{40} = 426739$).

Λύση: Έχουμε $x = 30$, $t = 10$, $n = 20$. Το ασφάλιστρο που πρέπει να πληρώσει, έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 Ευρώ ή, σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ, ισούται

$$\begin{aligned} {}_{10}P_{30:\overline{20}|} &= \frac{M_{30} - M_{30+20} + D_{30+20}}{N_{30} - N_{30+10}} \\ &= \frac{3674 - 3163 + 13235}{677106 - 426739} \\ &= 0.0549034. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να λάβει ο ίδιος μετά από 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, το ποσό των 30000 Ευρώ ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα 20 έτη, οι

κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 30000 Ευρώ, θα πρέπει να καταβάλλει ετήσιο ασφάλιστρο ίσο με $(30000)(0.0549034)=1647.102$ Ευρώ.

Άσκηση 10. Να επαναλάβετε τα Παραδείγματα 21-27 εφαρμόζοντας α) πίνακες θνησιμότητας γυναικών με επιτόκιο $i = 4.0\%$ και β) πίνακες θνησιμότητας ανδρών και γυναικών με επιτόκιο $i = 3.0\%$. Τι παρατηρείτε;

Πίνακας 2.3: Ετήσια Ασφάλιστρα

Ασφάλιστρα Μελλοντικών Εισφορών για Μελλοντικές Παροχές		
P: Ετήσιο Ασφάλιστρο		
Ισόβια Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου με ισόβια Πληρωμή Ασφαλίσεων	$P_x = \frac{A_x}{a_x}$	$\frac{M_x}{N_x}$
Ασφάλιση Προικοδότησης n Ετών με Πρόσκαιρη n Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	$P_{x:\overline{n} } = \frac{A_{x:\overline{n} }}{a_{x:\overline{n} }}$	$\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη n Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	$P_{1x:\overline{n} } = \frac{A_{1x:\overline{n} }}{a_{x:\overline{n} }}$	$\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Μικτή Ασφάλιση n Ετών με Πρόσκαιρη n Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	$P_{x:\overline{n} } = \frac{A_{1x:\overline{n} } + A_{x:\overline{n} }}{a_{x:\overline{n} }}$	$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$
Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	${}_tP_x = \frac{A_x}{a_{x:\overline{t} }}, \quad t \leq n$	$\frac{M_x}{N_x - N_{x+t}},$
Πρόσκαιρη n Ετών Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	${}_tP_{1x:\overline{n} } = \frac{A_{1x:\overline{n} }}{a_{x:\overline{t} }}, \quad t \leq n$	$\frac{M_x - M_{x+n}}{N_t - N_{x+t}}$
Μικτή Ασφάλιση n Ετών με Πρόσκαιρη t Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων	${}_tP_{x:\overline{n} } = \frac{A_{1x:\overline{n} } + A_{x:\overline{n} }}{a_{x:\overline{t} }}, \quad t \leq n$	$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_t - N_{x+t}}$