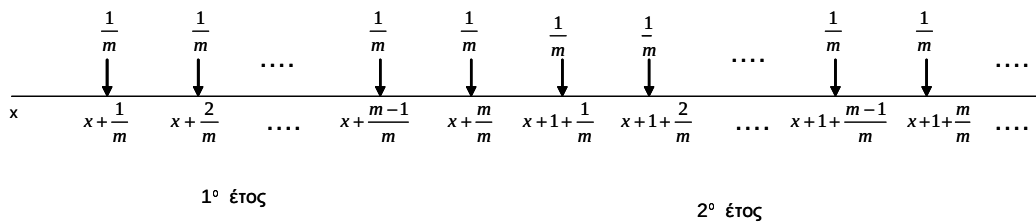


## Κεφάλαιο 3

### Κλασματικές Ράντες

**Ορισμός 26.**  $a_x^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία (Π.Α.) μιας ισόβιας ληξιπρόθεσμης ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ , τρίμηνο,  $m=4$ , κ.λπ.) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x + \frac{1}{m}$ .



Σχήμα 3.1: Κλασματική ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

Στο παραπάνω διάγραμμα έχουμε τις περιόδους πληρωμών για το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> έτος. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να έχουμε το διάγραμμα για τα υπόλοιπα

έτη, 3<sup>ο</sup> έτος, 4<sup>ο</sup> έτος, κ.λπ. Ο υπολογισμός της γίνεται προσεγγιστικά ως

$$\begin{aligned}
 a_x^{(m)} &= \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{l_{x+1/m}}{l_x} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} \frac{l_{x+2/m}}{l_x} + \dots + \frac{1}{m} v^{\frac{m}{m}} \frac{l_{x+m/m}}{l_x} && 1^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \frac{1}{m} v^{1+\frac{1}{m}} \frac{l_{x+1+1/m}}{l_x} + \frac{1}{m} v^{1+\frac{2}{m}} \frac{l_{x+1+2/m}}{l_x} + \dots \\
 &\dots + \frac{1}{m} v^{1+\frac{m}{m}} \frac{l_{x+1+m/m}}{l_x} && 2^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \dots + \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{m} A_{x:\frac{1}{m}|} + \frac{1}{m} A_{x:\frac{2}{m}|} + \dots + \frac{1}{m} A_{x:\frac{m}{m}|} && 1^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \frac{1}{m} A_{x:1+\frac{1}{m}|} + \frac{1}{m} A_{x:1+\frac{2}{m}|} + \dots + \frac{1}{m} A_{x:1+\frac{m}{m}|} && 2^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \dots + \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{m} \frac{D_{x+1/m}}{D_x} + \frac{1}{m} \frac{D_{x+2/m}}{D_x} + \dots + \frac{1}{m} \frac{D_{x+m/m}}{D_x} && 1^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \frac{1}{m} \frac{D_{x+1+1/m}}{D_x} + \frac{1}{m} \frac{D_{x+1+2/m}}{D_x} + \dots + \frac{1}{m} \frac{D_{x+1+m/m}}{D_x} && 2^\circ \text{ έτος} \\
 &+ \dots + \\
 &\vdots \\
 &= \frac{1}{mD_x} \sum_{j=1}^m \left( D_{x+j/m} + D_{x+1+j/m} + D_{x+2+j/m} + \dots + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{mD_x} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m (D_{x+i+j/m}).
 \end{aligned}$$

Κάνοντας την παρεμβολή  $D_{x+i+j/m} \approx D_{x+i} + \frac{j}{m}(D_{x+i+1} - D_{x+i})$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
 a_x^{(m)} &\approx \frac{1}{mD_x} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left[ D_{x+i} + \frac{j}{m}(D_{x+i+1} - D_{x+i}) \right] \\
 &= \frac{1}{mD_x} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m D_{x+i} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \frac{j}{m} D_{x+i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m \frac{j}{m} D_{x+i} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{mD_x} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} mD_{x+i} + \sum_{j=1}^m \frac{j}{m} (D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots) - \sum_{j=1}^m \frac{j}{m} (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots) \right].$$

Αφαιρώντας το 3ο μέλος από το 2ο μέλος και θέτοντας

$$\sum_{i=0}^{\infty} mD_{x+i} = mD_x + \sum_{i=1}^{\infty} mD_{x+i}$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &\approx \frac{1}{mD_x} \left[ mD_x + \sum_{i=1}^{\infty} mD_{x+i} - \sum_{j=1}^m \frac{j}{m} D_x \right] \\ &= 1 + \frac{1}{D_x} \sum_{i=1}^{\infty} D_{x+i} - \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m j \\ &= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{1}{m^2} \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{‘κάνουμε ομώνυμα’} \\ &= \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \\ &= a_x + \frac{m-1}{2m}. \end{aligned}$$

**Ορισμός 27.**  $\ddot{a}_x^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας ισόβιας προκαταβλητέας ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x$ .

Γνωρίζουμε ότι  $\ddot{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m}$  το οποίο συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &\approx a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \ddot{a}_x - 1 + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}.\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

**Παράδειγμα 32.** Με βάση τη  $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$  να αποδειχθεί ότι  $\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x}$ .

**Απόδειξη:** Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &\approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \\ &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \\ &= \frac{N_x - \frac{m-1}{2m}D_x}{D_x} \\ &= \frac{N_x^{(m)}}{D_x},\end{aligned}\tag{3.0.2}$$

όπου  $N_x^{(m)} \approx N_x - \frac{m-1}{2m}D_x$ .

**Παράδειγμα 33.** Να υπολογίσετε το EMA που πρέπει να πληρώσει άτομο, ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε να του παρέχεται εισόδημα 300 Ευρώ α) στο τέλος κάθε μήνα, β) στην αρχή κάθε μήνα αμέσως μετά την καταβολή του EMA (Επιτόκιο  $i = 4.0\%$ ,  $D_{30} = 29803$ ,  $N_{30} = 677106$ ,  $D_{31} = 28629$ ,  $N_{31} = 647303$ ).

**Λύση:** α) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να

λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  στο τέλος κάθε μήνα, ισούται με

$$\begin{aligned} a_{30}^{(12)} &= \frac{N_{30+1}}{D_{30}} + \frac{12-1}{2(12)} \\ &= \frac{647303}{29803} + \frac{11}{24} \\ &= 22.177724. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το ΕΜΑ που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα, ισούται με  $EMA = (12)(300)(22.177724) = 79839.806482$ .

β) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  στην αρχή κάθε μήνα, ισούται με

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30}^{(12)} &= \frac{N_{30}}{D_{30}} - \frac{12-1}{2(12)} \\ &= \frac{677106}{29803} - \frac{11}{24} \\ &= 22.26106. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το ΕΜΑ που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα, ισούται με  $EMA = (12)(300)(22.26106) = 80139.82$ .

**Ορισμός 28.**  ${}_n/a_x^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας μέλλουσας  $n$  ετών ισόβιας ληξιπρόθεσμης ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή

γίνεται στην ηλικία  $x + n + \frac{1}{m}$ .

$$\begin{aligned}
 {}_n/a_x^{(m)} &= A_{x:\frac{1}{m}|} a_{x+n}^{(m)} \\
 &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= {}_n/a_x + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right). \tag{3.0.3}
 \end{aligned}$$

**Ορισμός 29.**  ${}_n/\ddot{a}_x^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας μέλλουσας  $n$  ετών ισόβιας προκαταβλητέας ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x + n$ .

$$\begin{aligned}
 {}_n/\ddot{a}_x^{(m)} &= A_{x:\frac{1}{m}|} \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\
 &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \ddot{a}_{x+n} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= {}_n/\ddot{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right). \tag{3.0.4}
 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 34.** Να υπολογίσετε το EMA που πρέπει να πληρώσει άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε να του παρέχεται εισόδημα 300 Ευρώ α) στο τέλος κάθε μήνα μετά από 20 έτη και β) στην αρχή κάθε μήνα μετά από 20 έτη (Επιτόκιο  $i = 4.0\%$ ,  $D_{30} = 29803$ ,  $D_{50} = 13235$ ,  $N_{30} = 677106$ ,  $N_{31} = 647303$ ,  $N_{50} = 259619$ ,  $N_{51} = 246384$ ).

**Λύση:** α) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα (ισόβια) μετά από 20 έτη ισούται με

$$\begin{aligned}
 {}_{20}/a_{30}^{(12)} &= {}_{20}/a_{30} + \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= \frac{N_{30+20+1}}{D_{30}} + \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= \frac{246384}{29803} + \frac{13235}{29803} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= 8.470625.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα μετά από 20 έτη, ισούται με  $EMA = (12)(300)(8.470625) = 30494.25$ .

β) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα (ισόβια), μετά από 20 έτη, ισούται με

$$\begin{aligned}
 {}_{20}/\ddot{a}_{30}^{(12)} &= {}_{20}/\ddot{a}_{30} - \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= \frac{N_{30+20}}{D_{30}} - \frac{D_{50}}{D_{30}} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= \frac{259619}{29803} - \frac{13235}{29803} \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \\
 &= 8.507632061.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα, μετά από 20 έτη, ισούται με  $EMA = (12)(300)(8.507632061) = 30627.47542$ .

**Ορισμός 30.**  $a_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας πρόσκαιρης  $n$  ετών ληξιπρόθεσμης ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x + \frac{1}{m}$  και η τελευταία στην ηλικία  $x + n$ , δηλαδή

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_x^{(m)} - n/a_x^{(m)}$$

$$\begin{aligned}
&\approx a_x + \frac{m-1}{2m} - \left[ {}_n/a_x + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \right] \\
&= a_x - {}_n/a_x + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\
&= a_{x:\overline{n}|} + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\
&= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right). \quad (3.0.5)
\end{aligned}$$

**Ορισμός 31.**  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας πρόσκαιρης  $n$  ετών προκαταβλητέας ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x$  και η τελευταία στην ηλικία  $x + n - \frac{1}{m}$ , δηλαδή

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n/\ddot{a}_x^{(m)} \\
&\approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \left[ {}_n/\ddot{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \right] \\
&= \ddot{a}_x - {}_n/\ddot{a}_x - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right). \quad (3.0.6)
\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 35.** Να υπολογίσετε το EMA που πρέπει να πληρώσει άτομο ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε να του παρέχεται εισόδημα 300 Ευρώ από την αρχή της σύμβασης α) στο τέλος κάθε μήνα για 20 έτη, β) στην αρχή κάθε μήνα για 20 έτη (Επιτόκιο  $i = 4.0\%$ ,  $D_{30} = 29803$ ,  $D_{31} = 28629$ ,  $D_{50} = 13235$ ,  $N_{30} = 677106$ ,  $N_{31} = 647303$ ,  $N_{50} = 259619$ ,  $N_{51} = 246384$ ).

**Λύση:** α) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να

λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα για 20 έτη, ισούται με

$$\begin{aligned} a_{30:20|}^{(12)} &= \frac{N_{30+1} - N_{30+20+1}}{D_{30}} + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{647303 - 246384}{29803} + \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \left( 1 - \frac{13235}{29803} \right) \\ &= 13.7071. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα για 20 έτη, ισούται με  $EMA = (12)(300)(13.7071) = 49345.56$ .

β) Με βάση τη σχέση (3.0.6), το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα για 20 έτη, ισούται με

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30:20|}^{(m)} &= \frac{N_{30} - N_{30+20}}{D_{30}} - \left( \frac{12-1}{24} \right) \left( 1 - \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{677106 - 259619}{29803} - \left( \frac{12-1}{24} \right) \left( 1 - \frac{13235}{29803} \right) \\ &= 13.7534253. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα για 20 έτη, ισούται με

$$EMA = (12)(300)(13.7534253) = 49512.33097339.$$

**Ορισμός 32.**  $n/a_{x:\overline{k}|}^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας μέλλουσας  $n$  ετών και συγχρόνως πρόσκαιρης  $k$  ετών ληξιπρόθεσμης ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x + n + \frac{1}{m}$  και η τελευταία

στην ηλικία  $x + n + k$ , δηλαδή

$$\begin{aligned}
 {}_n/a_{x:\overline{k}|}^{(m)} &= {}_n/a_x^{(m)} - {}_{n+k}/a_x^{(m)} \\
 &= \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n}^{(m)} - \frac{D_{x+n+k}}{D_x} a_{x+n+k}^{(m)} \\
 &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right) - \frac{D_{x+n+k}}{D_x} \left( a_{x+n+k} + \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= {}_n/a_x - {}_{n+k}/a_x + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( \frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x} \right) \\
 &= {}_n/a_{x:\overline{k}|} + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n+k}|} \right) \\
 &= \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+k+1}}{D_x} + \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( \frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x} \right). \quad (3.0.7)
 \end{aligned}$$

**Ορισμός 33.**  ${}_n/\ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}$  είναι η παρούσα αξία μιας μέλλουσας  $n$  ετών και συγχρόνως πρόσκαιρης  $k$  ετών προκαταβλητέας ράντας ζωής, η οποία κάθε περίοδο (π.χ. μήνα,  $m=12$ ) πληρώνει ποσό ίσο με  $\frac{1}{m}$  νομισματικές μονάδες σε άτομο ηλικίας  $x$ . Η πρώτη πληρωμή γίνεται στην ηλικία  $x + n$  και η τελευταία στην ηλικία  $x + n + k - \frac{1}{m}$ , δηλαδή

$$\begin{aligned}
 {}_n/\ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)} &= {}_n/\ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n+k}/\ddot{a}_x^{(m)} \\
 &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \ddot{a}_{x+n}^{(m)} - \frac{D_{x+n+k}}{D_x} \ddot{a}_{x+n+k}^{(m)} \\
 &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right) - \frac{D_{x+n+k}}{D_x} \left( \ddot{a}_{x+n+k} - \frac{m-1}{2m} \right) \\
 &= {}_n/\ddot{a}_x - {}_{n+k}/\ddot{a}_x - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( \frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x} \right) \\
 &= {}_n/\ddot{a}_{x:\overline{k}|} - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n+k}|} \right) \\
 &= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+k}}{D_x} - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( \frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x} \right). \quad (3.0.8)
 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 36.** Να υπολογίσετε το EMA που πρέπει να πληρώσει ο κ. Γιώργος, ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε μετά από 20 έτη και για μια χρονική περίοδο 10 ετών να του παρέχεται εισόδημα 300 Ευρώ α) στο τέλος κάθε μήνα και β) στην αρχή κάθε μήνα (Επιτόκιο  $i = 4.0\%$ ,  $D_{30} = 29803$ ,  $D_{50} = 13235$ ,  $D_{60} = 8618$ ,  $N_{50} = 259619$ ,  $N_{51} = 246384$ ,  $N_{60} = 149448$ ,  $N_{61} = 140830$ ).

**Λύση:** α) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο κ. Γιώργος, για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα, μετά από 20 έτη για μια χρονική περίοδο 10 ετών, ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{20}/a_{30:\overline{10}|}^{(12)} &= \frac{N_{30+20+1} - N_{30+20+10+1}}{D_{30}} + \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \left( \frac{D_{30+20} - D_{30+20+10}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{246384 - 140830}{29803} + \left( \frac{11}{24} \right) \left( \frac{13235 - 8618}{29803} \right) \\ &= 3.612728. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο κ. Γιώργος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα, μετά από 20 έτη, για μια χρονική περίοδο 10 ετών, ισούται με  $EMA = (12)(300)(3.612728) = 13005.82$ .

β) Το ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο κ. Γιώργος για να λαμβάνει  $\frac{1}{12}$  του Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα, μετά από 20 έτη, για μια χρονική περίοδο 10 ετών ισούται με

$$\begin{aligned} {}_{20}/\ddot{a}_{30:\overline{10}|}^{(12)} &= \frac{N_{30+20} - N_{30+20+10}}{D_{30}} - \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \left( \frac{D_{30+20} - D_{30+20+10}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{259619 - 149448}{29803} - \left( \frac{11}{24} \right) \left( \frac{13235 - 8618}{29803} \right) \\ &= 3.625638. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλισμένος, για να λαμβάνει 300 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα μετά από 20 έτη, για μια χρονική περίοδο 10 ετών, ισούται με  $EMA = (12)(300)(3.625638) = 13052.3$ .

**Παράδειγμα 37.** Ο θείος Γιάννης από την Αμερική έρχεται στην Ελλάδα και ασφαλίζει την 1/1/2017 τις 4 ανιψιές του, ως εξής: α) Η Γεωργία είναι σήμερα 8 ετών και ασφαλίζεται, έτσι ώστε όταν φθάσει στην ηλικία των 20 ετών, να παίρνει στην αρχή κάθε έτους 10000 Ευρώ. β) Η Κατερίνα είναι

σήμερα 15 ετών και ασφαλίζεται, έτσι ώστε όταν φθάσει στην ηλικία των 18 ετών, να παίρνει στην αρχή κάθε μήνα 1000 Ευρώ για 5 έτη. γ) Η Μαρία είναι σήμερα 15 ετών και ασφαλίζεται, έτσι ώστε όταν φθάσει στην ηλικία των 21 ετών να πάρει προίκα 60000 Ευρώ. δ) Η Ευτυχία είναι σήμερα 20 ετών και ασφαλίζεται, έτσι ώστε από την ημέρα της ασφάλισης της και για 3 έτη να παίρνει στην αρχή κάθε μήνα 2000 Ευρώ. Ποιο είναι το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο (EMA) θα πρέπει να πληρώσει ο θείος Γιάννης από την Αμερική για να ασφαλίσει τις 4 ανιψιές του.

Γίνεται χρήση των πινάκων θνησιμότητας γυναικών στο τέλος του βιβλίου: ( $i = 4\%$ ,  $D_8 = 72039$ ,  $D_{15} = 54687$ ,  $D_{16} = 52575$ ,  $D_{18} = 48577$ ,  $D_{20} = 44885$ ,  $D_{21} = 43143$ ,  $D_{23} = 39869$ ,  $N_{15} = 1347648$ ,  $N_{16} = 1292961$ ,  $N_{18} = 1189847$ ,  $N_{20} = 1094575$ ,  $N_{21} = 1049690$ ,  $N_{23} = 965074$ ).

**Λύση:** α) Για τη Γεωργία το EMA είναι

$$1000 \cdot {}_{12}/\ddot{a}_8 = 1000 \cdot \frac{N_{20}}{D_8} = 1000 \cdot \frac{1094575}{72039} = 15194.2.$$

β) Για τη Κατερίνα έχουμε

$$\begin{aligned} {}_3/\ddot{a}_{15:\overline{5}|}^{(12)} &= \left[ \frac{N_{15+3} - N_{15+3+5}}{D_{15}} - \left( \frac{12-1}{2(12)} \right) \left( \frac{D_{15+3} - D_{15+3+5}}{D_{15}} \right) \right] \\ &= \left[ \frac{1189847 - 965074}{54687} - \left( \frac{11}{24} \right) \left( \frac{48577 - 39869}{54687} \right) \right] \\ &= 4.03719. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο θείος, έτσι ώστε η Κατερίνα να λαμβάνει 1000 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα μετά από 20 έτη για μια χρονική περίοδο 10 ετών, ισούται με  $EMA = (12)(1000)(4.03719) = 48446.28$ .

γ) Για τη Μαρία το EMA είναι

$$\begin{aligned} 60000 A_{15:\overline{6}|}^{\frac{1}{15}} &= 60000 \frac{D_{21}}{D_{15}} \\ &= 60000 \frac{43143}{54687} \\ &= 47334.47. \end{aligned}$$

δ) Για την Ευτυχία έχουμε

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{20:\overline{3}|}^{(m)} &= \left[ \frac{N_{20} - N_{20+3}}{D_{20}} - \left( \frac{12-1}{24} \right) \left( 1 - \frac{D_{20+3}}{D_{20}} \right) \right] \\ &= \left[ \frac{1094575 - 965074}{44885} - \left( \frac{11}{24} \right) \left( 1 - \frac{39869}{44885} \right) \right] \\ &= 2.833953 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το EMA που πρέπει να καταβάλει ο θείος, έτσι ώστε η Ευτυχία να λαμβάνει 1000 Ευρώ στην αρχή κάθε μήνα μετά από 20 έτη για μια χρονική περίοδο 10 ετών, ισούται με  $EMA = (12)(2000)(2.833953) = 68014.87$ .

Έτσι, ο θείος Γιάννης, για να ασφαλίσει τις 4 ανιψιές του πρέπει να καταβάλει συνολικά  $EMA = 15194.2 + 48446.28 + 47334.47 + 68014.87 = 178989.8$  Ευρώ.

**Άσκηση 11.** Να επαναλάβετε το Παράδειγμα 33, χρησιμοποιώντας τους πίνακες θνησιμότητας των ανδρών στο τέλος του βιβλίου με επιτόκιο  $i = 4\%$ .

**Άσκηση 12.** Να επαναλάβετε τα Παραδείγματα 28-32 α) χρησιμοποιώντας τους πίνακες θνησιμότητας ανδρών με επιτόκιο  $i = 4\%$  και β) χρησιμοποιώντας τους πίνακες θνησιμότητας ανδρών και γυναικών στο τέλος του βιβλίου με επιτόκιο  $i = 3\%$ .

Πίνακας 3.1: Κλασματικές Ράντες (Fractional Annuities) Ζωής

|                                                    |                                                                                  |                                                                                 |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Ασφάλιση Προικοδότησης $n$ Ετών                    | $A_{x:\overline{n} }$                                                            | $\frac{D_{x+n}}{D_x}$                                                           |
| <b>Ληξιπρόθεσμη Ασφάλιση</b>                       |                                                                                  |                                                                                 |
| Ισόβια Ράντα Ζωής                                  | $a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$                                               | $\frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}$                                          |
| Μέλλουσα $n$ Ετών Ράντα Ζωής                       | $n/a_x^{(m)} = A_{x:\overline{n} } a_{x+n}^{(m)}$                                | $\frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} + \frac{m-1}{2m} \right)$ |
| Πρόσκαιρη $n$ Ετών Ράντα Ζωής                      | $a_{x:\overline{n} }^{(m)} = a_x^{(m)} - n/a_x^{(m)}$                            | $a_x^{(m)} - A_{x:\overline{n} } a_{x+n}^{(m)}$                                 |
| Μέλλουσα $n$ Ετών<br>Πρόσκαιρη $k$ Ετών Ράντα Ζωής | $n/a_{x:\overline{k} }^{(m)} = n/a_x^{(m)} - n+k/a_x^{(m)}$                      | $A_{x:\overline{n} } a_{x+n}^{(m)} - A_{x:n+k } a_{x+n+k}^{(m)}$                |
| <b>Προκαταβλητέα Ασφάλιση</b>                      |                                                                                  |                                                                                 |
| Ισόβια Ράντα Ζωής                                  | $\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$                                 | $\frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}$                                              |
| Μέλλουσα $n$ Ετών Ράντα Ζωής                       | $n/\ddot{a}_x^{(m)} = A_{x:\overline{n} } \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$                  | $\frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{m-1}{2m} \right)$   |
| Πρόσκαιρη $n$ Ετών Ράντα Ζωής                      | $\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - n/\ddot{a}_x^{(m)}$       | $\ddot{a}_x^{(m)} - A_{x:\overline{n} } \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$                   |
| Μέλλουσα $n$ Ετών<br>Πρόσκαιρη $k$ Ετών Ράντα Ζωής | $n/\ddot{a}_{x:\overline{k} }^{(m)} = n/\ddot{a}_x^{(m)} - n+k/\ddot{a}_x^{(m)}$ | $A_{x:\overline{n} } \ddot{a}_{x+n}^{(m)} - A_{x:n+k } \ddot{a}_{x+n+k}^{(m)}$  |

### 3.1 Ασφάλιστρα υπό Μορφή Κλασματικών (Περιοδικών) Μελλοντικών Εισφορών για Μελλοντικές Παροχές

Πολλές φορές τα ετήσια ασφάλιστρα προεξοφλούνται από τους ασφαλισμένους προς την ασφαλιστική εταιρία τμηματικά με περιοδικές πληρωμές εντός του έτους (πχ. μηνιαίες πληρωμές,  $m = 12$ ). Η πρώτη πληρωμή γίνεται με τη υπογραφή του συμβολαίου, ενώ οι υπόλοιπες στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα), όπως ορίζει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Αυτά τα ασφάλιστρα ονομάζονται κλασματικά, γιατί κάθε φορά πληρώνεται ένα κλάσμα του ετήσιου ασφαλίστρου. Έστω  $P^{(m)}$  είναι το συνολικό ετήσιο ασφάλιστρο που πληρώνεται περιοδικά σε  $m$  δόσεις (μηνιαία  $m = 12$ , ανά τρίμηνο,  $m = 4$ , εξαμηνιαία,  $m = 2$ , κ.λπ). Τότε το κλασματικό ασφάλιστρο είναι  $\frac{1}{m}P^{(m)}$  και πληρώνεται στην αρχή κάθε περιόδου που αντιστοιχεί στο  $\frac{1}{m}$  του έτους.

$\ddot{a}^{(m)}$ : η Π.Α. κλασματικής (π.χ. μηνιαίας) προκαταβλητέας ράντας ζωής.

$A$ : το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο.

Επειδή η πρώτη πληρωμή γίνεται σχεδόν πάντοτε με τη υπογραφή του συμβολαίου (προκαταβλητέα), η βασική σχέση υπολογισμού του ασφαλίστρου έχει την μορφή

$$P^{(m)} \ddot{a}^{(m)} = A.$$

#### 3.1.1 Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου, Ισόβια Πληρωμή Ασφαλίσεων

**Ορισμός 34.** Το άτομο ασφαρίζεται εφ' όρου ζωής. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m}P_x^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) ισobίως (και εφόσον το άτομο βρίσκεται εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (π.χ. 1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}},$$

όπου η  $A_x$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.13) και η  $\ddot{a}_x^{(m)}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.0.1).

### 3.1.2 Ασφάλιση Προικοδότησης $n$ Ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $n$ Ετών

**Ορισμός 35.** Το άτομο ασφαρίζεται για  $n$  έτη. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m}P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $n$  έτη, έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από  $n$  έτη εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}},$$

όπου η  $A_{x:\overline{n}|}$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.2.1) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.0.6).

### 3.1.3 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου $n$ Ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $n$ Ετών

**Ορισμός 36.** Το άτομο ασφαρίζεται για  $n$  έτη. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m}P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $n$  έτη (και εφόσον βρίσκεται εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου μέσα σ' αυτά τα  $n$  έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{1x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}},$$

όπου η  $A_{1x:\overline{n}|}$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.17) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.0.6).

### 3.1.4 Μικτή Ασφάλιση $n$ Ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $n$ Ετών

**Ορισμός 37.** Το άτομο ασφαρίζεται για  $n$  έτη. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m}P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $n$  έτη, έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από  $n$  έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα  $n$  έτη, οι

κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{1\overline{x:\overline{n}|}} + A_{\overline{x:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}},$$

όπου η  $A_{1\overline{x:\overline{n}|}}$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.17), η  $A_{\overline{x:\overline{n}|}}$  από τη σχέση (2.2.1) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$  από τη σχέση (3.0.6).

### 3.1.5 Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $t$ Ετών, $t < n$

**Ορισμός 38.** Το άτομο ασφαρίζεται εφ' όρου ζωής. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m} {}_tP_x^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $t$  έτη (και εφόσον το άτομο βρίσκεται εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. (1 Ευρώ) στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$${}_tP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}^{(m)}},$$

όπου η  $A_x$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.13) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{t}|}^{(m)}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.0.6), αντικαθιστώντας το  $n$  με το  $t$ .

### 3.1.6 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου $n$ Ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $t$ Ετών, $t < n$

**Ορισμός 39.** Το άτομο ασφαρίζεται για  $n$  έτη. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m} {}_tP_{1\overline{x:\overline{n}|}}^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $t$  έτη (και εφόσον το άτομο βρίσκεται εν ζωή), έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου μέσα σ' αυτά τα  $n$  έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$${}_tP_{1\overline{x:\overline{n}|}}^{(m)} = \frac{A_{1\overline{x:\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}^{(m)}},$$

όπου η  $A_{\frac{1}{x:\overline{n}}}$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.17) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.0.6), αντικαθιστώντας το  $n$  με το  $t$ .

### 3.1.7 Μικτή Ασφάλιση $n$ ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων $t$ ετών, $t < n$

**Ορισμός 40.** Το άτομο ασφαρίζεται για  $n$  έτη. Το κλασματικό (μηνιαίο) ασφάλιστρο  $\frac{1}{m} {}_tP_{x:\overline{n}}^{(m)}$  καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου (μήνα,  $m = 12$ ) για  $t$  έτη, έτσι ώστε ο ασφαλισμένος μετά από  $n$  έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 1 ν.μ. ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα  $n$  έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 ν.μ. στο τέλος του έτους του θανάτου του. Το ετήσιο ασφάλιστρο δίνεται από τη σχέση

$${}_tP_{x:\overline{n}}^{(m)} = \frac{A_{\frac{1}{x:\overline{n}}} + A_{\frac{1}{x:\overline{n}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)}},$$

όπου η  $A_{\frac{1}{x:\overline{n}}}$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.3.17), η  $A_{\frac{1}{x:\overline{n}}}$  από τη σχέση (2.2.1) και η  $\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)}$  από τη σχέση (3.0.6), αντικαθιστώντας το  $n$  με το  $t$ .

**Παράδειγμα 38.** Να βρεθεί το ποσό του ασφάλιστρου που πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Ηλίας ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε μήνα (με τη υπογραφή του συμβολαίου) και έως ότου βρίσκεται εν ζωή, έτσι ώστε όταν πεθάνει οι κληρονόμοι του να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του το ποσό των 30000 Ευρώ (Επιτόκιο 4.0%,  $D_{30} = 29803$ ,  $N_{30} = 677106$ ,  $M_{30} = 3674$ ).

**Λύση:** Έχουμε την περίπτωση ισόβιας ασφάλισης θανάτου με  $x = 30$ . Το ετήσιο συνολικό ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Ηλίας, έτσι ώστε, όταν πεθάνει οι κληρονόμοι να εισπράξουν στο τέλος του έτους του θανάτου του 1 Ευρώ, είναι

$$\begin{aligned} P_{30}^{(12)} \ddot{a}_{30}^{(12)} &= A_{30} \\ \Rightarrow P_{30}^{(12)} &= \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30}^{(12)}} \\ &= \frac{\frac{M_{30}}{D_{30}}}{\frac{N_{30}}{D_{30}} - \frac{12-1}{2(12)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{3674}{29803}}{\frac{677106}{29803} - \frac{11}{24}} \\
&= 0.00553775.
\end{aligned}$$

Άρα, το ετήσιο συνολικό ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Ηλίας, έτσι ώστε οι κληρονόμοι του να λάβουν 30000 Ευρώ, είναι  $30000(0.00553775) = 166.1325$  Ευρώ και το μηνιαίο ασφάλιστρο  $\frac{1}{12}(166.1325) = 13.84437$  Ευρώ.

**Παράδειγμα 39.** Να βρεθεί το ποσό του ασφαλίστρου που πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Ηλίας ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε μήνα (με τη υπογραφή του συμβολαίου) και για 20 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του μέσα στα επόμενα 35 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 30000 Ευρώ. (Επιτόκιο 4.0%,  $D_{30} = 29803$ ,  $M_{30} = 3674$ ,  $D_{50} = 29803$ ,  $D_{50} = 13235$ ,  $N_{50} = 259619$ ,  $D_{65} = 6895$ ,  $N_{65} = 109939$ ,  $M_{65} = 2580$ ).

**Λύση:** Έχουμε Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου  $n = 35$  ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων  $t = 20$  ετών και

$$\begin{aligned}
{}_{20}P_{\frac{1}{30:35}}^{(12)} &= \frac{A_{\frac{1}{30:35}}}{\ddot{a}_{30:20}^{(12)}} \\
&= \frac{0.03670771}{13.7534253} \\
&= 0.002668987,
\end{aligned}$$

είναι το ετήσιο ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Ηλίας, έτσι ώστε, σε περίπτωση θανάτου του μέσα στα επόμενα 35 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ.

Για να λάβουν οι κληρονόμοι του 30000 Ευρώ, το ετήσιο ποσό (το ετήσιο ασφάλιστρο) που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Ηλίας είναι  $(0.002620442)(30000) = 78.61326$  Ευρώ. Συνεπώς, το ποσό που πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Ηλίας ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε μήνα είναι  $\frac{78.61326}{12} = 6.551105$  Ευρώ.

Η Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου  $n = 35$  ετών υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} A_{1 \overline{30:35}|} &= \frac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} \\ &= \frac{3674 - 2580}{29803} \\ &= 0.03670771 \end{aligned}$$

και η Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων  $t = 20$  ετών ως

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30:20|}^{(12)} &= \frac{N_{30} - N_{30+20}}{D_{30}} - \left( \frac{12 - 1}{24} \right) \left( 1 - \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{677106 - 259619}{29803} - \left( \frac{12 - 1}{24} \right) \left( 1 - \frac{13235}{29803} \right) \\ &= 13.7534253. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 40.** Να βρεθεί το ποσό του ασφαλίστρου που πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Γιάννης ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε μήνα (με τη υπογραφή του συμβολαίου) και για 20 έτη, έτσι ώστε μετά από 35 έτη, εφόσον βρίσκεται εν ζωή, να λάβει 30000 Ευρώ ή σε περίπτωση θανάτου του μέσα σ' αυτά τα 35 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν το ποσό των 30000 Ευρώ. (Επιτόκιο 4.0%,  $D_{30} = 29803$ ,  $N_{30} = 677106$ ,  $M_{30} = 3674$ ,  $D_{50} = 29803$ ,  $D_{65} = 13235$ ,  $N_{50} = 259619$ ,  $D_{65} = 6895$ ,  $M_{65} = 2580$ ).

**Λύση:** Έχουμε Πρόσκαιρη Μικτή Ασφάλιση  $n = 35$  ετών, Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων  $t = 20$  ετών και

$$\begin{aligned} {}_{20}P_{1 \overline{30:35}|}^{(12)} &= \frac{A_{1 \overline{30:35}|} + A_{\overline{30:35}|}^{(12)}}{\ddot{a}_{30:20|}^{(12)}} \\ &= \frac{0.03670771 + 0.2313525}{13.7534253} \\ &= 0.01708834, \end{aligned}$$

είναι το ετήσιο ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Γιάννης, έτσι ώστε σε περίπτωση θανάτου του, μέσα στα επόμενα 35 έτη, οι κληρονόμοι του να λάβουν 1 Ευρώ.

Για να λάβουν οι κληρονόμοι του 30000 Ευρώ, το ετήσιο ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλλει ο κ. Γιάννης είναι  $(0.01708834)(30000) = 512.6503$  Ευρώ. Συνεπώς, το ποσό που πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κ. Γιάννης ηλικίας 30 ετών, στην αρχή κάθε μήνα είναι  $\frac{512.6503}{12} = 42.720861$  Ευρώ.

Η Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου  $n = 35$  ετών υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} A_{1 \over 30:35} &= \frac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} \\ &= \frac{3674 - 2580}{29803} \\ &= 0.03670771, \end{aligned}$$

η Ασφάλιση Προικοδότησης  $n = 35$  ετών υπολογίζεται ως

$$A_{\frac{1}{30:35}} = \frac{D_{35+30}}{D_{30}} = \frac{6895}{29803} = 0.2313525$$

και η Πρόσκαιρη Πληρωμή Ασφαλίσεων  $t = 20$  ετών ως

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30:20}^{(m)} &= \frac{N_{30} - N_{30+20}}{D_{30}} - \left( \frac{12 - 1}{24} \right) \left( 1 - \frac{D_{30+20}}{D_{30}} \right) \\ &= \frac{677106 - 259619}{29803} - \left( \frac{12 - 1}{24} \right) \left( 1 - \frac{13235}{29803} \right) \\ &= 13.7534253. \end{aligned}$$

Πίνακας 3.2: Κλασματικά Ασφάλιστρα

| $P^{(m)}$ : Ετήσιο Ασφάλιστρο Πληρωτέο ανά Μήνα ( $m = 12$ )<br>$\frac{1}{m}P^{(m)}$ : Κλασματικό (Μηνιαίο, $m = 12$ ) Ασφάλιστρο |                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ισόβια Ασφάλιση σε Περίπτωση Θανάτου με Ισόβια Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                                 | $P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$                                                                                     |
| Ασφάλιση Προικοδότησης $n$ Ετών με Πρόσκαιρη $n$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                          | $P_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$                                     |
| Πρόσκαιρη $n$ Ετών Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη $n$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                      | $P_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{1:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$                                     |
| Μικτή Ασφάλιση $n$ Ετών με Πρόσκαιρη $n$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                                  | $P_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{1:\overline{n} } + A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$               |
| Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη $t$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                                  | ${}_tP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t} }^{(m)}}, t \leq n$                                                       |
| Πρόσκαιρη $n$ Ετών Ασφάλιση Θανάτου με Πρόσκαιρη $t$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                      | ${}_tP_{1:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{1:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{t} }^{(m)}}, t \leq n$                       |
| Μικτή Ασφάλιση $n$ Ετών με Πρόσκαιρη $t$ Ετών Πληρωμή Ασφαλίσεων                                                                  | ${}_tP_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{1:\overline{n} } + A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{t} }^{(m)}}, t \leq n$ |

### 3.2 Συνεχείς Ράντες (Πρόσοδοι)

Όταν η συχνότητα των πληρωμών  $m$  γίνεται άπειρη ( $m \rightarrow \infty$ ), η ράντα που προκύπτει ονομάζεται συνεχής ράντα. Τη συνεχή ράντα ζωής  $\bar{a}_x$  την ορίζουμε ως

$$\bar{a}_x = \lim_{m \rightarrow \infty} a_x^{(m)}. \quad (3.2.9)$$

Η συνεχής ράντα ζωής μπορεί να γραφεί και υπό μορφή ολοκληρώματος αν στη σχέση

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_t p_x \quad (3.2.10)$$

αντικαταστήσουμε το άθροισμα με το ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x dt. \quad (3.2.11)$$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να γνωρίζουμε τη συνάρτηση της  ${}_t p_x$  διαφορετικά πρέπει να υπολογίσουμε την  $\bar{a}_x$  προσεγγιστικά με βάση τη σχέση (3.2.9), δηλαδή

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \lim_{m \rightarrow \infty} a_x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( a_x + \frac{m-1}{2m} \right) \\ &= a_x + \frac{1}{2} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{N_x - D_x}{D_x} + \frac{1}{2} = \frac{N_x - D_x + \frac{1}{2} D_x}{D_x} \\ &= \frac{N_x - \frac{1}{2} D_x}{D_x} \\ &= \frac{\bar{N}_x}{D_x}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

έχοντας θέσει ως συνεχή συνάρτηση μετατροπής,  $\bar{N}_x = N_x - \frac{1}{2} D_x$ . Κατά τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} n/\bar{a}_x &= \lim_{m \rightarrow \infty} n/a_x^{(m)} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{N_{x+n} - D_{x+n} + \frac{1}{2} D_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+n} - \frac{1}{2} D_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}, \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\bar{n}|} &= \lim_{m \rightarrow \infty} a_{x:\bar{n}|}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\ &= \frac{N_x - D_x - (N_{x+n} - D_{x+n}) + \frac{1}{2}(D_x - D_{x+n})}{D_x} \\ &= \frac{(N_x - \frac{1}{2}D_x) - (N_{x+n} - \frac{1}{2}D_{x+n})}{D_x} \\ &= \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

καί

$$\begin{aligned} n/\bar{a}_{x:\bar{k}|} &= \lim_{m \rightarrow \infty} n/a_{x:\bar{k}|}^{(m)} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+k+1}}{D_x} + \left(\frac{m-1}{2m}\right) \left(\frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x}\right) \\ &= \frac{(N_{x+n} - D_{x+n}) - (N_{x+n+k} - D_{x+n+k})}{D_x} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{D_{x+n} - D_{x+n+k}}{D_x}\right) \\ &= \frac{(N_{x+n} - \frac{1}{2}D_{x+n}) - (N_{x+n+k} - \frac{1}{2}D_{x+n+k})}{D_x} \\ &= \frac{\bar{N}_{x+n} - \bar{N}_{x+n+k}}{D_x}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Οι παραπάνω τύποι συνεχών προσόδων μπορούν να εκφραστούν και υπό μορφή ολοκληρωμάτων ως

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_x}{D_x}, \quad (3.2.16)$$

$$n/\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}, \quad (3.2.17)$$

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x \, dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \quad (3.2.18)$$

και

$${}_n/\bar{a}_{x:\bar{k}|} = \int_n^{k+n} v^t {}_t p_x \, dt = \frac{\bar{N}_{x+n} - \bar{N}_{x+n+k}}{D_x}. \quad (3.2.19)$$