

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. ΓΕΝΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Το γενικό γραμμικό υπόδειγμα έχει τις ίδιες υποθέσεις με το κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα εκτός των υποθέσεων οι οποίες αφορούν το διαταρακτικό όρο, ή τυχαία απόκλιση ε_t . Συγκεκριμένα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του κλασσικού που αφορούν τις διακυμάνσεις και τις συνδιασκέψεις των ε_t :

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{για} \quad t \neq s$$

Αντί αυτών των υποθέσεων έχουμε τις υποθέσεις:

$$V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0 \quad \text{για} \quad t \neq s \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

Σε μορφή μητρών η αντίστοιχη υπόθεση γράφεται ως εξής:

$$E\varepsilon\varepsilon' = \sigma^2 \Phi$$

όπου Φ είναι μήτρα διαστάσεων $T \times T$ θετική

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1T} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{T1} & \varphi_{T2} & \dots & \varphi_{TT} \end{bmatrix}$$

Αν τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας Φ είναι διάφορα μεταξύ τους, τότε οι διακυμάνσεις των ε διαφέρουν (δεν είναι ίσες) κι έχουμε το φαινόμενο της ετεροσκεδαστικότητας. Αν τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας Φ είναι διάφορα του μηδενός τότε οι συνδιακυμάνσεις των ε είναι διάφορες του μηδενός και λέμε ότι τα ε συσχετίζονται μεταξύ τους ή ότι το υπόδειγμα έχει αυτοσυσχέτιση.

Η εκτίμηση των παραμέτρων του γενικού γραμμικού υποδείγματος με την κλασσική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) δε δίνει άριστους εκτιμητές. Για να προκύψουν άριστοι εκτιμητές χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων των GAUSS-MARKOV που δίνει τις εκτιμήσεις του ΑΙΤΚΕΝ.

Οι εκτιμήσεις αυτές σε μορφή μητρών είναι:

$$b = (X'\Phi^{-1} X)^{-1} \cdot (X'\Phi^{-1} Y)$$

$$s_b^2 = s^2 (X'\Phi^{-1} X)^{-1}$$

4.1. ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Αν τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας Φ είναι διάφορα μεταξύ τους (όχι όλα κατ' ανάγκη) τότε έχουμε το φαινόμενο της ετεροσκεδαστικότητας, γιατί οι διακυμάνσεις των ε είναι διάφορες μεταξύ τους. Γενικά το φαινόμενο της ετεροσκεδαστικότητας είναι πιο συνηθισμένο σε υποδείγματα που αναφέρονται σε μικροοικονομικές σχέσεις και κυρίως σε υποδείγματα που για την εκτίμηση τους χρησιμοποιούνται διαστρωματικά στοιχεία.

π.χ. Η συμπεριφορά της αποταμίευσης παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά σε οικογένειες με μεγάλο εισόδημα, απ' ότι σε οικογένειες με χαμηλό εισόδημα, επομένως σ' ένα τέτοιο υπόδειγμα είναι φανερό ότι η διακύμανση της τυχαίας απόκλισης ε_t δεν θα παραμένει σταθερή.

Οι άριστες εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι αυτές που προκύπτουν με τη γενικευμένη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αλλά όπως είναι φανερό από τους αντίστοιχους τύπους πρέπει να είναι γνωστή η μήτρα Φ δηλ. οι διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των ε και να είναι δυνατή η αντίστροφή της (δηλ. Φ^{-1}). Στην πράξη όμως η μήτρα Φ είναι άγνωστη, σχεδόν κατά κανόνα και επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχοι τύποι.

Αν εφαρμόσουμε την κλασσική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

νων (OLS) σ' ένα υπόδειγμα με ετεροσκεδαστικότητα, τότε θα έχουμε τις εξής συνέπειες:

- 1) Η αμεροληψία των εκτιμήσεων (των b) δεν επηρεάζεται και οι εκτιμητές εξακολουθούν να είναι γραμμικοί αμερόληπτοι.
- 2) Οι διακυμάνσεις των ε δεν είναι αμερόληπτες εκτιμήσεις.
- 3) Οι διακυμάνσεις των συντελεστών παλινδρόμησης παύουν να είναι αμερόληπτες και εμφανίζονται συνήθως υποεκτιμη-

μένες με συνέπεια η στατιστική $t = \frac{b_v}{s_{b_v}}$ να υπερεκτιμάται

και να απορρίπτουμε την υπόθεση $H_0 : \beta_v = 0$ κι όταν αυτό δεν είναι σωστό.

4.2. ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Επειδή οι διακυμάνσεις των ε είναι άγνωστες στην πράξη καταφεύγουμε συνήθως σε ορισμένες υποθέσεις σχετικά με τη μορφή της ετεροσκεδαστικότητας ή προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τις διακυμάνσεις από το δείγμα.

Το πιο συνηθισμένο όμως είναι να κάνουμε διάφορες υποθέσεις σχετικά με τη διακύμανση του διαταρακτικού όρου που να συνδέονται οι υποθέσεις αυτές με την ερμηνευτική μεταβλητή.

π.χ. Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$. Υποθέτουμε ότι για τις διακυμάνσεις των ε ισχύει η σχέση:

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 X_t^2 \quad (1)$$

δηλ. ότι είναι ανάλογες των τετραγώνων των τιμών της X .

Για να μετατρέψουμε το υπόδειγμα έτσι ώστε να μην υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα εργαζόμαστε ως εξής:

Διαιρούμε αμφότερα τα μέλη του υποδείγματος με την τετραγωνική ρίζα της X_t^2 ($\sqrt{X_t^2} = X_t$)

$$\frac{Y_t}{X_t} = \alpha \left(\frac{1}{X_t} \right) + \beta + \frac{\varepsilon_t}{X_t} \quad \text{οπότε}$$

$$Y_t^* = \beta + \alpha X_t^* + \varepsilon_t^*, \quad \text{όπου} \quad Y_t^* = \frac{Y_t}{X_t}, \quad x_t^* = \frac{1}{X_t}, \quad \varepsilon_t^* = \frac{\varepsilon_t}{X_t}$$

Στο τελευταίο υπόδειγμα μπορούμε να εφαρμόσουμε την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και να πάρουμε άριστες εκτιμήσεις γιατί έχουμε εξαλείψει ήδη την ετεροσκεδαστικότητα. Πράγματι:

$$V(\varepsilon_t^*) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{X_t}\right) = \frac{1}{X_t^2} \cdot V(\varepsilon_t) = \frac{1}{X_t^2} \cdot \sigma^2 \cdot X_t^2 = \sigma^2$$

4.3. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Οι Goldfeld και Quandt προτείνουν:

- α) Χωρίζουμε τις παρατηρήσεις σε μικρές και μεγάλες
- β) Παραλείπουμε μερικές μεσαίες παρατηρήσεις C (8 σε 30, 16 σε 60).
- γ) Εκτιμούμε μια παλινδρόμηση για κάθε ομάδα
- δ) Ελέγχουμε την ισότητα των διακυμάνσεων των υπολοίπων στις δύο παλινδρομήσεις με την κατανομή

$$F = \frac{T_1 - N}{T_2 - N}, \quad T_1 + T_2 = T - C$$

$$\text{χρησιμοποιώντας το λόγο} \quad R = \frac{S_1}{S_2} = \frac{e'_1 e_1}{e'_2 e_2} = \frac{\sum e_1^2}{\sum e_2^2}$$

Ο λόγος R ακολουθεί την κατανομή F. Αν F είναι μικρότερο από το F των πινάκων έχουμε ετεροσκεδαστικότητα.

Ο Gleiser προτείνει:

Υποθέτουμε ότι η απόλυτη τιμή των υπολοίπων της παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων $|e_i|$ ακολουθεί κάποια συνάρτηση της X_i .

Συνεπώς:

- (i) $|e_i| = \alpha_0 + \alpha_1 X_j$
- (ii) $|e_i| = \alpha_0 + \alpha_1 X_j^{-1}$
- (iii) $|e_i| = \alpha_0 + \alpha_1 X_j^{1/2}$ κ.τ.λ.

Το ζήτημα της ετεροσκεδαστικότητας στην περίπτωση αυτή συνίσταται στον προσδιορισμό της σημαντικότητας ή όχι των συντελεστών α_0 και α_1 . Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε και μεταξύ απλής και μικτής ετεροσκεδαστικότητας ανάλογα αν

$$(\alpha_0 = 0, \alpha_1 \neq 0) \text{ ή } (\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 0).$$

Π.χ. Για την περίπτωση (i) έχουμε

$$v = v(\alpha_0 + \alpha_1 X_j) \quad \text{όπου} \quad E(v) = 0, \quad Ev^2 = \sigma^2$$

$$\text{Έτσι } E_{uu'} = \sigma^2 \Phi =$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha_0 + \alpha_1 X_{j1})^2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & (\alpha_0 + \alpha_1 X_{j2})^2 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & (\alpha_0 + \alpha_1 X_{jn})^2 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα α_0 και α_1 με τους εκτιμητές τους, αν και στατιστικά σημαντικοί, παίρνουμε την κατάλληλη μήτρα για τον εκτιμητή b .

$$b = (X' \Phi^{-1} X)^{-1} X' \Phi^{-1} Y$$

Ο Johnston προτείνει:

Για να ελέγξουμε αν η συσχέτιση μεταξύ των απολύτων τιμών των υπολοίπων είναι μηδέν ελέγχουμε το λόγο των πιθανοτήτων (likelihood-ratio test) ως εξής:

- α) Χωρίζουμε τα υπόλοιπα της παλινδρόμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων σε k ομάδες με T_i παρατηρήσεις

$$\sum_{i=1}^k T_i = T$$

- β) Εκτιμούμε τις διακυμάνσεις σε κάθε ομάδα παρατηρήσεων

$$s_i^2 = \sum_{t=1}^{T_i} e_{it}^2 / (T_i - N - 1)$$

- γ) Εκτιμούμε τη διακύμανση s^2 για όλες τις παρατηρήσεις

$$s^2 = \sum_{t=1}^T e_t^2 / (T - N - 1)$$

- δ) Παίρνουμε το λόγο $\Theta = \frac{\prod_{i=1}^k (s_i) T_i}{s^T}$

- ε) Με τη στατιστική $-2 \log \Theta \approx \chi^2$ με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας ελέγχουμε την ομοσκεδαστικότητα.

4.4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Αν γνωρίζουμε τη μορφή της μήτρας Φ το πρόβλημα είναι απλό. Μετασχηματίζουμε τις μεταβλητές ώστε να εξαλείψουμε την ετεροσκεδαστικότητα. Τις περισσότερες όμως φορές αυτό δεν είναι γνωστό. Τότε είτε μετασχηματίζουμε τις μεταβλητές σε λογαριθμικές (ο καλύτερος τρόπος) είτε αποπληθωρίζουμε τις μεταβλητές με κάποιο αποπληθωριστή. Στην τελευταία περίπτωση εισάγουμε ένα νέο πρόβλημα, την συμπολυγραμμικότητα.

4.5. ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Αν τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας Φ , όχι όλα κατ' ανάγκη, είναι διάφορα του μηδενός (δηλ. $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0$) τότε έχουμε το φαινόμενο της αυτοσυσχέτισης. Η αυτοσυσχέτιση είναι συνηθισμένο φαινόμενο όταν τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι χρονολογικές σειρές. Ο διαταρακτικός όρος ή τυχαία απόκλιση ε_t είναι δυνατό να συσχετίζεται με το διαταρακτικό όρο της προηγούμενης χρονικής περιόδου $t - 1$ οπότε λέμε ότι έχουμε αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού ή αυτοπαλίνδρομο σχήμα πρώτου βαθμού.

Είναι δυνατό όμως να συσχετίζεται και με το διαταρακτικό όρο δύο χρονικών περιόδων πριν (δηλ. της περιόδου $t - 2$) οπότε έχουμε αυτοσυσχέτιση δευτέρου βαθμού ή τάξης κλπ.

Στην αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού, η σχέση εξάρτησης των διαταρακτικών όρων είναι της μορφής: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + v_t$ (1)

όπου v_t τυχαία απόκλιση, και ρ συντελεστής αυτοσυσχέτισης. Αν έχουμε αυτοσυσχέτιση δευτέρου βαθμού τότε η σχέση είναι:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + v_t \quad (2)$$

όπου ρ_1, ρ_2 συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Για το v_t υποθέτουμε ότι $E v_t = 0$, $V(v_t) = \sigma_v^2$ και $\text{cov}(v_t, v_s) = 0 \quad t \neq s$

Εξ' άλλου για το ρ υποθέτουμε ότι $0 < |\rho| < 1$. Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε το ε_{t-1} με το ίσον του δηλ. $\varepsilon_{t-1} = \rho \cdot \varepsilon_{t-2} + v_{t-1}$ και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε στη σχέση που θα προκύψει το ε_{t-2} με το ίσον του κ.ο.κ. θα προκύψει η τιμή του διαταρακτικού όρου ε_t που θα είναι:

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \cdot \varepsilon_{t-s}$$

Ο μέσος η διακύμανση και η συνδιακύμανση των ε_t θα είναι

$$E \varepsilon_t = 0, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma_v^2 \frac{1}{1 - \rho^2} \quad \text{και} \quad \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \rho^s \cdot \sigma_v^2$$

όπου s οι χρονικές υστερήσεις που δείχνουν πόσο απέχουν τα ε χρονικά μεταξύ τους.

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ δίνεται από τη σχέση (για πρώτου βαθμού αυτοσυσχέτιση):

$$\rho = \frac{\text{cov} (\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{V (\varepsilon_t)} \cdot \sqrt{V (\varepsilon_t - 1)}}$$

Αν υπάρχει τέλεια αυτοσυσχέτιση ($\rho=1$) οι διακυμάνσεις των ε γίνονται άπειρο.

4.6. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

- 1) Οι εκτιμητές που προκύπτουν με την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων είναι αμερόληπτοι και συνεπείς, αλλά οι διακυμάνσεις τους δεν έχουν τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.
- 2) Η διακύμανση του διαταρακτικού όρου στο δείγμα παύει να είναι αμερόληπτη εκτίμηση της αντίστοιχης παραμέτρου του πληθυσμού.
- 3) Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι σχετικά μεγάλη.
- 4) Οι εκτιμήσεις των διακυμάνσεων των συντελεστών παλινδρόμησης είναι συνήθως υποεκτιμημένες με αποτέλεσμα, η στατιστική $t = \frac{b_v}{s_{b_v}}$ να υπερεκτιμάται και να απορρίπτουμε την

$H_0 : \beta_v = 0$ κι όταν αυτό δεν είναι σωστό.

4.7. ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Για να ελέγξουμε την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού, χρησιμοποιούμε το κριτήριο των Durbin-Watson.

Ο στατιστικός τύπος του κριτηρίου είναι:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Για μεγάλα δείγματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση: $d=2(1-\hat{\rho})$, όπου $\hat{\rho}$ η εκτίμηση στο δείγμα του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ .

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

Αν δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση τότε $\hat{\rho}=0$ και $d=2$. Αν υπάρχει τέλεια αρνητική αυτοσυσχέτιση τότε $\hat{\rho}=-1$ και $d=4$. Αν υπάρχει τέλεια θετική αυτοσυσχέτιση τότε $\hat{\rho}=+1$ και $d=0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν $0 < d < 2$ υπάρχει κάποιος βαθμός θετικής αυτοσυσχέτισης. Ο έλεγχος όμως για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης γίνεται με ειδικούς πίνακες των Durbin-Watson που για ορισμένο δείγμα και επίπεδο σημαντικότητας α μας δίνουν δύο τιμές, μια κατώτατη d_L και μια ανώτατη d_U .

Ο έλεγχος γίνεται ως εξής:

1) Έλεγχος για την ύπαρξη θετικής αυτοσυσχέτισης.

- α. Αν $d < d_L$ υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού.
- β. Αν $d > d_U$ δεν υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού
- γ. Αν $d_L < d < d_U$ δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης (αβέβαιη περιοχή κριτηρίου)

2) Έλεγχος για την ύπαρξη αρνητικής αυτοσυσχέτισης

- α. Αν $-4-d < d_L$ υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού
- β. Αν $-4-d > d_U$ δεν υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού
- γ. Αν $d_L < -4-d < d_U$ δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης (αβέβαιη περιοχή κριτηρίου)

**4.8. ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ
DURBIN-WATSON**

- 1) Είναι κατάλληλο μόνο για έλεγχο αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης
- 2) Το κριτήριο έχει αβέβαιη περιοχή που δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.
- 3) Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υποδείγματα που σαν εξομνηυτικές μεταβλητές χρησιμοποιούνται οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής με χρονικές υστερήσεις όπως στο υπόδειγμα

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

4.9. ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΤΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ή ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

1) Μέθοδος απαλοιφής της αυτοσυσχέτισης όταν είναι γνωστός ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ του πληθυσμού (Μέθοδος του Klein)

Έστω το υπόδειγμα

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

και
$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t \quad (2)$$

Υστερούμε το υπόδειγμα (1) κατά μια χρονική περίοδο και το πολλαπλασιάζουμε επί ρ . Στη συνέχεια το αφαιρούμε από τη σχέση (1).

$$\rho \cdot Y_{t-1} = \rho \cdot \alpha + \beta_1 \rho X_{1t-1} + \rho \varepsilon_{t-1} \quad (3)$$

$$(1)-(3) \quad Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha (1-\rho) + \beta_1 (X_{1t} - \rho X_{1t-1}) + (\varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1})$$

Ονομάζω

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, \quad \alpha (1-\rho) = \alpha^*, \quad X_{1t} - \rho X_{1t-1} = X_{1t}^*$$

και επειδή $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t$ τότε

$$Y_t^* = \alpha^* + \beta_1 X_{1t}^* + v_t \quad (4)$$

Το υπόδειγμα (4) μπορεί να εκτιμηθεί με την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων γιατί έχει απαληφθεί η αυτοσυσχέτιση

2) Μέθοδος των Cochrane-Orcutt

Η εκτίμηση του υποδείγματος περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

- α) Εκτιμάμε το υπόδειγμα με την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης από τη σχέση

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

- β) Μετασχηματίζουμε τις μεταβλητές Y και X όπως αναλύσαμε στην προηγούμενη μέθοδο, χρησιμοποιώντας την εκτιμημένη τιμή του ρ δηλ. το $\hat{\rho}$. Ο μετασχηματισμός θα είναι όπως προαναφέραμε

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \quad \text{και} \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

- γ) Εκτιμάμε το υπόδειγμα με μεταβλητές τις Y^* και X^* και υπολογίζουμε το συντελεστή αυτοσυσχέτισης από τα καινούργια κατάλοιπα δηλ.

$$\hat{\rho}^* = \frac{\sum_{t=2}^T e_t^* \cdot e_{t-1}^*}{\sum_{t=1}^T e_t^{*2}}$$

Μετασχηματίζουμε πάλι τις μεταβλητές χρησιμοποιώντας την τιμή του $\hat{\rho}^*$ και ξαναεκτιμάμε το υπόδειγμα.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι το σημείο που η διαφορά ανάμεσα στις διαδοχικές τιμές των συντελεστών β και ρ μπορεί να θεωρηθεί μικρή.

3) Μέθοδος του Durbin

Το μετασχηματισμένο υπόδειγμα όπως είδαμε στην πρώτη περίπτωση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Y_t = \alpha_0 + \rho \cdot Y_{t-1} + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + v_t$$

όπου $\alpha_0 = \alpha (1 - \rho)$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_1 \cdot \rho$

Η μέθοδος του Durbin περιλαμβάνει δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εκτιμάται η παραπάνω σχέση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Με την τιμή του συντελεστή ρ που προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης γίνεται ο μετασχηματισμός του υποδείγματος:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} \cdot Y_{t-1} \quad \text{και} \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} \cdot X_{t-1}$$

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στο υπόδειγμα $Y_t^* = \alpha^* + \beta_1 X_t^* + v_t$

Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Durbin είναι η απλότητα της, αλλά επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτοσυσχέτιση ανωτέρου βαθμού όπως και σε υποδείγματα με περισσότερες από μια ερμηνευτικές μεταβλητές.

Οι εκτιμητές που προκύπτουν από τη μέθοδο Durbin έχουν όλες τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των εκτιμητών που προκύπτουν από τη μέθοδο μείνισης πιθανότητας.

4.10. ΠΟΛΥΣΥΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Μια από τις βασικές υποθέσεις του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος είναι πως δεν υπάρχουν ακριβείς γραμμικές σχέσεις ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές. Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη για την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, γιατί αλλιώς δεν υπάρχει η αντίστροφη της μήτρας $x'x$. Η περίπτωση όμως να έχουμε ακριβή γραμμική σχέση μεταξύ των ανεξαρτήτων μεταβλητών στην πράξη είναι ακραία, όπως ακραία είναι και η περίπτωση οι ερμηνευτικές μεταβλητές να είναι ασυσχέτιστες (ορθογώνιες). Το συνηθισμένο φαινόμενο είναι να υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των ανεξαρτήτων μεταβλητών.

Αν μια ερμηνευτική μεταβλητή συσχετίζεται με μια άλλη ή με ένα υποσύνολο ερμηνευτικών μεταβλητών τότε έχουμε το φαινόμενο της πολυσυγγραμικότητας. Στην περίπτωση που η συσχέτιση αυτή είναι τέλεια ή αλλιώς υπάρχει ακριβής γραμμική σχέση μεταξύ των εν λόγω μεταβλητών τότε έχουμε τέλεια πολυσυγγραμικότητα κι όπως προαναφέραμε είναι αδύνατη η αντιστροφή της μήτρας $x'x$ δηλ. η εκτίμηση του υποδείγματος με την OLS.

4.11. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

Όταν έχουμε τέλεια πολυσυγγραμικότητα τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων δε λύνεται ή είναι αδύνατη η αντιστροφή της μήτρας $x'x$. Επίσης οι διακυμάνσεις των συντελεστών παλινδρόμησης τείνουν στο άπειρο.

π.χ. Έστω το υπόδειγμα:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι μεταξύ των X_1 και X_2 υπάρχει η παρακάτω ακριβής σχέση:

$$X_1 = kX_2 \quad k = \text{σταθερά} \quad (2)$$

Οι συντελεστές παλινδρόμησης της (1) δίνονται από τις σχέσεις (σε αποκλίσεις από τους μέσους):

$$b_1 = \frac{\sum x_{1y} \cdot \sum x_2^2 - \sum x_{2y} \cdot \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum x_{2y} \cdot \sum x_1^2 - \sum x_{1y} \cdot \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

Στην b_1 θα αντικαταστήσω το x_1 με το ίσον του. (Η σχέση (2) ισχύει και για αποκλίσεις από τους μέσους δηλ. $x_1 = kx_2$)

$$b_1 = \frac{k \sum x_2 y \cdot \sum x_2^2 - \sum x_2 y \cdot k \sum x_2^2}{k^2 \sum x_2^2 \cdot \sum x_2^2 - k^2 (\sum x_2^2)^2} = \frac{0}{0} \quad \text{αοριστία}$$

Το ίδιο ισχύει και για το b_2 . Άρα οι συντελεστές είναι απροσδιόριστοι.

Οι διακυμάνσεις των συντελεστών b_1 και b_2 δίνονται από τη σχέση:

$$s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{\sum x_1^2 (1 - R_{12}^2)}, \quad s_{b_2}^2 = \frac{s^2}{\sum x_2^2 (1 - R_{12}^2)}$$

όπου R_{12}^2 συντελεστής προσδιορισμού μεταξύ X_1 και X_2

Επειδή $R_{12}^2 = 1$ άρα ο παρονομαστής είναι μηδέν και οι διακυμάνσεις τείνουν στο άπειρο.

Αν προσπαθήσουμε να εξαλείψουμε την πολυσυγγραμμικότητα στην σχέση (1) αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στην (1) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 kX_2 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t \\ \text{ή} \quad Y_t &= \beta_0 + (\beta_1 k + \beta_2) X_2 + \varepsilon_t \\ \text{ή} \quad Y_t &= \beta_0 + \gamma X_2 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3)$$

όπου $\gamma = \beta_1 k + \beta_2$

Στη σχέση (3) μπορούμε να εφαρμόσουμε την OLS και να εκτιμήσουμε το β_0 και το γ γιατί δεν υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα. Δεν υπάρχει όμως τρόπος να εκτιμήσουμε τα β_1 , β_2 χωριστά γιατί έχουμε περισσότερες παραμέτρους να εκτιμήσουμε απ' όσους μας επιτρέπουν οι πληροφορίες από το δείγμα.

4.12. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΜΗ ΤΕΛΕΙΑΣ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

- 1) Η πολυσυγγραμμικότητα αν και δεν επηρεάζει τις ιδιότητες των εκτιμητών που προκύπτουν με την OLS επηρεάζει όμως τις διακυμάνσεις των b , οι οποίες υπερεκτιμώνται, με αποτέλεσμα, η στατιστική $t = \frac{b_v}{S_{b_v}}$ να υποεκτιμάται και να δεχό-

μαστε την $H_0 : \beta_v = 0$ κι όταν αυτό δεν είναι σωστό.

Εδώ μπορεί να παρουσιαστεί το παράδοξο να δέχομαι την υπόθεση $H_0 : \beta_v = 0$ για κάθε β χωριστά και συγχρόνως να απορρίπτω την υπόθεση $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_v = 0$ κι αυτό οφείλεται στην υπερεκτίμηση των διακυμάνσεων των b λόγω της πολυσυγγραμμικότητας.

- 2) Η πολυσυγγραμμικότητα μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των συντελεστών παλινδρόμησης, οι οποίες μεταβάλλονται σημαντικά με μια μικρή αύξηση ή μείωση του δείγματος.
- 3) Αν το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας είναι σοβαρό μπορεί να πάρουμε αντίθετα πρόσημα στους συντελεστές απ' ότι περιμέναμε σύμφωνα με την οικονομική θεωρία.
- 4) Η πολυσυγγραμμικότητα μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένη εξειδίκευση του υποδείγματος. Αυτό μπορεί να συμβεί γιατί στην πράξη πολλές φορές προσθέτουμε ή αφαιρούμε ερμηνευτικές μεταβλητές ανάλογα με το αν είναι στατιστικά σημαντικές ή όχι. Αν όμως η μη σημαντικότητα του συντελεστή οφείλεται στην πολυσυγγραμμικότητα, η αφαίρεση της αντίστοιχης μεταβλητής δημιουργεί σφάλμα εξειδίκευσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος δεν επηρεάζεται αν η ίδια σχέση γραμμικής εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών εξακολουθεί να υπάρχει και στην περίοδο πρόβλεψης.

4.13. ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΤΗΣ ΠΟΛΥΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ

Προκειμένου να μειώσουμε την πολυσυγγραμμικότητα ή και να την εξαλείψουμε αν δημιουργεί σοβαρά προβλήματα χρησιμοποιούμε τους εξής τρόπους:

- 1) Αυξάνουμε το μέγεθος του δείγματος αν αυτό είναι δυνατό.
- 2) Μπορούμε να επιβάλλουμε γραμμικούς περιορισμούς στους συντελεστές παλινδρόμησης.
- 3) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συστήματα αλληλεξαρτωμένων εξισώσεων.
- 4) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εξωγενείς πληροφορίες (εκτός δείγματος) που να προέρχονται από την οικονομική θεωρία ή από εκτίμηση άλλων παρεμφερών υποδειγμάτων και φυσικά να αφορούν τις τιμές ορισμένων συντελεστών παλινδρόμησης.

π.χ. Έστω το υπόδειγμα

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t \quad (1)$$

στο οποίο υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα.

Αν από άλλο παρεμφερές υπόδειγμα υπάρχει εκτίμηση του συντελεστή β_2 , έστω b_2^* , τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία αυτή προκειμένου να εξαλείψουμε την πολυσυγγραμμικότητα.

$$Y_t = b_0 + b_1 X_1 + b_2^* X_2$$

$$Y_t - b_2^* X_2 = b_0 + b_1 X_1$$

4.14. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μια συνάρτηση έστω $y = f(x_1, x_2)$ λέγεται γραμμική (ως προς τη x_1 και x_2) όταν η μερική παράγωγος της y ως προς x_1 δεν είναι συνάρτηση της x_1 κι όταν η μερική παράγωγος της y ως προς x_2 δεν είναι συνάρτηση της x_2 . Μια συνάρτηση $y = f(x_1, x_2)$

λέγεται προσθετική αν η μερική παράγωγος της y ως προς x_1 δεν είναι συνάρτηση της x_2 και η μερική παράγωγος της y ως προς x_2 δεν είναι συνάρτηση της x_1 .

Σε ορισμένα οικονομικά φαινόμενα οι μεταβλητές συνδέονται με συναρτησιακή σχέση διάφορη της γραμμικής. Τα σπουδαιότερα μη γραμμικά υποδείγματα είναι τα εξής:

1) Πολυωνυμιακή μορφή

Το υπόδειγμα είναι της μορφής

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon_t \quad (1)$$

Το (1) μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό αν θέσουμε $X = X_1$ και $X^2 = X_2$ οπότε έχουμε τη σχέση:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t \quad (2)$$

Στο υπόδειγμα (2) μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος OLS.

2) Αντίστροφη μορφή

Το υπόδειγμα είναι της μορφής:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 \frac{1}{X_t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

Το υπόδειγμα (1) μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό αν θέσουμε $\frac{1}{X_t} = X_1$ οπότε έχουμε το υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \varepsilon_t$. Σ' αυτό εφαρμόζουμε την OLS και το εκτιμάμε.

Στο υπόδειγμα (1) αν το Y_t παριστάνει την ποσοστιαία μεταβολή των μισθών από τη μια χρονική περίοδο στην άλλη, και το x_t το ποσοστό της ανεργίας τότε περιγράφει τη γνωστή καμπύλη Phillips.

Αν το Y_t παριστάνει τις δαπάνες κατανάλωσης και το X_t το εισόδημα, το δε β_1 υποθέσουμε ότι είναι μικρότερο του μηδενός τότε

το υπόδειγμα (1) αποτελεί τη γνωστή καμπύλη Engels.

3) Καμπύλη σταθερών ελαστικοτήτων ή Cobb-Douglas

Το υπόδειγμα είναι της μορφής: $Y_t = \beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot X_N^{\beta_N} \cdot \varepsilon_t$

όπου η τυχαία μεταβλητή ε_t δρα πολλαπλασιαστικά.

Κυρίως το υπόδειγμα εφαρμόζεται στην παραγωγή όπου το Y παριστάνει το προϊόν που παράγεται (εκροές) και οι $X_1, X_2, \dots$ παριστάνουν διάφορες εισροές όπως κεφάλαιο, εργασία κλπ. Η παραπάνω συνάρτηση λέγεται και συνάρτηση σταθερών ελαστικοτήτων γιατί οι ελαστικότητες της Y ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή είναι σταθερές και ίσες με τον αντίστοιχο συντελεστή παλινδρόμησης β .

$$\varepsilon_{YX_1} = \beta_1, \quad \varepsilon_{YX_2} = \beta_2 \quad \text{κλπ.}$$

Το υπόδειγμα μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό αν πάρουμε τους λογάριθμους αμφοτέρων των μελών του υποδείγματος. Οπότε θα έχουμε:

$$\log Y_t = \log \beta_0 + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 \log X_2 + \dots + \beta_N \log X_N + \log \varepsilon_t$$

Το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^* + \dots + \beta_N X_N^* + \varepsilon_t^*$$

(όπου το * αναφέρεται σε λογαρίθμους)

Στο τελευταίο υπόδειγμα δεν ισχύει η βασική υπόθεση του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος ότι η μαθηματική ελπίδα της τυχαίας μεταβλητής είναι μηδέν. Μπορούμε όμως να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα αν προσθαφαιρέσουμε τη μαθηματική ελπίδα του λογάριθμου ε_t δηλ. το $E \log \varepsilon_t$, στο δεύτερο μέλος.

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^* + \dots + \beta_N X_N^* + \log \varepsilon_t + E \log \varepsilon_t - E \log \varepsilon_t$$

ή
$$Y_t^* = \beta_0^* + E \log \varepsilon_t + \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^* + \dots + \beta_N X_N^* + \log \varepsilon_t - E \log \varepsilon_t$$

$$W_t = \log \varepsilon_t - E \log \varepsilon_t$$

$$EW_t = E \log \varepsilon_t - E \log \varepsilon_t = 0$$

Το υπόδειγμα που θα εκτιμηθεί τελικά θα μας δώσει τις τιμές των συντελεστών παλινδρόμησης αλλά όχι και την τιμή του αρχικού σταθερού όρου. Η αδυναμία εκτίμησης του σταθερού όρου στην πράξη δεν έχει πολύ σημασία γιατί ενδιαφερόμαστε κυρίως για τους συντελεστές β_1 , β_2 , κλπ.

Αν στο αρχικό υπόδειγμα το ε_t δρα προσθετικά δηλ.

$$Y_t = \beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \dots X_N^{\beta_N} + \varepsilon_t$$

τότε το υπόδειγμα αυτό δεν υπάρχει τρόπος να μετασχηματιστεί σε γραμμικό και επομένως δεν μπορεί να εκτιμηθεί με τις μεθόδους γραμμικής παλινδρόμησης αφού δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του γραμμικού υποδείγματος.

4.15. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕ ΨΕΥΔΟΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Σε μερικά υποδείγματα μπορεί να είναι αναγκαίο να συμπεριληφθούν ποιοτικές μεταβλητές ή παράγοντες που δεν επιδέχονται ποσοτική μέτρηση π.χ. το επίπεδο μόρφωσης, η κοινωνική θέση, το φύλο, κλπ.

Στις περιπτώσεις αυτές εισάγουμε τις ποιοτικές μεταβλητές στο υπόδειγμα με ψευδομεταβλητές.

Οι ψευδομεταβλητές είναι τεχνητές μεταβλητές που παίρνουν συνήθως τις τιμές μηδέν και ένα. Οι ψευδομεταβλητές μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και σε υποδείγματα που οι μεταβλητές είναι ποσοτικές δηλ. μπορεί να μετρηθούν αλλά θέλουμε να διαπιστώσουμε μια μετατόπιση της συνάρτησης σε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση κατανάλωσης που χαρακτηρίζεται από δύο περιόδους ειρήνης και πολέμου και θέλουμε να διαπιστώσουμε τη μετατόπιση ή την ολική αλλαγή της συνάρτησης κατανάλωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ψευδομεταβλητές.

Οι ειδικές συνθήκες που χαρακτηρίζουν την οικονομία σε περίοδο πολέμου οπωσδήποτε θα έχουν επιπτώσεις στη συμπεριφορά των δαπανών κατανάλωσης. Για την εκτίμηση επομένως της συνάρτησης κατανάλωσης θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψη αν η περίοδος είναι ειρηνική ή πολεμική.

Π.χ. Έστω η συνάρτηση κατανάλωσης στην περίοδο ειρήνης

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t \quad (1)$$

όπου C = κατανάλωση, t = εισόδημα στην περίοδο ειρήνης και η συνάρτηση κατανάλωσης στην περίοδο πολέμου

$$C_t = \beta_0^* + \beta_1^* X_t + v_t \quad (2)$$

Η μεταβολή της συνάρτησης από την μια περίοδο στην άλλη μπορεί να αναφέρεται στο σταθερό όρο δηλ. στο β_0 ή στο β_1 ή και στα δύο. Θα εξετάσουμε κάθε περίπτωση χωριστά.

Περίπτωση 1η

Ας υποθέσουμε ότι επηρεάζεται μόνο ο σταθερός όρος και όχι η οριακή ροπή προς κατανάλωση, οπότε οι σχέσεις (1) και (2) γράφονται:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t \quad (3)$$

$$C_t = \beta_0^* + \beta_1 X_t + v_t \quad (4)$$

Η μεταβολή του σταθερού όρου σημαίνει παράλληλη μετατόπιση της συνάρτησης. Αντί να υπολογίσουμε δύο συναρτήσεις, την (3) και την (4) κόβοντας το δείγμα (για περίοδο ειρήνης και για περίοδο πολέμου) οπότε χρησιμοποιούμε λιγότερα δεδομένα για κάθε συνάρτηση με συνέπεια οι εκτιμήσεις να είναι λιγότερο αποτελεσματικές, μπορούμε να εκτιμήσουμε μια συνάρτηση εισάγοντας την ψευδομεταβλητή D_t ως εξής:

$$C_t = \beta_0 + \gamma D_t + \beta_1 X_t + v_t \quad (5)$$

όπου $D_t = 0$ για τα έτη ειρήνης και $D_t = 1$ για τα έτη πολέμου.

Εκτιμώντας τη συνάρτηση (5) έχουμε υπολογίσει και τις δύο συναρτήσεις (3) και (4) γιατί αν στην (5) βάλουμε $D_t = 0$ παίρνουμε την (3) κι αν βάλουμε $D_t = 1$ παίρνουμε την (4) ως εξής:

$$C_t = (\beta_0 + \gamma) + \beta_1 X_t + v_t$$

$$(\beta_0^* = \beta_0 + \gamma)$$

Για να διαπιστώσουμε αντικειμενικά, μετά την εκτίμηση του υποδείγματος αν ο σταθερός όρος αλλάζει θα πρέπει να ελέγξουμε τη στατιστική σημαντικότητα του συντελεστή γ δηλ. ελέγχουμε τις υποθέσεις:

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma \neq 0$$

με τον τύπο ελέγχου: $t = \frac{|\hat{\gamma}|}{S_{\gamma}}$ ($\hat{\gamma}$ η εκτίμηση του γ)

Αν δεχτούμε την H_0 σημαίνει ότι δεν υπάρχει μεταβολή του σταθερού όρου. Αν απορρίψουμε την H_0 σημαίνει ότι ο σταθερός όρος διαφοροποιείται μεταξύ των δύο χρονικών περιόδων.

Περίπτωση 2η

Αν υποθέσουμε ότι αλλάζει μόνο ο συντελεστής παλινδρόμησης β_1 τότε θα έχουμε τις εξισώσεις

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t \quad \text{περίοδος ειρήνης} \quad (6)$$

$$C_t = \beta_0 + \beta_1^* X_t + v_t \quad \text{περίοδος πολέμου} \quad (7)$$

Αντί να εκτιμήσουμε τις (6) και (7) μπορούμε να εκτιμήσουμε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας σαν ψευδομεταβλητή την $D_t \cdot x_t$, όπου $D_t = 0$ στην περίοδο ειρήνης και $D_t = 1$ στην περίοδο πολέμου. Το υπόδειγμα με την ψευδομεταβλητή γράφεται:

$$C_t = \beta_0 + \delta D_t X_t + \beta_1 X_t + v_t \quad (8)$$

Το δ είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης της $D_t \cdot X_t$

Αν εκτιμήσουμε την (8) έχουμε εκτιμήσει και τις δύο εξισώσεις (6) και (7) γιατί για $D_t = 0$ έχουμε την (6) και για $D_t = 1$ έχουμε την (7) ως εξής:

$$C_t = \beta_0 + (\delta + \beta_1) X_t + v_t$$

$$(\beta_1^* = \delta + \beta_1)$$

Περίπτωση 3η

Αν υποθέσουμε ότι αλλάζει και ο σταθερός όρος και ο συντελεστής παλινδρόμησης, τότε συνδιάζοντας τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις θα έχουμε το υπόδειγμα:

$$C_t = \beta_0 + \gamma D_t + \delta D_t X_t + \beta_1 X_t + v_t \quad (9)$$

όπου $D_t = 0$ στην περίοδο ειρήνης και $D_t = 1$ στην περίοδο πολέμου.

Επομένως η εξίσωση για την περίοδο ειρήνης θα είναι:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t$$

και για την περίοδο πολέμου:

$$C_t = (\beta_0 + \gamma) + (\beta_1 + \delta) X_t + v_t$$

$$(\beta_0^* = \beta_0 + \gamma) \quad (\beta_1^* = \beta_1 + \delta)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στο υπόδειγμα (9) δίνει τους ίδιους εκτιμητές που προκύπτουν απ' την εκτίμηση ξεχωριστά των εξισώσεων (1) και (2). Επομένως δεν κερδίζουμε τίποτα αν εκτιμήσουμε το (9) αντί των (1) και (2) χωριστά, εκτός αν η διακύμανση της τυχαίας απόκλισης παραμένει σταθερή για όλη τη χρονική περίοδο, γιατί στην περίπτωση αυτή για την εκτίμηση της εν λόγω διακύμανσης χρησιμοποιούνται όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος και είναι πιο αποτελεσματική.

Το ίδιο ισχύει και για το υπόδειγμα (8). Στην πρώτη όμως περίπτωση δηλ. όταν αλλάζει μόνο ο σταθερός όρος θα πρέπει να προτιμάμε τη χρησιμοποίηση ψευδομεταβλητών, γιατί για την εκτίμηση του συντελεστή β_1 χρησιμοποιούνται όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος και είναι πιο αποτελεσματική η εκτίμηση του.

4.16. ΕΠΟΧΙΑΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Όπως είναι γνωστό οι τιμές μιας χρονολογικής σειράς όταν αναφέρονται σε δεδομένα χρονικής περιόδου μικρότερης του έτους π.χ. ημέρες, μήνες, τρίμηνα κλπ. περιέχουν και εποχιακές επιδράσεις. Αν η επίδραση των εποχιακών παραγόντων δεν έχει απαλοιφεί από τα δεδομένα μας με κάποια στατιστική μέθοδο τότε η εποχικότητα αυτή, μπορεί να ληφθεί υπ' όψη με ψευδομεταβλητές.

π.χ. Έστω ότι η Y είναι συνάρτηση μόνο μιας ερμηνευτικής μεταβλητής της X κι όταν οι διαθέσιμες παρατηρήσεις αναφέρονται σε τρίμηνα. Αν υποθέσουμε ότι οι εποχιακοί παράγοντες επηρεάζουν μόνο το σταθερό όρο, τότε το υπόδειγμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Y_t = \beta_0 + \gamma_1 D_{t1} + \gamma_2 D_{t2} + \gamma_3 D_{t3} + \gamma_4 D_{t4} + \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

όπου:

$D_{t1}=1$ αν t αναφέρεται στο πρώτο τρίμηνο, ενώ $D_{t1}=0$ αλλού

$D_{t2} = 1$ αν t αναφέρεται στο τρίτο τρίμηνο, ενώ $D_{t2}=0$ αλλού

$D_{t3} = 1$ αν t αναφέρεται στο τρίτο τρίμηνο, ενώ $D_{t3}=0$ αλλού

$D_{t4} = 1$ αν t αναφέρεται στο τέταρτο τρίμηνο, ενώ $D_{t4}=0$ αλλού

Στο υπόδειγμα (1) η εποχικότητα παριστάνεται με τέσσερις ψευδομεταβλητές. Όπως είναι διατυπωμένο το (1) δεν μπορεί να εκτιμηθεί γιατί υπάρχει τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα στις ψευδομεταβλητές και στο σταθερό όρο.

Μπορούμε όμως να παραλείψουμε μια ψευδομεταβλητή και το υπόδειγμα μπορεί πλέον να εκτιμηθεί.

Ας υποθέσουμε ότι παραλείπουμε την D_{t1} τότε το υπόδειγμα γράφεται

$$Y_t = \beta_0 + \gamma_2 D_{t2} + \gamma_3 D_{t3} + \gamma_4 D_{t4} + \beta_1 X_t + v_t \quad (2)$$

Στο (2) ο σταθερός όρος αντιστοιχεί στο σταθερό όρο του πρώτου τριμήνου η εξίσωση του οποίου τελικά παίρνεται σα βάση σύγκρισης σε σχέση με τα επόμενα τρίμηνα.

Πράγματι από την (2) προκύπτει ότι η εξίσωση

για το 1ο τρίμηνο είναι η $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + v_t$

για το 2ο τρίμηνο είναι η $Y_t = (\beta_0 + \gamma_2) + \beta_1 X_t + v_t$

για το 3ο τρίμηνο είναι η $Y_t = (\beta_0 + \gamma_3) + \beta_1 X_t + v_t$

για το 4ο τρίμηνο είναι η $Y_t = (\beta_0 + \gamma_4) + \beta_1 X_t + v_t$

Για να ελέγξουμε αν πράγματι ο εποχιακός παράγοντας επιδρά ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$$

$$H_1 : \text{Έστω ένα } \gamma \text{ διάφορο του μηδενός}$$

Αν δεχθούμε την H_0 σημαίνει ότι η εποχικότητα δεν επιδρά στη διαμόρφωση του σταθερού όρου. Αν απορρίψουμε την H_0 σημαίνει ότι η εποχικότητα επιδρά στο σταθερό όρο και τον διαφοροποιεί.