

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. ΑΛΛΑ ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

5.1. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΕΜΟΜΕΝΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

Στα υποδείγματα που εξετάσαμε ως τώρα υποθέτουμε ότι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής στην περίοδο t επηρεάζονται από τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής στην ίδια περίοδο.

Πολλές φορές όμως η προσαρμογή της εξαρτημένης μεταβλητής Y σε μια δεδομένη μεταβολή της μεταβλητής X δεν είναι ταυτόχρονη δηλ. δεν εκδηλώνεται την ίδια χρονική περίοδο αλλά αφού μεσολαβήσει κάποιο χρονικό διάστημα από τη στιγμή που μεταβάλλεται η X .

Το χρονικό αυτό διάστημα που μεσολαβεί το ονομάζουμε χρονική υστέρηση. Αν η χρονική αυτή υστέρηση είναι s χρονικές περιόδοι τότε στην περίπτωση του απλού γραμμικού υποδείγματος θα έχουμε την εξίσωση:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-s} + v_t$$

Στην παραπάνω σχέση υποθέτουμε ότι η επίδραση της ερμηνευτικής μεταβλητής εμφανίζεται και εξαντλείται στην περίοδο $t-s$.

Αν $s=0$ η επίδραση είναι στιγμιαία ή ταυτόχρονη. Γενικά όμως η επίδραση μιας μεταβλητής κατανέμεται σε περισσότερες από μια χρονικές περιόδους.

Επάνω σ' αυτή την υπόθεση στηρίζονται και τα υποδείγματα των κατανεμομένων χρονικών υστερήσεων.

Για παράδειγμα η επίδραση της διαφήμισης στις πωλήσεις ενός προϊόντος δεν θα εξαντληθεί στην περίοδο που έγινε η διαφήμιση αλλά θα επεκταθεί σε περισσότερες χρονικές περιόδους.

Αν υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της Y είναι συνάρτηση των s προηγούμενων τιμών της ερμηνευτικής μεταβλητής X τότε θα έχουμε το υπόδειγμα:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t$$

Αν για το u_t ισχύουν όλες οι κλασσικές υποθέσεις τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την OLS και να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα. Στην πράξη όμως η εκτίμηση των παραπάνω υποδειγμάτων αν ο αριθμός των υστερήσεων είναι μεγάλος παρουσιάζει σοβαρές δυσκολίες όταν εφαρμόσουμε την OLS. Για μεγάλο αριθμό υστερήσεων s και μικρό μέγεθος δείγματος, που είναι συνηθισμένο στις χρονολογικές σειρές, δεν θα υπάρχουν αρκετοί βαθμοί ελευθερίας για το στατιστικό έλεγχο του υποδείγματος.

Επί πλέον είναι πολύ πιθανόν ότι θα υπάρξει σοβαρό πρόβλημα πολυσυγγραμμικότητας γιατί οι διαδοχικές τιμές της ερμηνευτικής μεταβλητής θα συσχετίζονται σε μεγάλο βαθμό και όπως ξέρουμε η πολυσυγγραμμικότητα επηρεάζει την ακρίβεια των εκτιμήσεων των συντελεστών.

Οι παραπάνω δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν αν μειωθεί ο αριθμός των ερμηνευτικών μεταβλητών. Η μείωση αυτή πετυχαίνεται με την επιβολή περιορισμών ως προς τους συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$.

Παρακάτω θα εξετάσουμε τις πιο συνηθισμένες μορφές υστερήσης καθώς και τις διάφορες μεθόδους εκτίμησής των.

Γενική μορφή του υποδείγματος:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad Y_t = \alpha + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s X_{t-s} + u_t$$

Για το u_t ισχύουν όλες οι κλασσικές υποθέσεις.

Η Y_t εξαρτάται από όλες τις προηγούμενες τιμές της ερμηνευτικής μεταβλητής δηλ. $s \rightarrow \infty$. Για το άθροισμα των συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ υποθέτουμε ότι είναι περιορισμένο δηλ.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s < \infty. \quad \text{Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη, αλλιώς οι τιμές της}$$

Y θα μπορούσαν να αυξάνουν ή να μειώνονται απεριόριστα.

Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι συντελεστές έχουν το ίδιο πρόσημο τότε η σχέση (1) θα μπορούσε να γραφεί και ως εξής:

$$Y_t = \alpha + \beta (\omega_0 X_t + \omega_1 X_{t-1} + \dots \omega_s X_{t-s}) + v_t \quad (2)$$

δηλ. $\beta_s = \beta \cdot \omega_s$, όπου $s = 0, 1, 2, \dots$ και $\omega_s \geq 0$

Τα $\omega_0, \omega_1, \dots$ μπορεί να θεωρηθούν σαν συντελεστές στάθμισης της επίδρασης της X επί της Y κατά την αντίστοιχη χρονική περίοδο. Η συνολική ή μακροχρόνια επίδραση μιας μόνιμης μεταβολής της Y δίνεται από το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης επί το σταθερό συντελεστή β δηλ. από το $\beta \cdot \Sigma \omega_s$ που ονομάζεται και συνολικός πολλαπλασιαστής.

Εκτός από το συνολικό πολλαπλασιαστή, ένα άλλο χαρακτηριστικό της διάρθρωσης της υστέρησης είναι και η μέση υστέρηση που δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Μέση υστέρηση} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} s \cdot \beta_s}{\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s}$$

5.2. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΚΟΥΥΚ ή ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΥΣΤΕΡΗΣΗΣ

Όπως αναφέραμε διάφορες υποθέσεις μπορούν να διατυπωθούν σχετικά με τη μορφή υστέρησης δηλ. σχετικά με τους συντελεστές στάθμισης $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, κλπ. Η πιο συνηθισμένη από τις μορφές αυτές είναι η γεωμετρική μορφή υστέρησης σύμφωνα με την οποία υποθέτουμε ότι οι συντελεστές στάθμισης σχηματίζουν φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο. Αυτό σημαίνει ότι όσο πιο απομακρισμένες στο παρελθόν είναι οι τιμές της ερμηνευτικής μεταβλητής τόσο μικρότερη είναι η επίδραση τους στις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής.

Ένας τρόπος διατύπωσης του υποδείγματος Koyck είναι ο εξής:

$$\omega_s = \lambda^s \quad 0 < \lambda < 1 \quad (1)$$

οπότε το
$$\beta_s = \beta \cdot \lambda^s \quad (2)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (1) στο υπόδειγμα (2) της προηγούμενης ενότητας ή τη (2) στην (1) της προηγούμενης ενότητας, τότε το υπόδειγμα κατανενομένων χρονικών υστερήσεων γράφεται:

$$Y_t = \alpha + \beta (X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \lambda^3 X_{t-3} + \dots) + v_t \quad (3)$$

ή
$$Y_t = \alpha + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_{t-s} + v_t$$

Το υπόδειγμα (3) είναι δύσκολο να εκτιμηθεί γιατί έχουμε άπειρο αριθμό ερμηνευτικών μεταβλητών.

Μπορεί όμως να απλοποιηθεί σημαντικά όταν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Koyck που είναι ο εξής:

Υστερούμε την (3) κατά μια χρονική περίοδο και την πολλαπλασιάζουμε επί λ .

$$\lambda \cdot Y_{t-1} = \alpha \cdot \lambda + \beta (\lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \lambda^3 X_{t-3} + \dots) + \lambda v_{t-1} \quad (4)$$

Αφαιρούμε την (4) από την (3)

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha (1 - \lambda) + \beta X_t + v_t - \lambda v_{t-1}$$

ή
$$Y_t = \alpha (1 - \lambda) + \beta X_t + \lambda Y_{t-1} + (v_t - \lambda v_{t-1})$$

ή
$$Y_t = \alpha^* + \beta X_t + \lambda Y_{t-1} + u_t^* \quad (5)$$

όπου
$$\alpha^* = \alpha (1 - \lambda), \quad u_t^* = v_t - \lambda v_{t-1}$$

Στην (5) βλέπουμε ότι όλες οι ερμηνευτικές μεταβλητές με χρονική υστέρηση έχουν αντικατασταθεί με μια μεταβλητή την Y_{t-1} που είναι η εξαρτημένη μεταβλητή με χρονική υστέρηση.

Το υπόδειγμα είναι τριμεταβλητό και οι παράμετροι που εκτιμάμε μόνο δύο, το β και το λ .

Επίσης βλέπουμε ότι η τυχαία απόκλιση u_t^* αυτοσυσχετίζεται.

Η μέση υστέρηση στο υπόδειγμα είναι η $\frac{\lambda}{1 - \lambda}$;

Αν υποθέσουμε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$ τότε η μέση υστέρηση είναι 1 και αυτό σημαίνει ότι το μισό της συνολικής επίδρασης μιας μεταβολής της X πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή πραγματοποιείται στην 1η χρονική περίοδο (δηλ. μέση χρονική υστέρηση = 1).

Στο υπόδειγμα Koyck η τρέχουσα τιμή της X δηλ. η X_t ασκεί τη μεγαλύτερη επίδραση στη διαμόρφωση της τιμής της Y , ενώ η σημασία των άλλων διαδοχικών τιμών της X είναι μικρότερη καθώς οι συντελεστές τους μειώνονται γεωμετρικά. Η υπόθεση αυτή μπορεί να τροποποιηθεί αν πιστεύουμε ότι δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Μπορούμε π.χ. να αφήσουμε να διαμορφωθούν ελεύθερα οι τιμές των δύο πρώτων συντελεστών και από κει και πέρα να εφαρμοσθεί ο Koyck.

5.3. ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΩΝ ΑΝΑΠΡΟΣΑΡΜΟΖΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΔΟΚΙΩΝ

Το υπόδειγμα των αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών εφαρμόστηκε αρχικά από τον P. Cagan στη μελέτη του υπερπληθωρισμού και από τον M. Nerlove στη μελέτη της προσφοράς των γεωργικών προϊόντων.

Ας υποθέσουμε ότι η συμπεριφορά μιας μεταβλητής Y_t επηρεάζεται όχι από τις παρατηρούμενες πραγματικές τιμές μιας μεταβλητής X_t , αλλά από τις προσδωκόμενες ή προβλεπόμενες τιμές X_t^* .

Η μεταβλητή Y_t μπορεί να αναφέρεται στον αριθμό των στρεμμάτων που διαθέτονται για την καλλιέργεια ενός συγκεκριμένου προϊόντος στο έτος t και η μεταβλητή X_t^* στην αναμενόμενη ή προβλεπόμενη τιμή στο έτος t .

Έστω ότι η σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές X_t^* και Y_t είναι απλή γραμμική, οπότε θα έχουμε την εξίσωση:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + v_t \quad (1)$$

όπου το Y_t είναι συνάρτηση των προβλεπομένων τιμών της x_t (δηλ. της X_t^*). Επειδή οι τιμές της X_t^* δεν είναι πραγματικές αλλά προβλεπόμενες ή προσδοκώμενες θα πρέπει να καθορίσουμε το μηχανισμό με τον οποίο διαμορφώνονται οι προσδοκίες. Σύμφωνα λοιπόν με την υπόθεση των αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών, οι προσδοκίες ή προβλέψεις αναπροσαρμόζονται ή τροποποιούνται ανάλογα με τα λάθη του παρελθόντος, όπως δείχνει η παρακάτω σχέση:

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma (X_t - X_{t-1}^*) \quad (2)$$

$$\text{ή} \quad X_t^* = X_{t-1}^* + \gamma (X_t - X_{t-1}^*) \quad (3)$$

όπου γ παίρνει τιμές από μηδέν ως και ένα δηλ. $0 < \gamma \leq 1$.

Η προσδοκώμενη τιμή στην περίοδο t , όπως φαίνεται από την-σχέση (3) δίνεται από την προσδοκώμενη τιμή της προηγούμενης περιόδου X_{t-1}^* και από ένα μέρος της διαφοράς ανάμεσα στην τρέχουσα τιμή X_t και στην τιμή X_{t-1}^* . Λέμε από ένα μέρος της διαφοράς γιατί το γ είναι κλάσμα, αφού παίρνει τιμές από μηδέν ως και ένα. Αν $\gamma = 1$ σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σφάλματα για αναπροσαρμογή των προβλέψεων. Η συνάρτηση (3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X_t^* = \gamma X_t + (1 - \gamma) X_{t-1}^* \quad (4)$$

Το αρχικό υπόδειγμα (1) όπως έχει γραφεί δεν μπορεί να εκτιμηθεί γιατί δεν υπάρχουν παρατηρήσεις για την X_t^* αφού οι τιμές της είναι προβλεπόμενες. Το πρόβλημα όμως αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί αν εκφράσουμε τη X_t^* συναρτήσει των πραγματικών τιμών της μεταβλητής X_t ως εξής:

Υστερούμε διαδοχικά τη σχέση (4) και κάθε φορά την πολλαπλασιάζουμε επί $(1-\gamma)$ και αντικαθιστούμε διαδοχικά τις σχέσεις που προκύπτουν πάλι στην (4)

$$(1 - \gamma) X_{t-1}^* = \gamma (1 - \gamma) X_{t-1} + (1 - \gamma)^2 \cdot X_{t-2}^* \quad (5)$$

$$(4)/(5) \Rightarrow X_t^* = \gamma \cdot X_t + \gamma (1 - \gamma) X_{t-1} + (1 - \gamma)^2 X_{t-2}^* \quad (6)$$

Ξαναυστερούμε την (5) κατά μια χρονική περίοδο και την πολλαπλασιάζουμε επί $(1 - \gamma)$

$$(1 - \gamma)^2 \cdot X_{t-2}^* = \gamma (1 - \gamma)^2 X_{t-2} + (1 - \gamma)^3 \cdot X_{t-3}^* \quad (7)$$

$$(6)/(7) \Rightarrow X_t^* = \gamma \cdot X_t + \gamma (1 - \gamma) X_{t-1} + \gamma (1 - \gamma)^2 \cdot X_{t-2} + (1 - \gamma)^3 X_{t-3}^* \quad \kappa.ο.κ.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο οι προσδοκώμενες τιμές αντικαθίστανται τελικά με τις πραγματικές οπότε προκύπτει η σχέση

$$X_t^* = \gamma X_t + \gamma (1 - \gamma) X_{t-1} + \gamma (1 - \gamma)^2 X_{t-2} + \dots = \gamma [X_t + (1 - \gamma) X_{t-1} + (1 - \gamma)^2 X_{t-2} + \dots]$$

$$\text{ή} \quad X_t^* = \gamma \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \gamma)^s \cdot X_{t-s} \quad (9)$$

Αν τη σχέση (9) αντικαταστήσουμε στο αρχικό υπόδειγμα (1) τότε θα πάρουμε τη σχέση:

$$Y_t = \alpha + \beta \gamma \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \gamma)^s \cdot X_{t-s} + v_t \quad (10)$$

Είναι φανερό η ομοιότητα της σχέσης (10) με το υπόδειγμα Κουσκ. Αν στη σχέση (10) εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό του Κουσκ τότε το υπόδειγμα των αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών γράφεται:

$$Y_t = \alpha^* + \beta^* X_t + (1 - \gamma) Y_{t-1} + v_t^* \quad (11)$$

$$\text{όπου } \alpha^* = \alpha \cdot \gamma, \quad \beta^* = \beta \cdot \gamma, \quad v_t^* = v_t - (1 - \gamma) v_{t-1}.$$

Η εκτίμηση του υποδείγματος (11) παρουσιάζει τα ίδια ακριβώς προβλήματα με την εκτίμηση του υποδείγματος Κουσκ γιατί οι μεταβλητές v_t^* και Y_{t-1} δεν είναι ανεξάρτητες και επιπλέον το v_t^* αυτοσυσχετίζεται. Η υπόθεση συμπεριφοράς των προσδοκιών όπως δίνεται στη σχέση (2) μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma (X_{t-1} - X_{t-1}^*) \quad (12)$$

$$\text{ή} \quad X_t^* = \gamma \cdot X_{t-1} + (1 - \gamma) X_{t-1}^* \quad (13)$$

Η σχέση (13) είναι η αντίστοιχη της (4) όπου εφαρμόσαμε τις διαδοχικές υστερήσεις κλπ. Στην περίπτωση της παραπάνω διατύπωσης των αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών η τελική μορφή του υποδείγματος θα είναι:

$$Y_t = \alpha^* + \beta^* X_{t-1} + (1 - \gamma) Y_{t-1} + v_t^* \quad (14)$$

όπου α^* , β^* και v_t^* όπως ορίστηκαν προηγουμένως.

5.4. ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ (ΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ)

Εδώ υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο επιθυμητό επίπεδο της μεταβλητής Y_t στην περίοδο t 'εστω Y_t^* που είναι συνάρτηση της μεταβλητής X_t . Η Y_t^* μπορεί να παριστάνει π.χ. τα επιθυμητά αποθέματα ενός συγκεκριμένου προϊόντος στο τέλος της περιόδου t και η μεταβλητή X_t τις πωλήσεις στην περίοδο t .

Επίσης η Y_t^* μπορεί να παριστάνει το επιθυμητό επίπεδο, ή το επίπεδο της μακροχρόνιας ισορροπίας της καλλιεργουμένης έκτασης για ένα συγκεκριμένο προϊόν και η X_t την τιμή του προϊόντος.

Αν το υπόδειγμα ανάμεσα στα Y_t^* και X_t είναι απλό γραμμικό θα έχουμε:

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t \quad (1)$$

Το επιθυμητό όμως επίπεδο Y_t^* μπορεί να μην πραγματοποιείται μέσα σε μια χρονική περίοδο για πολλούς λόγους όπως αδράνεια, καθυστερήσεις, κόστος κ.α. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η προσαρμογή σε σχέση με το επιθυμητό επίπεδο είναι μερική και όχι ολική και ορίζεται από τη σχέση:

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma (Y_t^* - Y_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\text{ή} \quad Y_t = \gamma \cdot Y_t^* + (1 - \gamma) Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

όπου γ βρίσκεται μεταξύ $0 < \gamma \leq 1$ και ε_t στοχαστική (τυχαία) μεταβλητή.

Από τη σχέση (2) που είναι γνωστή σα συνάρτηση προσαρμογής είναι φανερό ότι η πραγματοποιούμενη μεταβολή στο επίπεδο της Y δηλ. $(Y_t - Y_{t-1})$ είναι μόνο ένα κλάσμα της επιθυμητής μεταβολής $(Y_t^* - Y_{t-1})$. Το κλάσμα αυτό εξαρτάται από το συντελεστή γ που είναι γνωστός σα συντελεστής προσαρμογής.

Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του γ τόσο μεγαλύτερη είναι η προσαρμογή που πραγματοποιείται στην τρέχουσα περίοδο.

Στην ακραία περίπτωση που $\gamma = 1$ η προσαρμογή είναι στιγμιαία δηλ. πραγματοποιείται στην τρέχουσα περίοδο.

Η συνάρτηση (3) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Y_t^* = \frac{1}{\gamma} Y_t - \frac{1 - \gamma}{\gamma} Y_{t-1} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon_t \quad (4)$$

Όταν η (4) αντικατασταθεί στο αρχικό υπόδειγμα (1) θα πάρουμε τη σχέση:

$$Y_t^* = \alpha^* + \beta^* X_t + (1 - \gamma) Y_{t-1} + v_t^* \quad (5)$$

$$\text{όπου } \alpha^* = \alpha \cdot \gamma, \quad \beta^* = \beta \cdot \gamma \quad v_t^* = \varepsilon_t + \gamma v_t$$

Το υπόδειγμα (5) που είναι γνωστό και σαν υπόδειγμα μερικής προσαρμογής των αποθεμάτων είναι ίδιο με του Koyck με τη μόνη διαφορά ότι ο διαταρακτικός όρος v_t^* δεν αυτοσυσχετίζεται όπως στον Koyck και στο υπόδειγμα αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών.

5.5. ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΣΕ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΕΜΟΜΕΝΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

Όταν η εξαρτημένη μεταβλητή εμφανίζεται σαν ερμηνευτική μεταβλητή με χρονική υστέρηση τότε η στατιστική Durbin δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις για μεγάλα δείγματα ο έλεγχος αυτοσυσχέτισης 1ου βαθμού μπορεί να γίνει με την παρακάτω στατιστική που πρότεινε ο Durbin:

$$h = \hat{\varrho} \sqrt{\frac{T}{1 - T [V(\hat{\alpha})]}}$$

όπου T το μέγεθος του δείγματος, $\hat{\varrho}$ η εκτίμηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης 1ης τάξης που προκύπτει από τα κατάλοιπα των ελαχίστων τετραγώνων, $V(\hat{\alpha})$ η εκτίμηση της διακύμανσης του συντελεστή της μεταβλητής Y_{t-1}

Όταν $\varrho = 0$ η στατιστική h για μεγάλα δείγματα ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι για τον έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας μπορούμε να πάρουμε την κατανομή z (κανονική). Σημειώνεται ότι αν $T \cdot [V(\hat{\alpha})] > 1$ ο έλεγχος δεν μπορεί να γίνει γιατί η τιμή που παίρνει η h είναι φανταστική και όχι πραγματική.

$$H_0 : \varrho = 0$$

$$H_0 : \varrho \neq 0$$

Αν $h \geq z_{\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0 δεχόμαστε την H_1 δηλ. υπάρχει αυτοσυσχέτιση.

Αν $h < z_{\alpha/2}$ δεχόμαστε την H_0 και λέμε ότι δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση.

5.6. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

Οι πιο χαρακτηριστικές μορφές είναι δύο.

Η πρώτη μορφή είναι εκείνη που η εξηρητημένη μεταβλητή προηγούμενης περιόδου είναι η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή στην παλινδρόμηση. Η δεύτερη μορφή είναι εκείνη που η εξηρητημένη μεταβλητή προηγούμενης περιόδου δεν είναι η μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή του υποδείγματος. Αναλυτικότερα έχουμε:

1η Περίπτωση

Το υπόδειγμα: $Y_t = \beta \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (1)

και έστω αυτοσυσχέτιση 1ου βαθμού: $\varepsilon_t = \varrho \cdot \varepsilon_{t-1} + V_t$ (2)

όπου για το V_t ισχύουν όλες οι κλασσικές υποθέσεις.

Στο υπόδειγμα (1) παραβιάζεται η ανεξαρτησία μεταξύ ερμηνευτικών μεταβλητών και τυχαίας απόκλισης. Και οι εκτιμητές b σε μικρά δείγματα είναι μεροληπτικοί, ενώ για μεγάλα δείγματα συνεπείς εφ' όσον οι τυχαίες αποκλίσεις δεν αυτοσυσχετίζονται. Επειδή όμως εδώ υπάρχει και αυτοσυσχέτιση (σχέση (2)) οι εκτιμητές δεν θα είναι και συνεπείς. Η προτεινόμενη λύση για την εκτίμηση του υποδείγματος (1) είναι η εξής:

Υστερούμε την (1) κατά μια χρονική περίοδο και πολλαπλασιάζουμε επί ϱ οπότε παίρνουμε τη σχέση:

$$Y_{t-1} \cdot \varrho = \beta \cdot \varrho \cdot Y_{t-2} + \varrho \cdot \varepsilon_{t-1} \quad (3)$$

Την (3) αφαιρούμε από την (1) και έχουμε:

$$Y_t - \varrho \cdot Y_{t-1} = \beta Y_{t-1} - \beta \varrho Y_{t-2} + \varepsilon_t - \varrho \varepsilon_{t-1}$$

$$\eta \quad Y_t = (\beta + \varrho) Y_{t-1} - \beta \varrho Y_{t-2} + V_t$$

$$\eta \quad Y_t = \beta_1^* Y_{t-1} + \beta_2^* Y_{t-2} + V_t \quad (4)$$

$$\text{όπου } \beta_1^* = \beta + \varrho, \quad \beta_2^* = -\beta \varrho$$

Την (4) μπορούμε να την εκτιμήσουμε σύμφωνα με το μερικώς ανεξάρτητο στοχαστικό γραμμικό υπόδειγμα και να έχουμε συνεπείς εκτιμήσεις γιατί έχουμε εξαλείψει την αυτοσυσχέτιση. Υπολογίζουμε όμως τα $\beta + \rho$ και $-\beta\rho$ και όχι τα β και ρ χωριστά.

Αν δεν ενδιαφερόμαστε για την εκτίμηση των β και ρ χωριστά και αντικειμενικός μας σκοπός είναι η πρόβλεψη των τιμών της Y_t τότε η εκτίμηση της (4) είναι η πιο σωστή.

2η Περίπτωση

Έστω το υπόδειγμα: $Y_t = \alpha \cdot X_t + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (1)

και τη σχέση αυτοσυσχέτισης: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + V_t$ (2)

Το υπόδειγμα (1) είναι το ίδιο με το υπόδειγμα Koyck και των αναπροσαρμοζομένων προσδοκιών. Για το V_t ισχύουν όλες οι κλασσικές υποθέσεις. Για τους λόγους που αναφέραμε και στην 1η περίπτωση, δεν είναι συνεπείς οι εκτιμητές των παραμέτρων. Και εδώ όμως η προτεινόμενη λύση ακολουθεί την ίδια διαδικασία με της 1ης περίπτωσης. Δηλ. υστερούμε την (1) κατά μια χρονική περίοδο και πολλαπλασιάζουμε με ρ :

$$Y_{t-1} \cdot \rho = \alpha \cdot \rho \cdot X_{t-1} + \beta\rho Y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} \quad (3)$$

Την (3) αφαιρούμε από την (1)

$$Y_t - \rho \cdot Y_{t-1} = \alpha \cdot X_t - \alpha \cdot \rho \cdot X_{t-1} + \beta Y_{t-1} - \beta\rho Y_{t-2} + \varepsilon_t - \rho \cdot \varepsilon_{t-1}$$

$$\eta \quad Y_t = \alpha \cdot X_t - \alpha\rho X_{t-1} + (\beta + \rho) Y_{t-1} - \beta\rho Y_{t-2} + V_t$$

$$\eta \quad Y_t = \alpha \cdot X_t + \beta_1^* Y_{t-1} - \beta_2^* Y_{t-2} - \beta_3^* X_{t-1} + V_t \quad (4)$$

$$\text{όπου } \beta_1^* = \beta + \rho, \quad \beta_2^* = -\beta\rho, \quad \beta_3^* = -\alpha\rho$$

Η τελική εξίσωση μπορεί να εκτιμηθεί σύμφωνα με το μερικώς ανεξάρτητο στοχαστικό γραμμικό υπόδειγμα και για μεγάλα δείγματα, έχουμε συνεπείς εκτιμήσεις εφ' όσον εξαλείψαμε την αυτοσυσχέτιση. Δεν μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε χωριστά τους συντελεστές α , β και ρ , πράγμα που σημαίνει ότι το υπόδειγμα θεωρείται κατάλληλο όταν ενδιαφερόμαστε για πρόβλεψη των τιμών της Y_t και όχι για την εκτίμηση των παραμέτρων.

5.7. ΒΗΤΑ ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ

Οι εκτιμητές που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων επηρεάζονται από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών, επομένως αν θέλουμε να μετρήσουμε τη σπουδαιότητα μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στην επεξήγηση της συμπεριφοράς της εξαρτημένης μεταβλητής, η χρησιμοποίηση των εκτιμητών b είναι ανεπιτυχής.

Αν ανεξαρτικοποιήσουμε τις μεταβλητές από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζοντας κάθε μια από αυτές με τις τυπικές τους αποκλίσεις, τότε έχουμε τους βήτα εκτιμητές που στη σύγκριση διαφορετικών ερευνών (εξισώσεων) μπορούν να μας βοηθήσουν για την ερμηνεία της συμπεριφοράς των X επί της Y . Οι βήτα εκτιμητές αν και χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη στατιστική ανάλυση της ψυχολογίας εν τούτοις σπάνια χρησιμοποιούνται στην εφηρμοσμένη οικονομετρία κι αυτό γιατί είναι δύσκολη η ερμηνεία τους.

Έστω το υπόδειγμα (σε αποκλίσεις από τους μέσους):

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

Αν διαιρέσουμε τις μεταβλητές με τις τυπικές τους αποκλίσεις παίρνουμε το υπόδειγμα:

$$\frac{y}{s_y} = \beta_1 \frac{x_1}{s_1} + \beta_2 \frac{x_2}{s_2} \Rightarrow y = \left(\beta_1 \frac{s_y}{s_1} \right) x_1 + \left(\beta_2 + \frac{s_y}{s_2} \right) x_2$$

β_1 , β_2 βήτα εκτιμητές.

Οι σχέσεις των βήτα εκτιμητών και των εκτιμητών β_1 , β_2 είναι:

$$b_1 = \beta_1 \frac{s_y}{s_1} , \quad b_2 = \beta_2 \frac{s_y}{s_2}$$

Στο διμεταβλητό ο βήτα εκτιμητής συμπίπτει με το συντελεστή συσχέτισης.

5.8. ΣΦΑΛΜΑ ΕΞΙΔΙΚΕΥΣΕΩΣ

Αν σ' ένα υπόδειγμα παραλείψουμε μια σημαντική ερμηνευτική μεταβλητή ή χρησιμοποιήσουμε μια λανθασμένη αντί της σωστής τότε έχουμε σφάλμα εξιδικεύσεως.

Στο σφάλμα εξιδικεύσεως οι εκτιμητές των συντελεστών είναι μεροληπτικοί.

Δε δημιουργείται σφάλμα εξιδικεύσεως και οι εκτιμήσεις των συντελεστών είναι αμερόληπτες αν οι παραλειπόμενες σημαντικές ερμηνευτικές μεταβλητές και οι συμπεριλαμβανόμενες στο υπόδειγμα είναι (ορθογώνιες) ασυσχέτιστες.

Έστω το υπόδειγμα σε αποκλίσεις από τους μέσους

$$y_t = b_1x_1 + b_2x_2 + e_{12}$$

Αντί αυτού χρησιμοποιούμε το υπόδειγμα σε αποκλίσεις από τους μέσους:

$$y_t = be_1 \cdot x_1 + e_1$$

δηλαδή παραλείπουμε τη σημαντική ερμηνευτική μεταβλητή x_2 . Αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των x_1 και x_2 πράγμα σύνηθες, έστω της μορφής $x_2 = bv_2x_1 + v_2$ τότε μεταξύ των συντελεστών των παραπάνω τριών υποδειγμάτων ισχύει ως γνωστόν η σχέση:

$$be_1 = b_1 + bv_2 \cdot b_2$$

Παίρνουμε τις μαθηματικές ελπίδες της παραπάνω σχέσης και έχουμε:

$$E (be_1) = E (b_1) + E (bv_2 \cdot b_2) = \beta_1 + \beta_2 \beta v_2 \neq \beta_1$$

άρα η εκτίμηση είναι μεροληπτική.

5.9. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Όταν οι παρατηρήσεις από το δείγμα περιέχουν σφάλματα μετρήσεως στην εξαρτημένη μεταβλητή οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων εξακολουθούν να είναι BLUE (Best Linear Unbiased Estimators). Όταν όμως τα σφάλματα αυτά είναι στις ερμηνευτικές μεταβλητές τότε οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι μεροληπτικές γιατί τότε οι ερμηνευτικές μεταβλητές και ο διαταρακτικός όρος συσχετίζονται.

5.10. ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Μετά την εκτίμηση του υποδείγματος μια προσεκτική ανάλυση των υπολοίπων θεωρείται πολύ σημαντική. Η ανάλυση αυτή μπορεί να συμβάλλει στη βελτίωση του υποδείγματος. Για παράδειγμα, μια σημαντική ανεξάρτητη μεταβλητή πιθανό να μην περιελήφθει στο υπόδειγμα. Αν διαγραμματικά τα υπόλοιπα ακολουθούν ένα κάποιο πρότυπο σχετικά με την παραπάνω μεταβλητή η μεταβλητή αυτή μπορεί να συμπεριληφθεί στο υπόδειγμα. Σε χρονολογικές σειρές ο χρόνος θα μπορούσε να είναι μια τέτοια μεταβλητή. Αν τα υπόλοιπα δείχνουν μια τάση μια μεταβλητή τάσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Η μεταβλητή αυτή είναι, τις περισσότερες φορές, στατιστικά σημαντική ακριβώς γιατί σχετίζεται με τις υπόλοιπες μεταβλητές που δεν χρησιμοποιήθηκαν στο υπόδειγμα.

Μια άλλη περίπτωση είναι τα υπόλοιπα αυτά να συσχετίζονται μεταξύ τους. Εδώ θα πρέπει να υποδειχθεί ένα υπόδειγμα που κατά κάποιο τρόπο εξηγεί τα υπόλοιπα.

Μια άλλη περίπτωση είναι τα υπόλοιπα να μην ακολουθούν την κανονική κατανομή οπότε άλλη μέθοδος εκτίμησης (εκτός της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων) είναι αναγκαία και απαραίτητη. Αν τα υπόλοιπα διαγραμματικά σχετίζονται με την εκτίμηση της y και η διακύμανση της y με το μέσο της, τότε υπάρχει ένδειξη για ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας στο υπόδειγμα που υποδείξαμε.