

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Δίνεται το υπόδειγμα

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_m \\ Y_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_m & 0 \\ X_{m+1} & X_{m+1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_n & X_n \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^m X_i Y_i}{\sum_{i=1}^m X_i^2} \quad \text{και} \quad b_1 + b_2 = \frac{\sum_{i=m+1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=m+1}^n X_i^2}$$

με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

ΛΥΣΗ

Επειδή λείπει η μοναδιαία στήλη στη μήτρα των X παίρνω τις μεταβλητές σε αποκλίσεις από τους μέσους. Το υπόδειγμα είναι:
 $y_t = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u_t$

Έτσι έχω $b = (x'x)^{-1} \cdot x'y$

$$x'x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\ 0 & \dots & 0 & x_{m+1} & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 0 \\ x_{m+1} & x_{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ x_n & x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 & 0 + \dots + 0 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 \\ 0 + \dots + 0 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 & 0 + \dots + 0 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=m+1}^n x_i^2 & \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{\text{adj } (x'x)}{|x'x|}$$

$$\text{adj } (x'x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=m+1}^n x_i^2 & - \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \\ - \sum_{i=m+1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |x'x| &= \sum_1^n x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2 - \sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2 = \sum_{m+1}^n x_i^2 \left(\sum_1^n x_i^2 - \sum_{m+1}^n x_i^2 \right) = \\
 &= \sum_{m+1}^n x_i^2 \left(\sum_1^m x_i^2 + \sum_{m+1}^n x_i^2 - \sum_{m+1}^n x_i^2 \right) = \sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2
 \end{aligned}$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \begin{bmatrix} \sum_{m+1}^n x_i^2 & - \sum_{m+1}^n x_i^2 \\ - \sum_{m+1}^n x_i^2 & \sum_1^m x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{m+1}^n x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} & - \frac{\sum_{m+1}^n x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \\ - \frac{\sum_{m+1}^n x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} & \frac{\sum_1^m x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_1^m x_i^2} & - \frac{1}{\sum_1^m x_i^2} \\ - \frac{1}{\sum_1^m x_i^2} & \frac{\sum_1^m x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \end{bmatrix}$$

$$x'y = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\ 0 & \dots & 0 & x_{m+1} & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + \dots + x_m y_m + x_{m+1} y_{m+1} + \dots + x_n y_n \\ 0 + \dots + 0 + x_{m+1} y_{m+1} + \dots + x_n y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_1^n x_i y_i \\ \sum_{m+1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$b = (x'x)^{-1} \cdot x'y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_1^m x_i^2} & -\frac{1}{\sum_1^m x_i^2} \\ -\frac{1}{\sum_1^m x_i^2} & \frac{\sum_1^n x_i^2}{\sum_{m+1}^m x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_1^n x_i y_i \\ \sum_{m+1}^n x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_1^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} - \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} \\ -\frac{\sum_1^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} + \frac{\sum_1^n x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_{m+1}^m x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \end{bmatrix}$$

Αρα

$$b_1 = \frac{\sum_1^n x_i y_i - \sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} = \frac{\sum_1^m x_i y_i + \sum_{m+1}^n x_i y_i - \sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} = \frac{\sum_1^m x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2}$$

και

$$b_2 = - \frac{\sum_1^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} + \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \cdot \sum_1^n x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2}$$

όμως

$$b_2 = - \frac{\sum_1^m x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} - \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} + \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \cdot \sum_1^n x_i^2}{\sum_{m+1}^n x_i^2 \cdot \sum_1^m x_i^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 + b_1 = - \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_1^m x_i^2} + \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \cdot \sum_1^n x_i^2}{\sum_1^m x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2} - \frac{\sum_{m+1}^n x_i^2}{\sum_1^m x_i^2} \cdot \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i + \sum_{m+1}^n x_i y_i \cdot \sum_1^n x_i^2}{\sum_1^m x_i^2} =$$

$$= \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \left(- \sum_{m+1}^n x_i^2 + \sum_1^n x_i^2 \right)}{\sum_1^m x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \left(- \sum_{m+1}^n x_i^2 + \sum_1^m x_i^2 + \sum_{m+1}^n x_i^2 \right)}{\sum_1^m x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2} =$$

$$= \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i \cdot \sum_1^m x_i^2}{\sum_1^m x_i^2 \cdot \sum_{m+1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{m+1}^n x_i y_i}{\sum_{m+1}^n x_i^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Στο κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα.

Γιατί τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα;

Γιατί τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα;

Γιατί τα διανύσματα στήλες της μήτρας:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{Tn} \end{bmatrix}$$

πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους;

Και όλα αυτά τι επίδραση έχουν στην εκτίμηση του b ;

ΛΥΣΗ

Τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα γιατί αν όχι και συσχετίζονται, έχουμε το φαινόμενο της αυτοσυσχέτισης το οποίο όμως δεν επιδρά στην εκτίμηση του b που εξακολουθεί να είναι άριστος εκτιμητής. Τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα γιατί αν όχι και συσχετίζονται, έχουμε πολυσυγγραμμικότητα, η οποία όμως δεν επιδρά επί της εκτίμησης του b που εξακολουθεί να είναι άριστη.

Τα διανύσματα στήλες της μήτρας x πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, γιατί διαφορετικά είναι αδύνατη η αντιστροφή της μήτρας $x'x$ και δεν έχει λύση το σύστημα των κανονικών εξισώσεων δηλ. έχουμε τέλεια πολυσυγγραμμικότητα, η οποία όπως ξέρουμε κάνει αδύνατη την εκτίμηση του b .

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Δίνεται το υπόδειγμα $y_t = b_0 + b_1 x_t + u_t$ και $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$. Πως θα απαλοιφεί η αυτοσυσχέτιση;

ΛΥΣΗ

Αν ρ του πληθυσμού είναι γνωστό χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό της θεωρίας της αυτοσυσχέτισης. Αν ρ του πληθυσμού είναι άγνωστο, κι έχουμε γνωστή την εκτίμηση του ρ , χρησιμοποιούμε τις μεθόδους Durbin ή Cochran-Orcutt.

Εδώ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού γιατί είναι γνωστό το ρ του πληθυσμού.

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Που χρησιμεύει ο R^2 και ο R^2 ;

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία για το διορθωμένο συντελεστή (στις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών προσδιορισμού)

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Ναδειχθεί ότι ισχύει η σχέση $r^2 = b_1^2 \frac{\sum x^2}{\sum y^2}$, όπου $x = x - \bar{x}$ και $y = Y - \bar{Y}$

ΛΥΣΗ

r = συντελεστής συσχέτισης

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2} \cdot \sqrt{\sum y^2}} \Rightarrow r^2 = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \cdot \sum y^2} \Rightarrow r^2 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \cdot \frac{\sum xy}{\sum y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = b_1 \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \Rightarrow r^2 = b_1 \cdot \frac{\Sigma xy \cdot \Sigma x^2}{\Sigma y^2 \cdot \Sigma x^2} \Rightarrow r^2 = b_1 \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = b_1 \cdot b_1 \cdot \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2} \Rightarrow r^2 = b_1^2 \cdot \frac{\Sigma x^2}{\Sigma y^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6η

Τι εννοούμε με τον όρο πολυσυγγραμμικότητα και δώστε ένα παράδειγμα.

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία για πολυσυγγραμμικότητα

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Η συνδιακύμανση δύο ερμηνευτικών μεταβλητών είναι διάφορη του μηδενός.

(Να προσδιοριστεί η πρόταση)

ΛΥΣΗ

Αφού η συνδιακύμανση είναι διάφορη του μηδενός σημαίνει ότι έχουμε πολυσυγγραμμικότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 8η

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο b εκτιμητής είναι αποτελεσματικός ενός εκτιμητή β του πληθυσμού;

ΛΥΣΗ

Αυτό σημαίνει ότι ο b είναι αμερόληπτος εκτιμητής του β και ελάχιστης διακύμανσης δηλ. δεν υπάρχει άλλος με μικρότερη διακύμανση.

ΑΣΚΗΣΗ 9η

Να δείξετε ότι στο υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$, ο εκτιμητής $b = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot Y_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$ είναι αμερόληπτος του β .

ΛΥΣΗ

$$b = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) (Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) Y_t - \bar{Y} \sum (X_t - \bar{X})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) Y_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$b = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot Y_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) (\alpha + \beta X_t + \varepsilon_t)}{\sum (X_t - \bar{X})^2} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{\sum (X_t - \bar{X})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + \beta \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot X_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot \varepsilon_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot \frac{\sum (X_t - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} + \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \varepsilon_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \beta + \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot \varepsilon_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$Eb = \beta + \frac{\sum (X_t - \bar{X}) \cdot E\varepsilon_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \beta$$

ΑΣΚΗΣΗ 10η

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$, όπου υποθέτουμε ότι $u_t = 0,5 u_{t-1} + \varepsilon_t$, ενώ ισχύουν όλες οι άλλες υποθέσεις του κλασικού γραμμικού υποδείγματος. Η μεταβλητή ε_t είναι τυχαία με $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2$ και $E\varepsilon_t \varepsilon_s = 0$ για $t \neq s$. Να βρεθούν οι άριστες γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήσεις των παραμέτρων β_0 και β_1 από τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

Y_t	X_t
4	2
10	6
18	14
30	30

ΛΥΣΗ

Έχουμε σχέση αυτοσυσχέτισης στην οποία το ρ του πληθυσμού (συντελεστής αυτοσυσχέτισης) είναι γνωστός:
Απαλοΐφουμε την αυτοσυσχέτιση ως εξής:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

Υστερούμε την (1) κατά μια χρονική περίοδο και την πολλαπλασιάζουμε επί $\rho = 0,5$

$$0,5 Y_{t-1} = 0,5 \beta_0 + 0,5 \beta_1 X_{t-1} + 0,5 u_{t-1} \quad (2)$$

Αφαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη κι έχουμε:

$$Y_t - 0,5 Y_{t-1} = 0,5 \beta_0 + \beta_1 (X_t - 0,5 X_{t-1}) + u_t - 0,5 u_{t-1}$$

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t \quad (3)$$

όπου $Y_t^* = Y_t - 0,5 Y_{t-1}$, $\beta_0^* = 0,5 \beta_0$, $x_t^* = x_t - 0,5 x_{t-1}$ και έχουμε ε_t γιατί $u_t = 0,5 u_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_t = u_t - 0,5 u_{t-1}$

Στην (3) μπορούμε να εφαρμόσουμε την OLS και οι εκτιμήσεις να είναι άριστες αφού η τυχαία απόκλιση ε_t ικανοποιεί όλες τις κλασσικές υποθέσεις.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{T \Sigma X^* Y^* - \Sigma X^* \Sigma Y^*}{T \Sigma X^{*2} - (\Sigma X^*)^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y}^* - \hat{\beta}_1 \bar{X}^*$$

Επειδή με το μετασχηματισμό χάθηκε η πρώτη παρατήρηση την αντικαθιστούμε με $X_1 = 1,73$, $Y_1 = 3,46$

$$Y_1^* = Y_1 \sqrt{1 - \rho^2} = 3,46$$

και

$$X_1^* = X_1 \sqrt{1 - \rho^2} = 1,73$$

Y_t	X_t	$X_t^* = X_t - 0,5 X_{t-1}$	$Y_t^* = Y_t - 0,5 Y_{t-1}$	$X^* Y^*$	X^{*2}
		$X_1 = 1,73$	$Y_1 = 3,46$	5,98	2,99
4	2	$6 - 0,5 \cdot 2 = 5$	$10 - 0,5 \cdot 4 = 8$	40	25
10	6	$14 - 0,5 \cdot 6 = 11$	$18 - 0,5 \cdot 10 = 13$	143	121
18	14	$30 - 0,5 \cdot 14 = 23$	$30 - 0,5 \cdot 18 = 21$	483	529
30	30	40,73	45,46	671,98	677,99

Έχουμε επίσης $\bar{X}^* = \frac{40,73}{4} = 10,2$, $\bar{Y}^* = \frac{45,46}{4} = 11,4$, $T = 4$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{T \cdot \sum X^* Y^* - \sum X^* \cdot \sum Y^*}{T \cdot \sum X^{*2} - (\sum X^*)^2} = \frac{4 \cdot 671,98 - 40,73 \cdot 45,46}{4 \cdot 677,99 - 40,73^2} = 0,8$$

$$\hat{\beta}_0^* = \bar{Y}_t^* - \hat{\beta}_1 \bar{X}^* = 11,4 - 0,8 \cdot 10,2 = 3,24$$

$$\hat{\beta}_0^* = 0,5 \cdot \hat{\beta}_0 \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\beta}_0^*}{0,5} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 2 \cdot \hat{\beta}_0^* \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 6,48$$

ΑΣΚΗΣΗ 11η

Έστω η $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + v_t$ όπου v_t κατανέμεται κανονικά και ανεξάρτητα με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2 . Από ένα δείγμα 67 παρατηρήσεων στις Y και X_1 έχουν υπολογιστεί:

$$\sum (Y - \bar{Y})^2 = 1,16 , \quad \sum (Y - \bar{Y}) (X_1 - \bar{X}_1) = -8 , \quad \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 = 100$$

α) Να βρεθεί ο συντελεστής $\hat{\beta}_1$ και να κατασκευαστεί το 95%

$$\text{διάστημα εμπιστοσύνης δεδομένου ότι } s^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{T - 2} = 0,008 .$$

Στη συνέχεια εισάγουμε στο υπόδειγμα τη μεταβλητή X_2 .
Για το ίδιο δείγμα:

$$\sum (X_2 - \bar{X}_2)^2 = 100 , \sum (X_1 - \bar{X}_1) (X_2 - \bar{X}_2) = - 80$$

$$\sum (Y - \bar{Y}) (X_2 - \bar{X}_2) = 10$$

β) Να βρεθούν οι συντελεστές των X_1 και X_2 .

γ) Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι $\beta_1 = \beta_2 = 0$ δεδομένου ότι

$$s^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{T - K - 1} = 0,0025$$

δ) Γιατί ο συντελεστής της X_1 στην ερώτηση (α) διαφέρει από εκείνον της ερώτησης (β); Ποιά η μεταξύ τους σχέση;

ε) Υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα;

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X - \bar{X}) (Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{- 8}{100} = -0,08$$

$$s \cdot \hat{\beta}_1 = \frac{s}{\sqrt{\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}} = \frac{\sqrt{0,008}}{\sqrt{100}} = 0,009$$

$$\begin{aligned} -\hat{\beta}_1 - t_{v,\alpha} \cdot s \cdot \hat{\beta}_1 &< \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{v,\alpha} \cdot s \cdot \hat{\beta}_1 \\ -0,08 - 1,96 \cdot 0,009 &< \beta_1 < -0,08 + 1,96 \cdot 0,009 \\ - 0,09764 &< \beta_1 < - 0,06236 \end{aligned}$$

(β)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_1 y \cdot \sum x_2^2 - \sum x_2 y \cdot \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{- 8 \cdot 100 + 10 \cdot 80}{100 \cdot 100 - (- 80)^2} = \frac{- 800 + 800}{10000 - 6400} = 0$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \frac{10 \cdot 100 - (-8) \cdot (-80)}{100 \cdot 100 - (-80)^2} = \frac{1000 - 640}{3600} = 0,1$$

$$(\gamma) \quad H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \text{κάποιο } \beta \neq 0 \quad F = \frac{\frac{R^2}{N}}{\frac{1-R^2}{T-N-1}} = \frac{\frac{0,8}{2}}{\frac{1-0,8}{67-2-1}} = \frac{\frac{0,8}{2}}{\frac{0,2}{64}} = 128$$

$$\text{γιατί} \quad R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \cdot \Sigma x_1 y + \hat{\beta}_2 \cdot \Sigma x_2 y}{\Sigma y^2} = \frac{0 \cdot (-8) + 0,1 \cdot 10}{1,16} = \frac{1}{1,16} = 0,86$$

$$\text{Τιμή πινάκων:} \quad F_{3,64,0,05} = 2$$

Επειδή $F = 128 > F_{3,64,0,05} = 2$ απορρίπτεται η H_0

(δ) Οι συντελεστές της x_1 στο διμεταβλητό και στο τριμεταβλητό υπόδειγμα διαφέρουν γιατί έχουμε διάφορο αριθμό ανεξαρτήτων μεταβλητών.

$$\text{Η μεταξύ τους σχέση είναι: } \hat{\beta}_{e1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_{v2} \cdot \hat{\beta}_2$$

όπου $\hat{\beta}_{e1}$ ο συντελεστής της x_1 στο διμεταβλητό

$\hat{\beta}_1 \gg \gg$ της x_1 στο τριμεταβλητό

$\hat{\beta}_{v2} \gg \gg$ της εξίσωσης μεταξύ x_1 και x_2

$\hat{\beta}_2 \gg \gg$ της x_2 στο τριμεταβλητό.

Οι δύο συντελεστές θα ήταν ίσοι στην περίπτωση που οι μεταβλητές x_1 και x_2 ήταν ορθογώνιες ή ασυσχέτιστες, οπότε $\hat{\beta}_{v2} = 0$

(ε) Ναι υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα στο τριμεταβλητό γιατί το $\hat{\beta}_{v2} \neq 0$ αφού όπως προκύπτει από τα δεδομένα μας $\hat{\beta}_{e1} \neq -0,08$ και $\hat{\beta}_1 = 0$. Αν οι μεταβλητές δε συσχετιζόνταν το $\hat{\beta}_{e1}$ και το $\hat{\beta}_1$ έπρεπε να είναι ίσα.

Άλλος τρόπος:
$$R_{12}^2 = \frac{(\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_1^2 \cdot \sum x_2^2} = \frac{(-80)^2}{100 \cdot 100} = 0,64$$

δηλ. υπάρχει συντελεστής προσδιορισμού ($\neq 0$) άρα υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 12η

Έστω το υπόδειγμα: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + u$

α) Να δικαιολογήσετε αν ο εκτιμητής $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y X}{\sum X^2}$ είναι αμερόλη-

πτος εκτιμητής του β_1

β) Στην περίπτωση που η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι αρνητική με ποιές προϋποθέσεις ο εκτιμητής $\hat{\beta}_1$ θα ήταν αμερόληπτος;

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) \quad y = Y - \bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + u - \beta_0 - \beta_1 \bar{X}_1 - \bar{u} = \beta_1 (X_1 - \bar{X}_1) + (u - \bar{u})$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y X}{\sum X^2} = \frac{\sum [\beta_1 (X_1 - \bar{X}_1) + (u - \bar{u})] X_1}{\sum X_1^2} = \frac{\beta_1 \sum (X_1 - \bar{X}_1) X_1 + \sum (u - \bar{u}) X_1}{\sum X_1^2}$$

$$E \hat{\beta}_1 = \frac{\beta_1 \sum (X_1 - \bar{X}_1) X_1 + \sum (E_u - E_u) X_1}{\sum X_1^2} = \frac{\beta_1 \sum (X_1 - \bar{X}_1) \cdot X_1}{\sum X_1^2} =$$

$$= \frac{\beta_1 \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}{\sum X_1^2}$$

Δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής γιατί δε δίνει β_1 . Είναι μεροληπτική εκτίμηση.

(β) Για να είναι αμερόληπτος πρέπει $\frac{\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}{\sum X_1^2} = 1$ δηλ. αριθμητής και παρονομαστής να είναι ίσοι, θα πρέπει δηλ. $\bar{X}_1 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 13η

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t$, όπου $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$ και για το ε_t ισχύουν όλες οι συνηθισμένες υποθέσεις.

- α) Μπορούμε να πούμε ότι ο διαταρακτικός όρος αυτοσυσχετίζεται;
- β) Αν ναι, τότε να καθορίσετε τους εκτιμητές των συντελεστών που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

ΛΥΣΗ

$$(α) \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t \quad (1)$$

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Αυτοσυσχετίζεται ο διαταρακτικός όρος (u_t) όπως είναι φανερό από τη σχέση (2) όπου ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ είναι $\rho=1$

(β) Για να κάνουμε την εκτίμηση των συντελεστών, υστερούμε την (1) κατά μια χρονική περίοδο και πολλαπλασιάζουμε επί $\rho=1$

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{1t-1} + u_{t-1} \quad (3)$$

Την (3) αφαιρούμε από την (1)

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_1 (X_{1t} - X_{1t-1}) + u_t - u_{t-1}$$

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \varepsilon_t$$

Χρησιμοποιούμε την OLS τώρα,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma \varepsilon^2}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial \Sigma (Y_t^* - \beta_1 X_{1t}^*)^2}{\partial \beta_1} = 2 \Sigma (Y_t^* - \beta_1 X_{1t}^*) (Y_t^* - \beta_1 X_{1t}^*)' = -2 \Sigma (Y_t^* - \beta_1 X_{1t}^*) X_{1t}^* \\ &= -2 \Sigma (Y_t^* - \beta_1 X_{1t}^*) X_{1t}^* = 0 \Rightarrow \Sigma X_{1t}^* Y_t^* - \beta_1 \Sigma X_{1t}^{*2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta_1 = \frac{\Sigma X_{1t}^* Y_t^*}{\Sigma X_{1t}^{*2}} = \frac{\Sigma (X_{1t} - X_{1t-1}) (Y_t - Y_{t-1})}{\Sigma (X_{1t} - X_{1t-1})^2} \end{aligned}$$

Όταν ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι μονάδα εκτιμάται μόνο το β_1 και όχι το β_0 . Όταν $\rho=1$ μπορούμε για εκτίμηση των συντελεστών παλινδρόμησης να χρησιμοποιήσουμε τις πρώτες διαφορές των μεταβλητών, αντί τις αρχικές μεταβλητές, ούτως ώστε να εξαλείψουμε την αυτοσυσχέτιση.

ΑΣΚΗΣΗ 14η

Δίνονται τα υποδείγματα: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$
 $Y - X_1 = \beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2^* X_2 + \varepsilon$

Να αποδειχθεί ότι:

- α) $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1 - 1$
- β) $\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2$
- γ) $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0$
- δ) $\hat{u}_t = \hat{\varepsilon}_t$

ΛΥΣΗ

$$(α) \quad \hat{\beta}_1^* = \frac{\Sigma x_1 (y - x_1) \Sigma x_2^2 - \Sigma x_2 (y - x_1) \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_2^2 - \Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2 y - \Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1 x_2 + (\Sigma x_1 x_2)^2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \\
&= \frac{\Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_2^2 - \Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} - \frac{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2 y - (\Sigma x_1 x_2)^2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \hat{\beta}_1 - 1 \\
(\beta) \quad \hat{\beta}_2^* &= \frac{\Sigma x_2 (y - x_1) \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 (y - x_1) \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \\
&= \frac{\Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 x_2 \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_1 x_2 + \Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \\
&= \frac{\Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \hat{\beta}_2 \\
(\gamma) \quad \hat{\beta}_0^* &= \bar{Y}^* - \hat{\beta}_1^* \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2^* \bar{X}_2 = \bar{Y} - \bar{X}_1 - (\hat{\beta}_1 - 1) \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 = \\
&= \bar{Y} - \bar{X}_1 - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 + \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 = \hat{\beta}_0 \\
(\delta) \quad \hat{\varepsilon}_t &= Y - X_1 - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* X_1 - \hat{\beta}_2^* X_2 = Y - X_1 - \hat{\beta}_0 - (\hat{\beta}_1 - 1) X_1 - \hat{\beta}_2 X_2 = \\
&= Y - X_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 + X_1 - \hat{\beta}_2 X_2 = Y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_1 - \hat{\beta}_2 X_2 = u_t
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15η

Έστω το υπόδειγμα

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 (X_1 - X_2) + \beta_4 X_1 \cdot X_2 + u_t$$

Είναι δυνατή η εκτίμηση όλων των παραμέτρων; Αν όχι ποιές μπορούν να εκτιμηθούν και γιατί;

ΛΥΣΗ

Όταν μας ρωτούν αν είναι δυνατή η εκτίμηση ενός υποδείγματος θα πρέπει να ψάξουμε για τέλεια πολυσυγγραμμικότητα (οπότε δεν είναι δυνατή).

Όπως είναι διατυπωμένο το υπόδειγμα υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα γιατί η τρίτη μεταβλητή δηλ. η $(X_1 - X_2)$ είναι γραμμικός συνδιασμός των δύο πρώτων μεταβλητών και επομένως είναι αδύνατη η αντιστροφή της μήτρας $X'X$ και φυσικά η εκτίμηση των παραμέτρων είναι αδύνατη.

Το υπόδειγμα όμως μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 - \beta_3 X_2 + \beta_4 X_1 X_2 + u_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_3) X_1 + (\beta_2 - \beta_3) X_2 + \beta_4 X_1 X_2 + u_t$$

Στη μορφή του αυτή το υπόδειγμα μπορεί να εκτιμηθεί με την OLS, αλλά εκτιμάμε τις παραμέτρους β_0 , $(\beta_1 + \beta_3)$ μαζί και όχι χωριστά, $(\beta_2 - \beta_3)$ μαζί και όχι χωριστά και την β_4 , πράγμα που σημαίνει ότι από τις αρχικές παραμέτρους του αρχικού υποδείγματος μόνο τα β_0 και β_4 μπορούμε να εκτιμήσουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 16η

Έστω τα ακόλουθα δεδομένα:

Y	X ₁	X ₂

-6	2	3
-4	3	5
-2	4	7
0	5	9
2	6	11
4	7	13
6	8	15
8	9	17

- α) Μπορούν να εκτιμηθούν οι συντελεστές του υποδείγματος $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$ με τα παραπάνω δεδομένα;
- β) Αν η απάντηση είναι αρνητική πως μπορεί να τροποποιηθεί το υπόδειγμα ώστε να είναι δυνατή η εκτίμησή του;

ΛΥΣΗ

- (α) Από τις παρατηρήσεις προκύπτει ότι μεταξύ των μεταβλητών X_1 και X_2 υπάρχει ακριβής γραμμική σχέση της μορφής $X_2 = 2X_1 - 1$. Επομένως υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα και είναι αδύνατη η εκτίμηση των συντελεστών
- (β) Αν ενσωματώσουμε στο υπόδειγμα τη σχέση $X_2 = 2X_1 - 1$, θα έχουμε το ακόλουθο υπόδειγμα:

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 (2X_1 - 1) + u = \beta_0 + \beta_1 X_1 + 2\beta_2 X_1 - \beta_2 + u = \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + 2\beta_2) X_1 - \beta_2 + u = (\beta_0 - \beta_2) + (\beta_1 + 2\beta_2) X_1 + u \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί με την OLS αφού έχουμε εξαλείψει την πολυσυγγραμμικότητα αφού έχουμε μόνο μια μεταβλητή τη X_1 , με τη διαφορά ότι δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τους συντελεστές β_0 , β_1 και β_2 χωριστά.

ΑΣΚΗΣΗ 17η

Έστω η συνάρτηση κατανάλωσης

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u_t$ όπου Y_t = κατανάλωση, X_1 = συνολικό εθνικό εισόδημα, X_2 = εισόδημα αστικών και ημιαστικών περιοχών και X_3 = εισόδημα αγροτικών περιοχών. Μπορεί να γίνει εκτίμηση του υποδείγματος;

ΛΥΣΗ

Υπάρχει ακριβής γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών δηλ. $X_1 = X_2 + X_3$. Επομένως δεν μπορεί να γίνει εκτίμηση του υποδείγματος εφ' όσον έχουμε τέλεια πολυσυγγραμμικότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 18η

Έστω το υπόδειγμα $Y = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$, όπου υποθέτουμε ότι $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 X_t^2$ ενώ ισχύουν όλες οι άλλες κλασσικές υποθέσεις. Να βρεθούν οι άριστες γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήσεις των παραμέτρων β_0 και β_1 με τη χρήση των ακόλουθων παρατηρήσεων:

<u>Y</u>	<u>X</u>
1,5	0,10
2	0,25
7	1

ΛΥΣΗ

Διαιρούμε αμφότερα τα μέλη του υποδείγματος με την $\sqrt{X_t^2} = X_t$ προκειμένου να εξαλείψουμε την ετεροσκεδαστικότητα.

$$\text{Πράγματι } \frac{Y_t}{X_t} = \beta_0 \cdot \frac{1}{X_t} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_t}{X_t}$$

$$\text{Δηλαδή } Y_t^* = \beta_0 \cdot X_t^* + \beta_1 + \varepsilon_t^* \quad (1)$$

Στο υπόδειγμα (1) εφαρμόζω την OLS γιατί δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα. Πράγματι:

$$V(\varepsilon_t^*) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{X_t}\right) = \frac{1}{X_t^2} \cdot V(\varepsilon_t) = \frac{1}{X_t^2} \cdot \sigma^2 X_t^2 = \sigma^2$$

δηλαδή ομοσκεδαστικότητα.

Y	X	$Y^* = \frac{Y_t}{X_t}$	$X^* = \frac{1}{X_t}$	X^*Y^*	X^{*2}
1,5	0,10	$1,5/0,10 = 15$	$1/0,10 = 10$	150	100
2	0,25	$2/0,25 = 8$	$1/0,25 = 4$	32	16
7	1	$7/1 = 7$	$1/1 = 1$	7	1
		<u>30</u>	<u>15</u>	<u>189</u>	<u>117</u>

$$\hat{\beta}_0 = \frac{T\Sigma X^*Y^* - \Sigma X^*\Sigma Y^*}{T.\Sigma X^{*2} - (\Sigma X^*)^2} = \frac{3. 189 - 15. 30}{3. 117 - 15^2} = \frac{567 - 450}{351 - 225} = \frac{117}{126} \approx 0,93$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}^* - \hat{\beta}_0 \bar{X}^* = 10 - 0,93 \cdot 5 \approx 5,35$$

Άρα η αρχική εξίσωση είναι: $Y_t = 0,93 + 5,35 X_t$

ΑΣΚΗΣΗ 19η

Έστω οι ακόλουθες παρατηρήσεις για τις μεταβλητές Y , X_1 και X_2 .

Y	X_1	X_2
10	1	2
12	2	4
15	3	6
18	4	8
20	5	10

- α) Με τα δεδομένα αυτά μπορούμε να εκτιμήσουμε όλους τους συντελεστές του υποδείγματος: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t$;
Αν όχι, ποιούς μπορούμε και γιατί;
β) Αν ήταν γνωστό ότι $\beta_2 = 0,5$ τότε πως θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε την πληροφορία αυτή για την εκτίμηση των παραμέτρων του παραπάνω υποδείγματος;

ΛΥΣΗ

(α) Δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα γιατί όπως φαίνεται από τις παρατηρήσεις υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα αφού $X_2 = 2X_1$. Αν αντικαταστήσουμε όμως στο υπόδειγμα όπου x_2 το ίσον του θα έχουμε:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 (2X_1) + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = \beta_0 + (\beta_1 + 2\beta_2) X_1 + \varepsilon_t$$

$$\text{ή } Y_t = \beta_0 + \beta_1^* X_1 + \varepsilon_t \quad (1)$$

όπου $\beta_1^* = \beta_1 + 2\beta_2$. Στο υπόδειγμα (1) μπορούμε να εφαρμόσουμε την OLS γιατί έχουμε εξαλείψει την πολυσυγγραμμικότητα. Δεν μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε από το αρχικό υπόδειγμα τα β_1 και β_2 αλλά μόνο το β_0 γιατί έχουμε περισσότερες παραμέτρους να εκτιμήσουμε απ' όλες μας επιτρέπουν οι πληροφορίες μας από το δείγμα.

$$(\beta) \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + 0,5x_2 + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t - 0,5X_2 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_t$$

$$\text{ή} \quad Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_t, \quad \text{όπου} \quad Y_t^* = Y_t - 0,5X_2$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (OLS).

ΑΣΚΗΣΗ 20η

Με τη μέθοδο OLS από ένα δείγμα 20 παρατηρήσεων υπολογίστηκε η εξίσωση

$$\hat{Y}_t = -2,4 + 0,28X_t, \quad R^2 = 0,983, \quad d = 0,937, \quad d_L = 1,20 \quad d_u = 1,41$$

α) Να γίνει έλεγχος της υπόθεσης $H_0 : \beta_1 = 0$

β) Να γίνει έλεγχος για αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού.

γ) Πως θα εκτιμήσετε το συντελεστή β_1 όταν υπάρχει αυτοσυσχέτιση.

ΛΥΣΗ

$$(\alpha) \quad H_0 : \beta_1 = 0 \quad t = \frac{|\hat{\beta}_1|}{s_{\hat{\beta}_1}} \quad s_{\hat{\beta}_1} = \frac{s}{\sqrt{\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}}$$

Λόγω έλλειψης στοιχείων δεν μπορώ να κάνω έλεγχο της υπόθεσης H_0 : Στο διμεταβλητό όμως υπόδειγμα ο παραπάνω έλεγχος της υπόθεσης $H_0 : \beta_1 = 0$ είναι ισοδύναμος της υπόθεσης

$$H_0 : R^2 = 0$$

$$H_1 : R^2 \neq 0$$

$$F = \frac{\frac{R^2}{N}}{\frac{1 - R^2}{T - N - 1}} = \frac{\frac{0,983}{1}}{\frac{1 - 0,983}{20 - 1 - 1}} = 1041,5647$$

Επειδή $F > F_{v_1, v_2, \alpha} = 1,96$ απορρίπτεται η H_0 και γίνεται δεκτή η H_1 . Δηλ. και το R^2 αλλά και το β_1 είναι διάφορα του μηδενός.

(β) Επειδή $d = 0,937 < d_L = 1,20$ υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση

(γ) Μια από τις μεθόδους απάλειψης της αυτοσυσχέτισης γιατί το ρ δεν είναι γνωστό.

ΑΣΚΗΣΗ 21η

Δίνεται το υπόδειγμα $Y_t = \beta X_t + v_t$ για το οποίο ισχύουν όλες οι κλασσικές υποθέσεις. Ναδειχθεί ότι ο εκτιμητής του β από δύο ζεύγη παρατηρήσεων (Y_1, X_1) και (Y_2, X_2) $\hat{\beta} = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1^2 + X_2^2}$ είναι

αμερόληπτος και έχει διακύμανση $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{X_1^2 + X_2^2}$

ΛΥΣΗ

$$\hat{\beta} = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2}{X_1^2 + X_2^2} = \frac{X_1 (\beta X_1 + v_1) + X_2 (\beta X_2 + v_2)}{X_1^2 + X_2^2} = \frac{\beta X_1^2 + v_1 X_1 + \beta X_2^2 + v_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2} =$$

$$= \frac{\beta X_1^2 + \beta X_2^2 + v_1 X_1 + v_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2} = \frac{\beta (X_1^2 + X_2^2)}{X_1^2 + X_2^2} + \frac{v_1 X_1 + v_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2} = \beta + \frac{v_1 X_1 + v_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2}$$

$$E \hat{\beta} = E \left(\beta + \frac{v_1 X_1 + v_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) = \beta + \frac{X_1 E v_1 + X_2 E v_2}{X_1^2 + X_2^2} = \beta + \frac{X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot 0}{X_1^2 + X_2^2} = \beta \text{ αμερόληπτη}$$

$$V(\hat{\beta}) = V \left(\beta + \frac{X_1 v_1 + X_2 v_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) = V(\beta) + V \left(\frac{X_1 v_1 + X_2 v_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) =$$

$$= 0 + \frac{X_1^2 V(v_1) + X_2^2 V(v_2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{X_1^2 \sigma^2 + X_2^2 \sigma^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{\sigma^2 (X_1^2 + X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{\sigma^2}{X_1^2 + X_2^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22η

Για το διμεταβλητό κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα να αποδείξετε ότι οι δύο παρακάτω σχέσεις του εκτιμητή $\hat{\beta}_1$ είναι ισοδύναμες:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma XY - \left(\frac{\Sigma X}{T}\right) \Sigma Y}{\Sigma X^2 - \left(\frac{\Sigma X}{T}\right) \Sigma X}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{\Sigma (X - \bar{X}) (Y - \bar{Y})}{\Sigma (X - \bar{X})^2} = \frac{\Sigma (X - \bar{X}) Y - \bar{Y} \Sigma (X - \bar{X})}{\Sigma (X - \bar{X})^2} = \\ &= \frac{\Sigma (X - \bar{X}) Y - \bar{Y} \cdot \Sigma (X - \bar{X})}{\Sigma (X - \bar{X}) X} = \frac{\Sigma (X - \bar{X}) Y}{\Sigma (X - \bar{X}) X} - \frac{\bar{Y} \Sigma (X - \bar{X})}{\Sigma (X - \bar{X}) \cdot X} = \\ &= \frac{\Sigma XY - \bar{X} \Sigma Y}{\Sigma X^2 - \bar{X} \Sigma X} = \frac{\Sigma XY - \left(\frac{\Sigma X}{T}\right) \Sigma Y}{\Sigma X^2 - \left(\frac{\Sigma X}{T}\right) \cdot \Sigma X} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 23η

Δείξτε ότι στο διμεταβλητό υπόδειγμα: α) η στατιστική $t = \frac{b}{S_b}$

και $t = \frac{r \sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ είναι ισοδύναμες

β) Τα τετράγωνα των παραπάνω στατιστικών και η στατιστική

$F = \frac{R^2 / N}{(1 - R^2) / (T - N - 1)}$ είναι επίσης ισοδύναμα.

ΛΥΣΗ

$$(α) \quad b = r \cdot \frac{s_Y}{s_X} \quad \text{από το } r = b \cdot \frac{s_X}{s_Y}$$

$$s_b = \frac{s}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}} = \frac{s}{\sqrt{(T - 1) s_X^2}} = \frac{s}{s_X \sqrt{T - 1}}$$

$$\text{λόγω του ότι } s_X^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{T - 1} \Rightarrow \sum (X - \bar{X})^2 = (T - 1) s_X^2$$

Αλλά στο διμεταβλητό το r^2 είναι ισοδύναμο με το R^2 άρα

$$r^2 = 1 - \frac{(T - 2) s^2}{(T - 1) s_Y^2} \Rightarrow s^2 = (1 - r^2) \frac{T - 1}{T - 2} s_Y^2 \quad \text{οπότε}$$

$$s_b = \frac{s}{s_X \sqrt{T-1}} = \frac{\sqrt{1 - r^2} \frac{\sqrt{T - 1}}{\sqrt{T - 2}} s_Y}{s_X \sqrt{T - 1}} = \frac{\sqrt{1 - r^2} s_Y}{\sqrt{T - 2} s_X}$$

$$\text{οπότε } t = \frac{b}{s_b} = \frac{r \frac{s_Y}{s_X}}{\frac{\sqrt{1 - r^2} s_Y}{\sqrt{T - 2} s_X}} = \frac{r \sqrt{T - 2}}{\sqrt{1 - r^2}}$$

$$(β) \quad t^2 = \frac{b^2}{s_b^2} = \frac{r^2 (T - 2)}{1 - r^2}$$

$$F = \frac{\frac{R^2}{N}}{\frac{1 - R^2}{T - N - 1}} = \frac{R^2}{1 - R^2} = \frac{R^2 \cdot (T - 2)}{1 - R^2}$$

όμως $r^2 = R^2$ στο διμεταβλητό

ΑΣΚΗΣΗ 24η

Να αποδειχθεί ότι στο διμεταβλητό υπόδειγμα το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης είναι ίσο με το συντελεστή προσδιορισμού δηλ. $r^2 = R^2$

ΛΥΣΗ

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma y^2}} \Rightarrow r^2 = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2} \Rightarrow r^2 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = b \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \Rightarrow r^2 = R^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 25η

Για ένα ορισμένο αριθμό νοικοκυριών πήραμε παρατηρήσεις για την κατανάλωση (C), το εισόδημα (Y), το φύλο του αρχηγού της οικογενείας (S), την ηλικία (A) και τη μόρφωση (E) του αρχηγού της οικογενείας. Για την ηλικία διακρίνουμε 3 κατηγορίες: μικρότερη από 25, από 25-50, μεγαλύτερη από 50. Για τη μόρφωση επίσης διακρίνουμε 3 επίπεδα: λιγότερη από μέση εκπαίδευση, μεγαλύτερη ή ίση με τη μέση εκπαίδευση αλλά μικρότερη από ανώτατη και μεγαλύτερη ή ίση με ανώτατη εκπαίδευση.

Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω παράγοντες επηρεάζουν μόνο τη θέση της συνάρτησης κατανάλωσης, να εκφραστεί το υπόδειγμα και να ερμηνευτούν οι συντελεστές.

ΛΥΣΗ

Διατυπώνουμε το υπόδειγμα έτσι ώστε σα βάση σύγκρισης ως προς το φύλο να έχουμε τη γυναίκα, ως προς την ηλικία να έχουμε από 25-50 και ως προς τη μόρφωση να έχουμε το δεύτερο επίπεδο δηλ. μεγαλύτερη ή ίση με τη μέση εκπαίδευση αλλά μικρότερη από την ανώτατη. Το υπόδειγμα λοιπόν θα είναι:

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + \alpha_1 S_1 + \gamma_1 A_1 + \gamma_3 A_3 + \delta_1 E_1 + \delta_3 E_3 + u_t$$

- όπου $S_1 = 1$ αν ο αρχηγός της οικογενείας είναι άνδρας και 0 αν είναι γυναίκα
 όπου $A_1 = 1$ αν ο αρχηγός της οικογενείας είναι κάτω των 25 ετών, και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση
 όπου $A_3 = 1$ αν ο αρχηγός της οικογενείας είναι πάνω από 50 ετών και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση
 όπου $E_1 = 1$ αν ο αρχηγός έχει εκπαίδευση μικρότερη από τη μέση και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση
 όπου $E_3 = 1$ αν ο αρχηγός έχει εκπαίδευση μεγαλύτερη ή ίση της ανώτατης και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση

Ερμηνεία συντελεστών

Το β_0 παριστάνει την αυτόνομη κατανάλωση και το β_1 την οριακή ροπή για κατανάλωση.

Οι συντελεστές των ψευδομεταβλητών έχουν την εξής σημασία:

Ο συντελεστής α_1 παριστάνει τη διαφορά στην αυτόνομη κατανάλωση ενός νοικοκυριού με αρχηγό άντρα και ενός νοικοκυριού με αρχηγό γυναίκα της ίδιας ηλικίας και μόρφωσης.

Ο συντελεστής γ_1 παριστάνει τη διαφορά του β_0 ενός νοικοκυριού με αρχηγό ηλικίας κάτω των 25 και ενός νοικοκυριού με αρχηγό ηλικίας 25-50.

Ανάλογη είναι και η ερμηνεία των υπολοίπων συντελεστών.

Το δ_1 παριστάνει τη διαφορά του β_0 με αρχηγό εκπαίδευσης μικρότερης από μέση και μεγαλύτερης ή ίσης με την ανώτατη.

Σημείωση

Αν είχαμε χρησιμοποιήσει από μια ψευδομεταβλητή για κάθε ομάδα του δεδομένου χαρακτηριστικού δηλ. 2 ψευδομεταβλητές για το φύλο, 3 για την ηλικία και 3 για το επίπεδο μόρφωσης τότε το υπόδειγμα δε θα μπορούσε να εκτιμηθεί γιατί υπάρχει ακριβής γραμμική σχέση ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές δηλ. τέλεια πολυσυγγραμμικότητα.

Πραγματικά η <<μεταβλητή>> x_0 που αντιστοιχεί στο σταθερό όρο και παίρνει πάντα την τιμή 1 μπορεί να εκφραστεί σαν ακριβής γραμμική συνάρτηση μιας ομάδας ψευδομεταβλητών π.χ. $x_0 = 1 = s_1 + s_2$. Δεν είναι λοιπόν τυχαίο ότι παραλείπουμε πάντα κάποιο χαρακτηριστικό στη χρησιμοποίηση των ψευδομεταβλητών.

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε όλα τα χαρακτηριστικά θα έπρεπε να παραλείψουμε το σταθερό όρο.

ΑΣΚΗΣΗ 26η

Να δειχθεί ότι $R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \Sigma xy}{\Sigma y^2}$

ΛΥΣΗ

$$R^2 = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \Sigma y^2} = \frac{\Sigma xy \cdot \Sigma xy}{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = \hat{\beta}_1 \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 27η

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta_s \cdot \sum_{0}^{s=\infty} X_{t-s} + k_t$. Να μετατραπεί

στην γεωμετρική του μορφή.

Τι είναι πολυσυγγραμμικότητα; Δώστε ένα παράδειγμα και εξηλείψτε την.

ΛΥΣΗ

Η λύση με το υπόδειγμα Koyck από τις παραδόσεις

ΑΣΚΗΣΗ 28η

Δείξτε ότι στο διμεταβλητό κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα ο συντελεστής παλινδρόμησης μεταξύ y και $\hat{y}$ (δηλαδή $\hat{y} = \gamma + \delta y$) είναι ο R^2 .

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση σε αποκλίσεις από τους μέσους γράφεται: $\hat{y} = \delta y$

$$\delta = \frac{\sum y \cdot \hat{y}}{\sum y^2} = \frac{\sum y (\hat{\beta} x)}{\sum y^2} = \frac{\hat{\beta} \sum xy}{\sum y^2} = R^2 \quad \text{γιατί} \quad \hat{y} = \hat{\beta} x$$

ΑΣΚΗΣΗ 29η

Έστω τα υποδείγματα:

$$Y_t = \alpha + bX_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\text{και} \quad X_t = \alpha' + b'Y_t + \varepsilon'_t \quad (2)$$

Δείξτε ότι $R^2 = bb'$

ΛΥΣΗ

Όπως είναι γνωστό $R^2 = \frac{b \sum x_t y_t}{\sum y_t^2}$ αλλά από τη (2) έχουμε:

$$b' = \frac{\sum y_t x_t}{\sum y_t^2}$$

οπότε $R^2 = b \cdot b'$ ή αλλιώς

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}, \quad b' = \frac{\sum xy}{\sum y^2}, \quad bb' = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \cdot \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \cdot \sum y^2} = R^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 30η

Αν τις εξισώσεις (1) και (2) της προηγούμενης άσκησης είναι
 $b = \frac{1}{b'}$, δείξτε ότι $R^2 = 1$

ΛΥΣΗ

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \quad b' = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

$$b = \frac{1}{b'} \Rightarrow \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{1}{\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}} \Rightarrow \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \cdot \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2} = 1 \Rightarrow R^2 = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 31η

Δείξτε ότι $\bar{Y} = \widehat{\bar{Y}}$ στο διμεταβλητό υπόδειγμα

ΛΥΣΗ

Από την α' κανονική εξίσωση έχουμε $\Sigma (Y_t - \hat{Y}_t) = 0$

$$\text{Άρα } \Sigma Y_t - \Sigma \hat{Y}_t = 0 \Rightarrow \Sigma Y_t = \Sigma \hat{Y}_t \Rightarrow \frac{\Sigma Y_t}{T} = \frac{\Sigma \hat{Y}_t}{T} \Rightarrow \bar{Y} = \widehat{\bar{Y}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32η

Να εκτιμηθεί το υπόδειγμα

$$(1) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + e$$

$$(2) \quad E(e) = 0$$

$$(3) \quad E(e^2) = \mu^2 x_1^2 x_2$$

$$(4) \quad E(e_i e_j) = 0$$

ΛΥΣΗ

Υπόδειγμα με ετεροσκεδαστικότητα. Άρα:

$$\frac{y}{x_1\sqrt{x_2}} = \alpha \frac{1}{x_1\sqrt{x_2}} + \alpha_1 \frac{x_1}{x_1\sqrt{x_2}} + \alpha_2 \frac{\sqrt{x_2}}{x_1\sqrt{x_2}} + e \frac{1}{x_1\sqrt{x_2}}$$

Στο υπόδειγμα αυτό ισχύουν οι γνωστές υποθέσεις, άρα μπορεί να εκτιμηθεί. Γιατί:

$$\alpha) \quad E \left(\frac{e}{x_1\sqrt{x_2}} \right) = \frac{1}{x_1\sqrt{x_2}} E(e) = 0$$

$$\beta) \quad E \left(\frac{e_i^2}{x_1^2 x_2} \right) = \frac{1}{x_1^2 x_2} E(e^2) = \frac{1}{x_1^2 x_2} \mu^2 x_1^2 x_2 = \mu^2$$

$$\gamma) \quad E(e_i e_j) = \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} E(e_i e_j) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 33η

Να εκτιμηθεί το υπόδειγμα

$$Y_t = \alpha + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s X_{t-s} = s + u_t$$

ΛΥΣΗ

Υποθέτω ότι $s \rightarrow \infty$ και $\sum \beta_s < \infty$ τότε

$$Y_t = \alpha + \beta (W_0 X_t + W_1 X_{t-1} + W_2 X_{t-2} + \dots) + u_t$$

όπου $\beta_s = \beta w_s$ για $S = 0, 1, 2, \dots$, $w_s \geq 0$, $w_0, w_1, w_2, \dots$ συντελεστές στάθμισης.

Η μακροχρόνια συνολική επίδραση θα είναι η $\beta \sum_{s=0}^{\infty} w_s$ (συνολικός πολλαπλασιαστής όταν η X_t μεταβάλλεται κατά μία μονάδα).

Ακόμα είναι πιθανό να έχουμε σα χαρακτηριστικό του υποδείγματος αυτού τη μέση υστέρηση όπου:

$$\text{μέση υστέρηση} = \sum_{s=0}^{\infty} s\beta_s / \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s$$

Για τους συντελεστές στάθμισης πιθανό να έχουμε μια γεωμετρική μορφή υστέρησης (φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος). Στην περίπτωση αυτή η μορφή του υποδείγματος γίνεται

$$w_s = \lambda^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\beta_s = \lambda^s \beta \text{ και συνεπώς}$$

$$Y_t = \alpha + \beta(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \dots) + u_t$$

$$\text{ή} \quad Y_t = \alpha + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_{t-s} + u_t \quad (\text{Υπόδειγμα Koyck})$$

Για την εκτίμηση του υποδείγματος αυτού χρησιμοποιώ το μετασχηματισμό Koyck που είναι:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \lambda\beta X_{t-1} + \lambda^2\beta X_{t-2} + \lambda^3\beta X_{t-3} + \dots + \lambda u_{t-1}$$

(υστερώ κατά μια περίοδο και πολλαπλασιάζω επί λ)

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha - \lambda\alpha + \beta X_t + u_t - \lambda u_{t-1}$$

(αφαιρώ την τελευταία από την πρώτη)
άρα

$$Y_t = \alpha^* + \beta X_t + \lambda Y_{t-1} + u_t^*$$

$$\text{όπου } \alpha^* = \alpha(1-\lambda), \quad u_t^* = u_t - \lambda u_{t-1}$$

Σημείωση

Στο υπόδειγμα Koyck μπορώ να υποθέσω ότι η x_t (τρέχουσα τιμή) ασκεί τη μεγαλύτερη επίδραση οπότε μπορώ να αφήσω τους πρώτους συντελεστές να προσδιορισθούν ελεύθερα και στη συνέχεια να θεωρήσω την υπόθεση Koyck π.χ.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta(X_{t-2} + \lambda X_{t-3} + \lambda^2 x_{t-4} + \lambda^3 x_{t-5} + \dots) + u_t$$

$$\text{ή } Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_{t-s-2} + u_t$$

μετά το μετασχηματισμό έχω

$$Y_t = \alpha^* + \beta_0 X_t + \beta_1^* X_{t-1} + \beta_2^* X_{t-2} + \lambda Y_{t-1} + u_t^*$$

$$\text{όπου } \alpha^* = (1-\lambda) \alpha, \quad \beta_1^* = (\beta_1 - \lambda \beta_0)$$

$$\beta_2^* = (\beta - \lambda \beta_1), \quad u_t^* = u_t - \lambda u_{t-1}$$

Τέλος ο μετασχηματισμός του Koyck μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περισσότερες από μια ερμηνευτικές μεταβλητές

$$Y_t = \alpha + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s X_{t-s} + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s Z_{t-s} + u_t$$

$$\text{όπου } \beta_s = \beta \lambda^s \text{ και } \gamma_s = \gamma \lambda^s$$

μετά το μετασχηματισμό έχω

$$Y_t = (1 - \lambda)\alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + \lambda Y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

ΑΣΚΗΣΗ 34η

Στο υπόδειγμα του Koyck η μέση υστέρηση είναι $\lambda/1-\lambda$

ΛΥΣΗ

$$\text{Μέση υστέρηση} = \sum_{s=0}^{\infty} s\beta_s / \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s = \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s\beta / \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s\beta = \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s / \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s$$

Ο όρος $\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s$ είναι το άθροισμα των όρων φθίνουσας γεωμετρικής

κής προόδου με λόγο λ και συνεπώς $\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s = \frac{1}{1-\lambda}$

$$\text{Ο όρος } \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = 0\lambda^0 + \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + \dots = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 + \dots$$

πολλαπλασιάζω επί λ και έχω

$$\lambda \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = \lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 + 4\lambda^5 + \dots \quad \text{και}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s - \lambda \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = \lambda + (2\lambda^2 - \lambda^2) + (3\lambda^3 - 2\lambda^3) + (4\lambda^4 - 3\lambda^4) + \dots \quad \text{ή}$$

$$(1-\lambda) \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{Άρα } (1-\lambda) \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \text{οπότε } \sum_{s=0}^{\infty} s\lambda^s = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} / \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

ΑΣΚΗΣΗ 35η

Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ του δείκτη αυτοσυσχέτισης των Durbin-Watson και του συντελεστή συσχέτισης ρ .

ΛΥΣΗ

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{e}_t - \hat{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t + \sum_{t=2}^n \hat{e}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} \approx 2 \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2} \right)$$

Επειδή τα αθροίσματα $\sum \hat{e}_t^2$ και $\sum \hat{e}_{t-1}^2$ διαφέρουν κατά ένα μόνο όρο μπορούμε να δεχτούμε ότι είναι περίπου ίσα στην περίπτωση μεγάλου δείγματος

Άρα $d \approx 2(1 - \hat{\rho})$

όπου $\rho = \frac{\sum \hat{e}_t \hat{e}_{t-1}}{\sum \hat{e}_t^2}$ (συντελεστής συσχέτισης πρώτης τάξης)

Συνεπώς εύκολα προκύπτει ότι

Όταν $\hat{\rho} = 1 \Leftrightarrow d = 0$

Όταν $\hat{\rho} = 0 \Leftrightarrow d = 2$

Όταν $\hat{\rho} = -1 \Leftrightarrow d = 4$

Σε περίπτωση μεγάλου δείγματος έχουμε ακόμα

$$\hat{\rho} \approx 1 - \frac{d}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 36η

Να εκτιμηθεί το υπόδειγμα

$$(1) \quad y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + \dots + b_j x_{ij} + \dots + b_k x_{ik} + e_i$$

$$(2) \quad E(e_i) = 0$$

$$(3) \quad E(e_i^2) = \sigma_i^2 = k^2 x_{ij}^2 \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \quad E(e_i e_j) = 0$$

ΛΥΣΗ

Το υπόδειγμα (λόγω ετεροσκεδαστικότητας, σχέση (3)) γίνεται

$$\frac{y_i}{x_{ij}} = b_0 \frac{1}{x_{ij}} + b_1 \frac{x_{i1}}{x_{ij}} + \dots + b_j + \dots + b_k \frac{x_{ik}}{x_{ij}} + \frac{e_i}{x_{ij}}$$

και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δίνει αμερόληπτους εκτιμητές γιατί

$$\alpha) \quad E\left(\frac{e_i}{x_{ij}}\right) = 0$$

$$\beta) \quad E\left(\frac{e_i^2}{x_{ij}^2}\right) = \frac{k^2 x_{ij}^2}{x_{ij}^2} = k^2 = \sigma^2 \quad \text{σταθερή}$$

$$\gamma) \quad E\left(\frac{e_i e_k}{x_{ij} x_{kj}}\right) = 0 \quad \text{γιατί} \quad \frac{E(e_i e_k)}{(x_{ij} x_{kj})} = \frac{0}{x_{ij} x_{kj}} = 0 \quad (i \neq k)$$

ΑΣΚΗΣΗ 37η

Έστω το σύστημα

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + u_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

όπου C_t = κατανάλωση, Y_t = εισόδημα, I_t = επένδυση

G_t = δημόσιες δαπάνες

Πως θα εκτιμήσουμε το παραπάνω υπόδειγμα;

ΛΥΣΗ

Ενδογενείς μεταβλητές : C_t , Y_t , I_t

Προκαθορισμένες μεταβλητές : C_{t-1} , Y_{t-1} , G_t

Για να εκτιμήσουμε το παραπάνω υπόδειγμα θα πρέπει να εξετάσουμε αν οι διαρθρωτικές εξισώσεις ταυτοποιούνται.

Γράφουμε το υπόδειγμα στην τυπική του μορφή

$$C_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_t - \alpha_2 C_{t-1} + 0I_t + 0Y_{t-1} + 0G_t = u_{1t}$$

$$0C_t - \beta_0 - \beta_1 Y_t + 0C_{t-1} + I_t - \beta_2 Y_{t-1} + 0G_t = u_{2t}$$

$$-C_t - 0 + Y_t + 0C_{t-1} - I_t + 0Y_{t-1} - G_t = 0$$

Κανόνες τάξης 1η εξίσωση

$$K^{**} = 2 \quad (Y_{t-1}, G_t), \quad G^* = 2 \quad K^{**} > G^* - 1$$

Κανόνας βαθμού

$$\Gamma(\Delta) = G - 1$$

$$2 = 3 - 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\beta_2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 - \beta_2 \neq 0$$

Άρα η 1η εξίσωση υπερταυτοποιείται.

Κανόνας τάξης 2η εξίσωση

$$K^{**} = 2 \quad (C_{t-1}, G_t) \quad G^* = 2 \quad K^{**} > G^* - 1$$

Άρα η 2η εξίσωση υπερταυτοποιείται.

Λόγω υπερταυτοποίησης η μέθοδος εκτίμησης του παραπάνω συστήματος είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια.

ΑΣΚΗΣΗ 38η

Τι μετράει η διακύμανση περί την καμπύλη παλινδρόμησης (s^2) και τι ο συντελεστής προσδιορισμού (R^2) ; Σε τι πλεονεκτεί ο R^2 του s^2 ;

ΛΥΣΗ

Το s^2 μετρά τη διασπορά των τιμών Y_t (εκ παρατηρήσεων) γύρω από την καμπύλη παλινδρόμησης. Το R^2 μετρά το % της μεταβλητικότητας της Y (εξαρτημένης) που οφείλεται στην επίδραση όλων μαζί των ερμηνευτικών μεταβλητών. Ο R^2 πλεονεκτεί τους s^2 γιατί: α) αξιολογείται ευκολότερα η τιμή του γιατί παίρνει τιμές μεταξύ $[0,1]$ ενώ το $s^2 = [0, \infty]$. β) δεν επηρεάζεται από την αλλαγή των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών σε αντίθεση με το s^2 . γ) Είναι καθαρός αριθμός ανεξάρτητος των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών.

ΑΣΚΗΣΗ 39η

Η συνάρτηση ζήτησης (Y) ενός αγαθού Α εξαρτάται από την τιμή του (X_1) και την τιμή (X_2) του υποκατάστατου αγαθού. Από ένα δείγμα για τα έτη 1970 έως και 1989 υπολογίσθηκαν:

$$\Sigma x_1 y = - 1900 \quad \Sigma x_2 y = 1300 \quad \Sigma x_1 x_2 = - 1000$$

$$\Sigma x_1^2 = 2000 \quad \Sigma x_2^2 = 6000 \quad x_1 = 40 \quad x_2 = 89 \quad x = 160$$

$$\Sigma y^2 = 2100$$

Όπου x_1 , y , x_2 σε αποκλίσεις από τους μέσους.

Ζητείται:

1. Να υπολογισθεί η εξίσωση παλινδρόμησης μεταξύ Y και x_1 , μεταξύ Y και x_1 , x_2 .
2. Ποιά εξίσωση θα προτιμήσετε σαν καλύτερη; Γιατί; Οι μεταβλητές x_1 , x_2 είναι ασυσχέτιστες;
3. Να γίνει ο στατιστικός έλεγχος του υποδείγματος ($t_{17} = 2,11$, $F_{2, 17} = 10,66$, $\alpha = 5\%$)
4. Αν στο χρόνο t , $X_1 = 415$, $X_2 = 90$ συμφέρει να αυξήσουμε την τιμή του αγαθού 10%;

ΛΥΣΗ

$$b_1 = \frac{\Sigma x_1 y}{\Sigma x_1^2} = \frac{- 1900}{2000} = - 0,95$$

$$a = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 = 160 + 0,95 \cdot 40 = 1198$$

$$R^2 = \frac{b_1 \Sigma x_1 y}{\Sigma y^2} = \frac{(- 0,95) (- 1900)}{2100} = 0,86$$

$$(1) \quad \hat{Y}_t = 1198 - 0,95X_t, \quad R^2 = 0,86 \quad \bar{R}^2 = 0,85$$

γιατί $\bar{R}^2 = R^2 - (1 - R^2) \frac{N}{T - N - 1} = 0,85$

Στο τριμεταβλητό έχουμε:

$$b_1 = \frac{\Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_2^2 - \Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \frac{(-1900) \cdot 6000 - 1300 \cdot (-1000)}{2000 \cdot 6000 - (1000)^2} = -0,92$$

$$b_2 = \frac{\Sigma x_2 y \cdot \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 y \cdot \Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma x_2^2 - (\Sigma x_1 x_2)^2} = \frac{1300 \cdot 2000 - (-1900)(-1000)}{11000.000} = 0,064$$

$$a = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 = 160 + 0,92 \cdot 40 - 0,64 \cdot 80 = 145,6$$

άρα

$$\hat{Y}_e = 145,6 - 0,92X_1 + 0,064X_2$$

$$(2) \quad R^2 = \frac{b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y}{\Sigma y^2} = \frac{1831,2}{2100} = 0,872$$

$$\bar{R}^2 = R^2 - (1 - R^2) \frac{N}{T - N - 1} = 0,872 - (1 - 0,872) \frac{2}{20 - 3} = 0,857$$

Συγκρίνοντας τους διορθωμένους συντελεστές θα προτιμήσουμε τη δεύτερη εξίσωση που έχει μεγαλύτερο R^2 .

Οι μεταβλητές x_1 & x_2 συσχετίζονται γιατί ο συντελεστής παλινδρόμησης της x_1 στο διμεταβλητό (- 0,95) είναι διάφορος του συντελεστή παλινδρόμησης της x_1 στο τριμεταβλητό (- 0,92). Αν ήταν ασυσχέτιστα οι δύο συντελεστές θα ήταν ίσοι. (Βλέπε θεωρία <<Σχέσεις Μεταξύ Συντελεστών Παλινδρόμησης>).

Υπολογίζω τα απαραίτητα στοιχεία για τους ελέγχους.

$$(3) \quad s^2 = (1 - R^2) \frac{T - 1}{T - N - 1} = 0,135$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{11.000.000} \cdot 0,135 = 7,36 \cdot 10^{-5}$$

$$s_{b_2}^2 = \frac{\Sigma x_1^2}{11000.000} \cdot 0,135 = 2,45 \cdot 10^{-5}$$

άρα $s_{b_1} = 0,0086$ $s_{b_2} = 0,005$

α) Έλεγχος του b_1

$$\begin{array}{l} H_0 : b_1 = 0 \\ H_1 : b_1 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{|b_1|}{s_{b_1}} = \frac{|-0,92|}{0,0086} = 106,9$$

$t = 106,9 > 2,11$ (τιμή πινάκων) απορρίπτουμε την H_0 , δεκτή η H_1

β) Έλεγχος του b_2 .

$$\begin{array}{l} H_0 : b_2 = 0 \\ H_1 : b_2 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{|b_2|}{s_{b_2}} = \frac{0,064}{0,005} = 12,8$$

$t = 12,8 > 2,11$ (τιμή πινάκων) απορρίπτουμε την H_0 , δεκτή η H_1 .

Άρα και οι δύο συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί.

γ) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$
 $H_1 : \text{τουλάχιστο ένα } \beta \neq 0$

$$F = \frac{R^2 / N}{(1 - R^2) / (T - N - 1)} = \frac{0,872/2}{0,128/17} = 57,0 > 10,66$$

απορρίπτουμε την H_0 , δεκτή η H_1 .

$$4. \hat{Y}_t = 145,6 - 0,92 \cdot 45 + 0,064 \cdot 90 = 110$$

Θα βρούμε την ελαστικότητα ως προς X_1 .

$$|E_{xy}| = b_1 \frac{X_1}{\bar{Y}} = \left| -0,92 \frac{45}{110} \right| = | -0,376 | < 1$$

ανελαστική η ζήτηση ως προς την τιμή.

Μια 10% αύξηση τιμής σημαίνει μείωση ζήτησης $0,1 \cdot 0,376 = 3,76\%$ άρα συμφέρει γιατί η % μείωση της ζήτησης είναι μικρότερη από την % αύξηση της τιμής.

ΑΣΚΗΣΗ 40η

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$

Από ένα δείγμα με 40 παρατηρήσεις υπολογίσθηκε η παλινδρόμηση $\hat{Y}_t = 1,78 + 1,44X_t$, $R^2 = 0,64$

α) Να γίνει έλεγχος σημαντικότητας του συντελεστή β_1 αν δίνονται:

$$\Sigma x^2 = 25, \quad \Sigma y^2 = 81, \quad \Sigma xy = 36, \quad X = 0,5$$

x, y , σε αποκλίσεις από τους μέσους.

β) Να γίνει έλεγχος του συντελεστή συσχέτισης r .

ΛΥΣΗ

α) Υπολογίζω το s^2 από τη σχέση

$$R^2 = 1 - \frac{(T - N - 1) s^2}{\Sigma y^2} \Rightarrow 0,64 = 1 - \frac{38 \cdot s^2}{81}$$

$$\Rightarrow s^2 = 0,36 \cdot \frac{81}{38} = 0,767 \Rightarrow s = 0,876$$

$$s_{b1} = \frac{s}{\sqrt{\Sigma x^2}} = \frac{0,876}{5} = 0,1752$$

Υποθέσεις: $H_0 : b_1 = 0$
 $H_1 : b_1 \neq 0$

$$t = \frac{|b_1|}{s_{b_1}} = \frac{1,44}{0,1752} = 8,22 > t_{38,5\%} = 2$$

απορρίπτουμε την H_0 , δεκτή η H_1 . Άρα υπάρχει γραμμική παλινδρόμηση στον πληθυσμό.

β) $H_0 : \rho = 0$ έναντι της $H_1 : \rho \neq 0$

$$t = \frac{r \sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,8 \sqrt{38}}{\sqrt{1-0,64}} = 8,22 > 2$$

απορρίπτω την H_0 , άρα υπάρχει γραμμική συσχέτιση στον πληθυσμό.

ΑΣΚΗΣΗ 41η

Δείξατε ότι στο υπόδειγμα $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t$ για το οποίο ισχύουν όλες οι κλασικές υποθέσεις ισχύει η σχέση:

$$\sum Y_t X_t = \sum \hat{Y}_t X_t$$

ΛΥΣΗ

Από τη β' κανονική εξίσωση έχουμε

$$\sum (Y_t - \hat{Y}_t) X_t = 0 \Rightarrow \sum X_t Y_t - \sum X_t \hat{Y}_t = 0 \Rightarrow \sum X_t Y_t = \sum X_t \hat{Y}_t$$

ΑΣΚΗΣΗ 42η

Έστω το υπόδειγμα $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ για το οποίο ισχύουν οι κλασικές υποθέσεις. Να υπολογίσετε:

α) την $E(Y_t / X_t)$ και την $V(Y_t / X_t)$.

$$\beta) \text{ την } v(b), \text{ αν } b = \frac{\sum (X_t - \bar{X}) (Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

ΛΥΣΗ

$$E(Y_t / X_t) = E(\alpha + \beta X_t + \varepsilon_t) / X_t = \alpha + \beta X_t + E(\varepsilon_t / X_t) = \alpha + \beta X_t + E\varepsilon_t = \alpha + \beta X_t$$

γιατί $E\varepsilon_t = 0$

$$V(Y_t / X_t) = v(\alpha + \beta X_t + \varepsilon_t) / X_t = V(\alpha / X_t) + v(\beta X_t / \sum X_t) + v(\varepsilon_t / X_t) =$$

$$= 0 + 0 + v(\varepsilon_t / X_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

γιατί α, β, x_t σταθερά.

$$b = \sum (x_t - \bar{X}) (Y_t - \bar{Y}) / \sum (X_t - \bar{X})^2 = - \frac{\sum (X_t - \bar{X}) Y_t - \bar{Y} \sum (X_t - \bar{X})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} =$$

$$= \sum (X_t - \bar{X}) Y_t / \sum (X_t - \bar{X})^2, \text{ γιατί } \sum (X_t - \bar{X}) = 0$$

$$V(b) = V\left(\frac{\sum (X_t - \bar{X}) Y_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sum (X_t - \bar{X})^2}{[\sum (X_t - \bar{X})^2]^2} V(Y_t) = \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 43η

Στο κλασικό γραμμικό υπόδειγμα προκύπτει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων το διάνυσμα στήλη των συντελεστών

$b = (x'x)^{-1} x'y$. Δείξτε ότι το b είναι αμερόληπτη εκτίμηση του διανύσματος στήλη β του πληθυσμού και $V(b) = \sigma^2 (x'x)^{-1}$

ΛΥΣΗ

$$\Omega\varsigma \text{ γνωστό } y = x\beta + \varepsilon$$

$$b = (x'x)^{-1} x' (x\beta + \varepsilon) = (x'x)^{-1} x'x\beta + (x'x)^{-1} x'\varepsilon = \beta + (x'x)^{-1} x'\varepsilon$$

$$Eb = \beta + (x'x)^{-1} x' E\varepsilon = \beta$$

γιατί $E\varepsilon = 0$ και x σταθερό σε επαναλαμβανόμενα δείγματα.

$$V(b) = E (b - Eb) (b - Eb)' = E [\beta + (x'x)^{-1} x'\varepsilon - \beta] [\beta + (x'x)^{-1} x'\varepsilon - \beta]' =$$

$$= E [(x'x)^{-1} x'\varepsilon] [(x'x)^{-1} x'\varepsilon]' = E [(x'x)^{-1} x'\varepsilon \varepsilon' x (x'x)^{-1}] =$$

$$(x'x)^{-1} x' E(\varepsilon\varepsilon') x (x'x)^{-1} = \sigma^2 (x'x)^{-1} x'x(x'x)^{-1} = \sigma^2 (x'x)^{-1}$$

$$\text{γιατί } E\varepsilon\varepsilon' = \sigma^2 \cdot I \text{ και } (x'x)^{-1} (x'x) = I$$

ΑΣΚΗΣΗ 44η

Από ένα δείγμα 10 παρατηρήσεων οι τιμές της ερμηνευτικής μεταβλητής και οι αντίστοιχες τιμές των καταλοίπων που προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων είχαμε τις παρακάτω τιμές:

x_t :	1	2	5	4	4	3	6	8	11	13
$\hat{u}_t$:	-0,46	0,5	0,06	-1,49	-1,49	0,2	0,1	0,3	0,55	0,9

Υπάρχει ή όχι ετεροσκεδαστικότητα στο υπόδειγμα;

$$(t_{8,0,05} = 2,306)$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε τον έλεγχο του Spearman

Τάξη του X_t	Τάξη του a_t	$d_i = \text{τάξη } X_t - \hat{a}_t$	d_i^2
1	5	-4	16
2	6	-4	16
6	1	5	25
4,5	9,5	5	25
4,5	9,5	-5	25
3	3	0	0
7	2	5	25
8	4	4	16
9	7	2	4
10	8	2	4
			156

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 156}{10(100 - 1)} = 0,054$$

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

$$t = \frac{r \sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r^2}} = \frac{0,054 \sqrt{8}}{\sqrt{1 - 0,054^2}} = 0,153$$

$$t = 0,153 < t_{8,0,05} = 2,306$$

δεκτή η H_0 , δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα

ΑΣΚΗΣΗ 45η

Να αποδειχθεί ότι ο εκτιμητής b της συνάρτησης $Y = \alpha + \beta X + u$ είναι αμερόληπτος ακόμα και αν τα u αυτοσυσχετίζονται.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum x (\beta x + u)}{\sum x^2} = \frac{\beta \sum x^2 + \sum xu}{\sum x^2} = \frac{\beta \sum x^2}{\sum x^2} + \frac{\beta \sum xu}{\sum x^2} = \beta + \frac{\sum xu}{\sum x^2}$$

Παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή και έχουμε

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + \frac{E(\sum xu)}{\sum x^2}$$

και

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{\sum x E u}{\sum x^2} \quad \text{αλλά } E(u) = 0$$

επομένως

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{\sum x \cdot 0}{\sum x^2} = \beta$$

Άρα ο $\hat{\beta}$ είναι αμερόληπτος

ΑΣΚΗΣΗ 46η

Δίνονται τα υποδείγματα

$$Y = b_0 + b_1 X + u$$

$$X = \alpha_0 + \alpha_1 Y + v$$

αν $r^2 = 1$ να αποδειχθεί ότι $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}_1}$

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε } \hat{b}_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \text{ και } \hat{a}_1 = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

$$\text{Επίσης } r^2 = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \sum y^2} = 1$$

$$\text{Επομένως } \hat{b}_1 \hat{a}_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \sum y^2} = 1$$

$$\text{άρα } \hat{b}_1 \hat{a}_1 = 1 \text{ και } \hat{b}_1 = \frac{1}{\hat{a}_1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 47η

Έστω X το ύψος της κατανάλωσης της οικονομίας με μέσο μ και διακύμανση σ^2 . Για την εκτίμηση της μέσης κατανάλωσης πήραμε δείγμα η και έστω $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\eta$ η κατανάλωση κάθε παρατήρησης του δείγματος. Για την πιο πάνω εκτίμηση προτάθηκαν οι ακόλουθοι τρεις εκτιμητές:

α) $\bar{X}$ ο μέσος αριθμητικός των τιμών του δείγματος.

β) X_M η διάμεσος της κατανομής των τιμών του δείγματος.

$$\gamma) X^* = \frac{1}{\eta + 1} \sum_{i=1}^{\eta} X_i$$

Να αξιολογηθούν οι τρεις εκτιμητές και να επιλεγεί ο καλύτερος.

ΛΥΣΗ

$$X_i \approx N(\mu, \sigma^2) \quad \forall i \quad (1)$$

$$(i) \quad \underline{\text{Αμεροληψία}} \quad (\alpha) \quad E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{\eta} \sum X_i\right) = \frac{1}{\eta} \sum E(X_i) = \mu$$

$$(\beta) \quad E(X_M) = \mu \text{ λόγω της (1)}$$

$$(\gamma) \quad E(X^*) = E\left(\frac{1}{\eta+1} \sum X_i\right) = \frac{1}{\eta+1} \sum E(X_i) = \frac{\eta}{\eta+1} \mu$$

Άρα οι (α) και (β) αμερόληπτοι ενώ ο (γ) ασυμπτωτικά αμερόληπτος $\lim_{\eta \rightarrow \infty} E(X^*) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right) \mu = \mu$

(ii) Αποτελεσματικότητα (α)

$$\text{var}(\bar{X}) = \text{var}\left(\frac{1}{\eta} \sum X_i\right) = \text{var}\left(\frac{1}{\eta} X_1 + \frac{1}{\eta} X_2 + \dots + \frac{1}{\eta} X_\eta\right) = \frac{1}{\eta^2} [\text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \dots + \text{var}(X_\eta)] = \frac{1}{\eta^2} [\sum \text{var}(X_i)] = \frac{1}{\eta^2} \eta \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\eta}$$

$$(\beta) \quad \text{var}(X_M) = \sigma^2 \text{ λόγω της (1)}$$

Άρα η διακύμανση του $\bar{X}$ εξαρτάται από το η ενώ του X_M είναι ανεξάρτητη του η $\text{var}(\bar{X}) < \text{var}(X_M)$

(iii) Συνέπεια Η ιδιότητα αναφέρεται στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος μεταβάλλεται. Συνεπώς εξετάζω μόνο τα $\bar{X}$ και X^* . Σε αμερόληπτους εκτιμητές για έλεγχο της συνέπειας αρκεί η εξέταση της συμπεριφοράς της διακύμανσης όσο το $\eta \rightarrow \infty$. Έτσι

$$(\alpha) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(\bar{X}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mu = \mu \quad \text{και} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{X}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\eta} = 0$$

άρα $\bar{X}$ συνεπής εκτιμητής του μ .

$$(\gamma) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(X^*) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\eta}{\eta+1}\right) \mu = \mu$$

και

$$\text{MSE}(x^8) = \text{var}(x^*) + (\text{μικροληπτικό σφάλμα})^2 = (\text{MSE μέσο σφάλμα τετραγ.})$$

$$= \text{var}\left(\frac{1}{\eta+1} \sum X_i\right) + \left[\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right) \mu - \mu\right]^2 = \frac{1}{(\eta+1)^2} \sum \text{var}(X_i) + \left(-\frac{1}{\eta+1}\right)^2 \mu^2 = \frac{\eta \sigma^2 + \mu^2}{(\eta+1)^2}$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{MSE}(X^*) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta \sigma^2 + \mu^2}{(\eta+1)^2} = 0$$

άρα X^* συνεπώς εκτιμητής του μ (MSE μέσο σφάλμα τετραγώνου)

(iv) Ασυμπτωτική Αποτελεσματικότητα

(α) $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ όσο αυξάνει το n τόσο μειώνεται η $\text{var}(X)$ άρα X ασυμπτωτικά αποτελεσματική.

$$(\gamma) \quad \text{var}(X^*) = \text{var}\left(\frac{1}{n+1} \sum X_i\right) = \frac{n}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{\sigma^2}{n}$$

όταν το n αυξάνει το $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ άρα η $\text{var}(X^*) \rightarrow \frac{\sigma^2}{n}$ που σημαίνει ότι όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο οι δύο εκτιμητές έχουν την ίδια διακύμανση.

Καλύτερος εκτιμητής λοιπόν ο $\bar{X}$ γιατί είναι αμερόληπτος και συγκριτικά αποτελεσματικός ανεξάρτητα του n .

Η διάμεσος αν και αμερόληπτος δεν είναι αποτελεσματικός εκτιμητής.

ΑΣΚΗΣΗ 48η

Το X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 . Από τυχαίο δείγμα μεγέθους n υπολογίστηκε ο ακόλουθος εκτιμητής του μέσου του πληθυσμού μ .

$$\hat{\mu} = \bar{X} + \frac{\alpha}{n} \quad \text{όπου } \alpha \text{ σταθερά}$$

- Να υπολογισθεί ο ασυμπτωτικός μέσος και η ασυμπτωτική διακύμανση του $\hat{\mu}$.
- Να εξεταστεί αν ο $\hat{\mu}$ είναι συνεπής και ασυμπτωτικά αποτελεσματικός.

ΛΥΣΗ

$$x_i \approx N(\mu, \sigma^2) \quad \forall i \tag{1}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} + \frac{\alpha}{n}$$

$$(\alpha) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(\hat{\mu}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} E\left[\bar{X} + \frac{\alpha}{\eta}\right] = \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(\bar{X}) + \lim_{\eta \rightarrow \infty} E\left(\frac{\alpha}{\eta}\right) = \mu + 0 = \mu$$

και

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\mu}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\bar{X} + \frac{\alpha}{\eta}\right) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X}) + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{Var}\frac{\alpha}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\eta}$$

(β) Πρέπει να είναι αμερόληπτος. Άρα

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\bar{X} + \frac{\alpha}{\eta}\right) = E(\bar{X}) + E\left(\frac{\alpha}{\eta}\right) = \mu + \frac{\alpha}{\eta} \quad \text{όχι}$$

Είναι συνεπής καθότι $\lim_{\eta \rightarrow \infty} E(\hat{\mu}) = \mu$ και

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\mu}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{\eta} = 0$$

Ασυμπτωτικά αποτελεσματικός γιατί $\text{var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{\eta}$ όσο αυξάνει το η τόσο μειώνεται η $\text{var}(\hat{\mu})$.

ΑΣΚΗΣΗ 49η

Έστω το γραμμικό υπόδειγμα

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

όπου το ε_i έχει όλες τις γνωστές ιδιότητες. Να εξετασθεί το αποτέλεσμα που θα έχουν στους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των α και β οι μετασχηματισμοί

$$Y_i^* = \alpha_1 + \alpha_2 Y_i$$

$$X_i^* = \beta_1 + \beta_2 Y_i$$

ΛΥΣΗ

Γνωστού ότι

$b = \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$ αν αντικαταστήσουμε τα X και Y με τα αντίστοιχα X^* και Y^* έχω

$$b^* = \frac{\sum (X^* - \bar{X}^*) Y^*}{\sum (X^* - \bar{X}^*)^2} = \frac{\sum (\beta_1 + \beta_2 X - \beta_1 - \beta_2 \bar{X}) (\alpha_1 + \alpha_2 Y)}{\sum (\beta_1 + \beta_2 X + \beta_1 - \beta_2 \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\alpha_2 \beta_2 \sum (X - \bar{X}) Y}{\beta_2^2 \sum (X - \bar{X})^2} + \frac{\alpha_1 \beta_2 \sum (X - \bar{X})}{\beta_2^2 \sum (X - \bar{X})^2} = \frac{\alpha_2 \sum (X - \bar{X}) Y}{\beta_2 \sum (X - \bar{X})^2} = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) b$$

και $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ με αντικατάσταση έχω

$$a^* = \bar{Y}^* - b^* \bar{X}^* = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{Y} - \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) b (\beta_1 + \beta_2 \bar{X}) = \left[\alpha_1 - \beta_1 \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) b \right] + \alpha_2 \bar{Y} - \alpha_2 b \bar{X}$$

$$= [\alpha_1 - (\beta_1 \alpha_2 / \beta_2) b] - \alpha_2 (\bar{Y} - b\bar{X}) = [\alpha_1 - (\beta_1 \alpha_2 / \beta_2) b] - \alpha_2 a$$

Άρα με την αλλαγή των μονάδων μέτρησης των Y και X θα μεταβληθούν οι συντελεστές α και β .

ΑΣΚΗΣΗ 50η

Από ένα δείγμα 15 ετήσιων παρατηρήσεων για τη ζητούμενη ποσότητα (Y) ενός αγαθού, την τιμή του (X_1), το εισόδημα των καταναλωτών (X_2) και την τιμή του υποκατάστατου αυτού του αγαθού (X_3) εκτιμήθηκε η ακόλουθη συνάρτηση

$$\hat{Y} = 79,1 - 4,93X_1 + 0,016X_2 + 0,175X_3 \quad R^2 = 0,95$$

$$(1,61) \quad (0,0074) \quad (0,64)$$

Οι αριθμοί στις παρενθέσεις είναι τα τυπικά σφάλματα των συντελεστών.

α) Είναι σωστά εξειδικευμένη η συνάρτηση; Είναι τα αποτελέσματα της εκτίμησης σύμφωνα με την οικονομική θεωρία;

β) Να γίνει ο στατιστικός έλεγχος του υποδείγματος, αν για $\alpha = 5\%$, $t_{11} = 1,8$ και $F_{3,11} = 3,6$

ΛΥΣΗ

α) Είναι σωστά εξειδικευμένη γιατί οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται (ερμηνευτικές) πράγματι επιδρούν σημαντικά στη διαμόρφωση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Σύμφωνα με την οικονομική θεωρία η ζήτηση ενός αγαθού εξαρτάται (είναι συνάρτηση) της τιμής του, του ύψους του εισοδήματος των καταναλωτών και της τιμής υποκατάστατων προϊόντων.

Εξετάζοντας τους συντελεστές των μεταβλητών παρατηρούμε ότι, ο συντελεστής της X_1 έχει σωστό πρόσημο γιατί αυξανόμενης της τιμής μειώνεται η ζήτηση, επίσης τα πρόσημα των συντελεστών των X_2 , X_3 συμφωνούν με την οικονομική θεωρία όπως και ο περιορισμός ότι ο συντελεστής του εισοδήματος $b_2 = 0,016$ παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 σύμφωνα με την οικονομική θεωρία.

β) Ελέγχουμε τις υποθέσεις:

$$\begin{aligned} & H_0 : \beta_1 = 0 \\ & H_0 : \beta_1 \neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{|b_1|}{S_{b_1}} = \frac{4,93}{1,61} = 3,062 > 1,8$$

απορρίπτουμε τη τιμή του b_1 στατιστικά σημαντική.

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{l} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_0 : \beta_2 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{|b_2|}{S_{b_2}} = \frac{0,016}{0,074} = 0,216 < 1,8$$

b_2 στατιστικά ασήμαντη

$$\text{iii)} \quad \begin{array}{l} H_0 : \beta_3 = 0 \\ H_1 : \beta_3 \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{|b_3|}{S_{b_3}} = \frac{0,175}{0,64} = 0,273 < 1,8$$

δεκτή η H_0 . Η τιμή του b_3 στατιστικά ασήμαντη.

$$\text{iiii)} \quad \begin{array}{l} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \text{τουλάχιστο ένα } \beta \neq 0 \end{array}$$

$$F = \frac{R^2 / N}{(1 - R^2) / (T - N - 1)} = \frac{0,95 / 3}{0,05 / 11} = 63,4$$

$$F = 63,4 > F_{3,11} = 3,6$$

απορρίπτουμε την H_0 γίνεται δεκτή η H_1 .

Σημείωση

Η αποδοχή των υποθέσεων ότι $\beta_2 = 0$ και $\beta_3 = 0$ αν και η X_2 και X_3 θεωρούνται σημαντικές μεταβλητές από οικονομικής άποψης πρέπει να οφείλεται στην ύπαρξη έντονης πολυσυγγραμικότητας με τις γνωστές συνέπειες υποεκτίμησης της στατιστικής

$t = \frac{b}{S_b}$ λόγω υπερεκτίμησης του S_b .

ΑΣΚΗΣΗ 51η

α) Να εξηγήσετε με λίγα λόγια τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

β) Σε ποιες περιπτώσεις και γιατί είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι ο διαταρακτικός όρος ακολουθεί την κανονική κατανομή.

γ) Στο απλό γραμμικό υπόδειγμα ποια είναι η σημασία της υπόθεσης ότι $\sum (X - \bar{X})^2 / T$ είναι αριθμός πεπερασμένος και διαφορετικός (μεγαλύτερος) από το μηδέν;

ΛΥΣΗ

α) Θεωρία

β) Είναι απαραίτητη για τον στατιστικό έλεγχο του υποδείγματος γιατί αν $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma^2)$ τότε και τα b ακολουθώντας κανονική κατανομή σαν γραμμικός συνδυασμός του ε_t , πράγμα που μας δίνει την δυνατότητα για στατιστικό έλεγχο των b .

Επίσης η υπόθεση είναι απαραίτητη στην περίπτωση που σαν μέθοδος εκτίμησης του υποδείγματος χρησιμοποιείται η μέθοδος μεγίστης πιθανότητας της οποίας προϋπόθεση για την εφαρμογή αποτελεί η γνώση της συνάρτησης πιθανότητας του πληθυσμού.

γ) Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη γιατί άλλως δεν έχει λύση το σύστημα των κανονικών εξισώσεων και είναι αδύνατη η εκτίμηση του υποδείγματος. Αυτό είναι φανερό και από τον τύπο

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

όπου το $\sum (X - \bar{X})^2$ θα πρέπει να είναι πεπερασμένο και $\neq 0$, για να υπάρχει το b .

ΑΣΚΗΣΗ 52η

Έστω το γραμμικό υπόδειγμα

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$\text{όπου } E(\varepsilon_i) = 0 \text{ και } E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_\varepsilon^2 & i = j \end{cases}$$

Να εξετασθεί τι θα συμβεί στους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των α και β όταν:

- α) Οι μονάδες των Y και X διαιρεθούν με το 20
- β) Οι μονάδες του X διαιρεθούν με το 100
- γ) Το Y πολλαπλασιάζεται επί 10 το δε X επί 100.

ΛΥΣΗ

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$(\alpha) \quad b = \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

αν αντικαταστήσω τα X και Y με τα αντίστοιχα $x/20$ και $Y/20$ έχω

$$b^* = \frac{\sum (X/20 - \bar{X}/20) Y/20}{\sum (X/20 - \bar{X}/20)^2} = \frac{1/400 \sum (X - \bar{X}) Y}{1/400 \sum (X - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2} = b$$

και $a^* = \bar{Y} - b\bar{X}$ με αντικατάσταση έχω

$$a^* = \bar{Y}/20 - b\bar{X}/20 = 1/20 (\bar{Y} - b\bar{X})$$

Άρα το a διαιρείται με 20 το β παραμένει

$$(\beta) \quad b = \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

με αντικατάσταση έχω

$$b^* = \frac{\sum (X/100 - \bar{X}/100) Y}{\sum (X/100 - \bar{X}/100)^2} = \frac{1/100 \sum (X - \bar{X}) Y}{1/10000 \sum (X - \bar{X})^2} = \frac{10.000}{100} \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

και

$$a^* = \bar{Y} - b^* \bar{X}/100 = \bar{Y} - \frac{100 \sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2} \frac{\bar{X}}{100} = \bar{Y} - b\bar{X} = a$$

Άρα το β πολλαπλασιάζεται επί 100 το a παραμένει

$$(\gamma) \quad b = \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

με αντικατάσταση

$$b^* = \frac{\sum (100X - 100\bar{X}) 10Y}{\sum (100X - 100\bar{X})^2} = \frac{1000 \sum (X - \bar{X}) Y}{10.000 \sum (X - \bar{X})^2} = \frac{1}{10} \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

και $a^* = \bar{Y} - b\bar{X}$ με αντικατάσταση

$$a^* = \bar{Y} - b^* \bar{X} = 10\bar{Y} - \frac{1}{10} \frac{\sum (X - \bar{X}) Y}{\sum (X - \bar{X})^2} 100\bar{X} = 10 (\bar{Y} - b\bar{X})$$

Άρα το β διαιρείται με 10 και το a πολλαπλασιάζεται επί 10.

ΑΣΚΗΣΗ 53η

Έστω το υπόδειγμα:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

Από ένα δείγμα 23 παρατηρήσεων, υπολογίστηκαν τα ακόλουθα:

$$(x'x) = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} \quad (x'y) = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix}$$

όπου x και y παριστάνουν αποκλίσεις από τους μέσους.

α) Να υπολογιστούν οι συντελεστές $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$

β) Για το παραπάνω υπόδειγμα είναι σωστό ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τη συμβολή στη μεταβλητικότητα της Y κάθε ερμηνευτικής μεταβλητής χωριστά; Γιατί;

ΛΥΣΗ

Ως γνωστό $\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y$

$$(x'x)^{-1} = \frac{\text{adj } (x'x)}{|x'x|} = \frac{\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}}{800} = \begin{bmatrix} 0,005 & 0 \\ 0 & 0,025 \end{bmatrix}$$

Έτσι:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (x'x)^{-1} x'y = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,0025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

άρα

$$\hat{\beta}_1 = 0,75 \text{ και } \hat{\beta}_2 = 0,625$$

β) Για να υπολογισθεί η συμβολή στη μεταβλητικότητα της Y κάθε ερμηνευτικής μεταβλητής χωριστά δηλαδή για να ισχύει σχέση

$$R_{y.12}^2 = R_{y1}^2 + R_{y2}^2,$$

πρέπει τα X_1 , X_2 να είναι ασυσχέτιστα (ορθογώνια) μεταβλητά.

Τα X_1 , X_2 είναι πράγματι ασυσχέτιστα όπως φαίνεται από τη

μήτρα $x'x$, στην οποία δίνονται μηδέν τα μη διαγώνια στοιχεία,
 άρα

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \Sigma x_1, x_2 / (T - 1) = 0$$

γιατί $\Sigma x_1, x_2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 54η

Εάν $Y = X\beta + v$

όπου $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

να βρεθεί ο $\hat{\beta}$.

ΛΥΣΗ

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$x'x = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 26 \\ 26 & 20 \end{bmatrix}$$

$$x'y = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{26}{4} \\ -\frac{26}{4} & \frac{34}{4} \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{26}{4} \\ -\frac{26}{4} & \frac{34}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{226}{4} \\ -\frac{292}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,5 \\ -73 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 55η

Να σχολιασθούν οι προτάσεις:

- α) Ο $\hat{\beta}$ είναι αποτελεσματικός εκτιμητής του β .
β) Η συνδιακύμανση δύο ερμηνευτικών μεταβλητών είναι διάφορη από το 0.

ΛΥΣΗ

- α) Ο $\hat{\beta}$ είναι: i) αμερόληπτος εκτιμητής του β .
ii) έχει την ελάχιστη διακύμανση δηλαδή $\text{Var}(\hat{\beta}) = \text{ελάχιστο}$ (δεν υπάρχει άλλος εκτιμητής με μικρότερη διακύμανση)
β) Υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα στο υπόδειγμα.

ΑΣΚΗΣΗ 56η

Τι είναι αληθές υπόδειγμα και τι σφάλμα εξειδίκευσης.

ΛΥΣΗ

Αληθές είναι το σωστά εξειδικευμένο υπόδειγμα.

Σφάλμα εξειδίκευσης έχουμε όταν παραλείπουμε μια ή περισσότερες σημαντικές ερμηνευτικές μεταβλητές σ' ένα υπόδειγμα.

ΑΣΚΗΣΗ 57η

Τι είναι πολυσυγγραμμικότητα. Δώσατε ένα παράδειγμα και προτείνετε τρόπο εξάλειψής της.

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία για πολυσυγγραμμικότητα

Παράδειγμα: $Y_t = \alpha + b_1^* X_{1t} + b_2 X_{2t} + e_t$

όπου b_1^* = γνωστό από άλλη εξίσωση.

έτσι $Y_t - b_1^* X_{1t} = \alpha + b_2 X_{2t} + e_t$ (1)

ή $Y_t^* = \alpha + b_2 X_{2t} + e_t$ (2)

$$\text{όπου } Y_t^* = Y_t - b_1^* X_{1t}$$

Στην (2) έχει εξαλειφθεί η πολυσυγγραμμικότητα γιατί το υπόδειγμα έγινε διμεταβλητό.

ΑΣΚΗΣΗ 58η

Τι είναι ψευδομεταβλητές και τι θα συμβεί αν μεταβληθεί ο σταθερός όρος, η κλίση της ευθείας ή και τα δύο μαζί;

ΛΥΣΗ

Ορισμός ψευδομεταβλητών από θεωρία.

Αν μεταβληθεί ο σταθερός όρος τότε έχουμε παράλληλη μετατόπιση της ευθείας της συνάρτησης.

Αν μεταβληθεί η κλίση της ευθείας αλλάζει τιμή ο συντελεστής παλινδρόμησης.

Αν μεταβληθούν και τα δύο τότε έχουμε παράλληλη μετατόπιση της ευθείας και αλλαγή του συντελεστή παλινδρόμησης.

ΑΣΚΗΣΗ 59η

Έστω η συνάρτηση ζήτησης

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 D_t + u_t$$

όπου D_t ψευδομεταβλητή που παίρνει την τιμή 0 σε περίοδο ειρήνης και 1 σε περίοδο πολέμου.

Να εξετασθεί κατά πόσο η D_t επηρεάζει την ευθεία παλινδρόμησης.

ΛΥΣΗ

Ελέγχοντας την υπόθεση

$$H_0 : \alpha_2 = 0$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0$$

με τον τύπο $t = \frac{|a_2|}{S_{a_2}}$ και εφόσον απορρίψουμε την H_0 , τότε η

εξίσωση διαφοροποιείται μεταξύ των 2 περιόδων με επηρεασμό του σταθερού όρου που γίνεται $(a_0 + a_2)$ για $D_t = 1$. Αν δεχτούμε την H_0 τότε δεν υπάρχει διαφοροποίηση του σταθερού όρου και επομένως απορρίπτεται η χρήση της D_t .

ΑΣΚΗΣΗ 60η

Έστω το υπόδειγμα παραγωγής του Cobb-Douglas

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdot u$$

όπου Y = παραγωγή της βιομηχανίας A

X_1 = η εργασία,

X_2 = το κεφάλαιο

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων εκτιμήθηκε η παλινδρόμηση στο δείγμα: $\hat{Y} = 0,0006x^3 \cdot x_2^{0,5}$

$$\text{Επίσης } \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0,2 \quad S_{\hat{\beta}_1} = 0,7 \quad S_{\hat{\beta}_2} = 0,2$$

$$(\alpha = 5\% \quad t_{80} = 1,96)$$

α) Ισχύει η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων;

β) Ποιά είναι η μέση και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας στο σημείο $\bar{Y} = 40$ και $\bar{X}_1 = 170$

ΛΥΣΗ

α) Ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \quad \text{έναντι της} \quad H_1 : \beta_1 + \beta_2 > 1$$

$$E(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \beta_1 + \beta_2 \quad \text{και} \quad Y(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = v(\hat{\beta}_1) + v(\hat{\beta}_2) + 2 \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0,7 + 0,2 + 2(-0,2) = 0,9 - 0,4 = 0,5$$

$$t = \frac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) - (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{S_{\hat{\beta}_1}^2 + S_{\hat{\beta}_2}^2 - 2 \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}} = \frac{3 + 0,5 - 1}{\sqrt{0,5}} = 3,53$$

$$t = 3,53 > t_{80} = 1,96$$

άρα απορρίπτουμε την H_0 . Άρα δεν έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακος αλλά αύξουσες αφού δεχόμαστε την H_1 .

β) Η μέση παραγωγικότητα της εργασίας είναι $M.P. = \frac{Y}{X_1}$ και η οριακή είναι

$$O.P. = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = 3 \cdot \frac{Y}{X_1} \cdot 1.$$

Άρα στο σημείο $\bar{Y} = 40$ & $\bar{X}_1 = 170$ έχουμε:

$$M.P. = \frac{40}{170} = 0,235$$

και

$$O.P. = 3 \cdot \frac{40}{170} = 0,705$$

ΑΣΚΗΣΗ 61η

Έστω η παρακάτω συνάρτηση ζήτησης υγρών καυσίμων

$$D_t = \alpha + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t$$

όπου D_t = ζήτημα υγρών καυσίμων

P_t = δείκτης τιμών καυσίμων

Y_t = εισόδημα

α) Ποιά τα αναμενόμενα πρόσημα των συντελεστών;

β) Να διατυπωθεί η συνάρτηση ξανά αν υποτεθεί ότι αλλάζει θέση και γίνεται λιγότερο ελαστική και ως προς την τιμή και ως προς το εισόδημα όταν υπάρχει συγκράτηση τιμών και μισθών.

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής β_1 πρέπει να είναι αρνητικός ενώ ο β_2 θετικός και μεταξύ (0, 1).

β) το υπόδειγμα γίνεται:

$$D_t = \alpha + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \gamma d_t + \delta_1 (d_t P_t) + \delta_2 (d_t \cdot Y_t) + \varepsilon_t$$

δηλ. εισάγουμε την ψευδομεταβλητή d_t όπου

$d_t = 1$ όταν υπάρχει συγκράτηση τιμών-μισθών

$d_t = 0$ όπου δεν υπάρχει συγκράτηση τιμών-μισθών

Άρα το υπόδειγμα για περιόδους μη συγκράτησης τιμών-μισθού γίνεται

$$D_t = \alpha + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t$$

Ενώ για περιόδους συγκράτησης μισθών-τιμών

$$D_t = (\alpha + \gamma) + (\beta_1 + \delta_1) P_t + (\beta_2 + \delta_2) Y_t + \varepsilon_t$$

Για να είναι λιγότερο ελαστική η ζήτηση πρέπει

$$|\beta_1 + \delta_1| < |\beta_1| \quad \& \quad |\beta_2 + \delta_2| < |\beta_2|$$

ΑΣΚΗΣΗ 62η

Έστω η συνάρτηση $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2^2 + \varepsilon$. Μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, αν

$$X_1 = \frac{3}{4} X_2;$$

ΛΥΣΗ

Η γραμμική σχέση $X_1 = \frac{3}{4} X_2$ δεν εμποδίζει την εκτίμηση του υποδείγματος γιατί οι ερμηνευτικές μεταβλητές του υποδείγματος είναι οι X_1 και X_2^2 και όχι οι X_1 και X_2 ώστε να υπάρχει πρόβλημα τέλειας πολυσυγγραμμικότητας. Θα υπήρχε πρόβλημα αν ίσχυε η σχέση $X_1 = \frac{3}{4} X_2^2$

ΑΣΚΗΣΗ 63η

Έστω το υπόδειγμα

$$Y_t = \beta_1 X_t + u_t$$

και

$$V(u_t) = \sigma^2 \cdot X_t$$

Να δείξετε ότι ο εκτιμητής του β_1 είναι άριστος και ίσος με $\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$. Για το u_t ισχύουν όλες οι άλλες κλασικές υποθέσεις.

ΛΥΣΗ

$$Y_t = \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

διαιρούμε και τα δύο μέλη της (1) με $\sqrt{X_t}$, οπότε έχουμε:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{X_t}} = \beta_1 \frac{X_t}{\sqrt{X_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{X_t}} \Rightarrow Y_t^* = \beta_1 X_t^* + u_t^* \quad (2)$$

$$\text{όπου} \quad Y_t^* = \frac{Y_t}{\sqrt{X_t}}, \quad x_t^* = \frac{x_t}{\sqrt{X_t}}, \quad u_t^* = \frac{u_t}{\sqrt{X_t}}$$

στο (2) εξαλείφθηκε η ετεροσκεδαστικότητα γιατί

$$V(u_t^*) = V\left(\frac{u_t}{\sqrt{X_t}}\right) = \frac{1}{X_t} \sigma^2 \cdot X_t = \sigma^2$$

Στη (2) εφαρμόζω την απλή μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και ο εκτιμητής του β_1 είναι άριστος αφού στη (2) ισχύουν όλες οι κλασικές υποθέσεις.

$$\frac{\partial \sum (Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_t^*)^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2 \sum (Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_t^*) x_t^* \Rightarrow -2 \sum (Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_t^*) X_t^* = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum Y_t^* X_t^* - \hat{\beta}_1 \sum X_t^{*2} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \sum X_t^* \cdot Y_t^* / \sum X_t^{*2} \quad (3)$$

$$\text{Στην (3) βάζω όπου } X_t^* = X_t / \sqrt{X_t}, \quad Y_t^* = \frac{Y_t}{\sqrt{X_t}}$$

και έχω:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum \left(\frac{X_t}{\sqrt{X_t}} \right) \left(\frac{Y_t}{\sqrt{X_t}} \right)}{\sum \left(\frac{X_t}{\sqrt{X_t}} \right)^2} = \frac{\sum Y_t / \sqrt{X_t}}{\sum \sqrt{X_t}} = \frac{\sum Y_t / T}{\sum \sqrt{X_t} / T} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 64η

Δίνεται το υπόδειγμα:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 X_{t-1} + u_{1t}$$

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_{2t}$$

$$Y_t = X_t + Z_t + W_t$$

Πώς θα εκτιμήσετε το παραπάνω υπόδειγμα;

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχή θα εξετάσουμε αν οι διαρθρωτικές εξισώσεις του υποδείγματος ταυτοποιούνται.

Το υπόδειγμα περιλαμβάνει 3 ενδογενείς μεταβλητές (X_t , Z_t , Y_t) και 3 προκαθορισμένες (W_t , X_{t-1} , Y_{t-1}). Σε κάθε διαρθρωτική εξίσωση ισχύει ο κανών τάξεως αφού

$$K^{**} = 2 > G^* - 1 = 1$$

επομένως αν ισχύει ο κανών βαθμού και οι δύο συναρτήσεις θα είναι υπερταυτοποιημένες.

Όπου K^{**} = ο αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στη συγκεκριμένη εξίσωση και

G^* = ο αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στη συγκεκριμένη εξίσωση.

Για την πρώτη συνάρτηση η μήτρα Δ είναι

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ο βαθμός της είναι $r(\Delta) = 2$ γιατί $\begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\beta_2 \neq 0$

άρα $r(\Delta) = 2 = G - 1 = 3 - 1 = 2$

Ο κανών βαθμού ισχύει, άρα η πρώτη συνάρτηση υπερταυτοποιείται

Στη δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$r(\Delta) = 2$ γιατί

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha_2 \neq 0$$

$r(\Delta) = 2 = G - 1 = 2$ άρα ο κανών βαθμού ικανοποιείται και η εξίσωση υπερταυτοποιείται.

Επειδή οι εξισώσεις υπερταυτοποιούνται η κατάλληλη μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζουμε την OLS στην εξίσωση ανηγμένης μορφής κάθε ενδόγενους μεταβλητής που περιλαμβάνεται στο δεξιό μέρος της υπερταυτοποιημένης διαρθρωτικής εξίσωσης. Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζεται η OLS στην υπερταυτοποιημένη διαρθρωτική εξίσωση αφού πρώτα αντικαθιστούν οι τιμές των ενδογενών μεταβλητών που για τη συγκεκριμένη εξίσωση είναι ερμηνευτικές μεταβλητές με τις αντίστοιχες υπολογισμένες τιμές από το πρώτο στάδιο.

ΑΣΚΗΣΗ 65η

Από 16 παρατηρήσεις εκτιμήθηκε η ακόλουθη παλινδρόμηση:

$$\hat{Y}_t = 1,2 + 0,04X_t$$

α) Να γίνει έλεγχος για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξεως με το κριτήριο Durbin-Watson, δεδομένου ότι:

$$\sum \hat{u}_t^2 = 8, \sum (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 18 \text{ και } d_L = 1,10, d_u = 1,37$$

β) Ποιές είναι οι αδυναμίες του κριτηρίου;

γ) Να βρείτε μία εκτίμηση του ρ . Σε τι μπορεί να σας χρησιμεύσει;

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \quad d = \sum (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 / \sum \hat{u}_t^2 = \frac{18}{8} = 2,25$$

$$d = 2,25 > d_u = 1,37$$

άρα δεν υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης.

$$(4 - d) = 1,75 > d_u = 1,37$$

άρα δεν υπάρχει ούτε αρνητική αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης.

β) i) Είναι κατάλληλο για τον έλεγχο αυτοσυσχέτισης μόνο πρώτης τάξης.

ii) Η αβέβαιη περιοχή του μεταξύ d_L και d_u

iii) Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υποδείγματα όπου σαν εξηγητική μεταβλητή εμφανίζεται η εξαρτημένη με χρονική υστέρηση.

$$\gamma) \quad d = 2(1 - \hat{\rho}) \Rightarrow 2,25 = 2(1 - \hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} = -0,125$$

δ) Το κριτήριο δεν είναι ισχυρό αν ο σταθερός όρος δεν είναι στατιστικά σημαντικός.

Το $\hat{\rho}$ μπορεί να χρησιμεύει στην εκτίμηση του υποδείγματος με την επαλοιφή της αυτοσυσχέτισης.

ΑΣΚΗΣΗ 66η

Έστω η παλινδρόμηση: $\hat{C}_t = 50 + 0,8 Y_t + 0,4 C_{t-1}$ όπου C = κατανάλωση και Y = εισόδημα.

Η παραπάνω συνάρτηση βασίστηκε στην υπόθεση ότι η τρέχουσα κατανάλωση είναι συνάρτηση του εισοδήματος όχι μόνο της τρέχουσας αλλά και των προηγούμενων περιόδων, καθώς και στην υπόθεση Κουσκ, δηλαδή $\beta_s = (1 - \lambda) \lambda^s, \beta$. Να βρείτε εκτιμήσεις για τους τέσσερις πρώτους συντελεστές του αρχικού υποδείγματος.

ΛΥΣΗ

$$C_t = \alpha + \beta_0 Y_t + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + v_t \quad (1)$$

Αν στην (1) θέσουμε $\beta_s = (1 - \lambda) \lambda^s \beta$ έχουμε:

$$C_t = \alpha + (1 - \lambda) Y_t + (1 - \lambda) \lambda \beta Y_{t-1} + (1 - \lambda) \lambda^2 \beta Y_{t-2} + \dots + v_t \quad (2)$$

Υστερούμε την (2) κατά μία χρονική περίοδο, την πολ/ζουμε επί λ και την προκύπτουσα σχέση αφαιρούμε από τη (2), οπότε έχουμε:

$$C_t - \lambda C_{t-1} = (1 - \lambda) \alpha + (1 - \lambda) \beta Y_t + v_t - \lambda v_{t-1} \quad (3)$$

ή

$$C_t = (1 - \lambda) \alpha + (1 - \lambda) \beta Y_t + \lambda C_{t-1} + v_t^* \quad (4)$$

όπου $v_t^* = v_t - \lambda v_{t-1}$

Η παλινδρόμηση που δίνεται, δηλαδή

$$C_t = 50 + 0,8 Y_t + 0,4 C_{t-1}$$

είναι η εκτίμηση του υποδείγματος (4).

Άρα

$$\hat{\lambda} = 0,4, (1 - \hat{\lambda}) \hat{\beta} = 0,8 \text{ και } (1 - \hat{\lambda}) \hat{\alpha} = 50,$$

από τις σχέσεις αυτές βγαίνει τελικά,

$\hat{\alpha} = 83,33$ και $\hat{\beta} = 1,333$, ή αντικαθιστώντας τις τιμές των $\hat{\beta}$ και $\hat{\lambda}$ στη σχέση $\hat{\beta}_s = (1 - \hat{\lambda}) \hat{\lambda}^s \hat{\beta}$ δηλαδή

$$\hat{\beta}_s = (1 - 0,4) \cdot 0,4^s - 1,333 = 0,8 \cdot 0,4^s$$

άρα

$$\alpha = 83,33$$

$$\beta_0 = 0,8$$

$$\beta_1 = 0,32$$

$$\beta_2 = 0,128$$

ΑΣΚΗΣΗ 67η

Να εκτιμηθεί το υπόδειγμα:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^*$$

X_t^* = προσδοκώμενη τιμή

$$\text{με } X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma (X_t - X_{t-1}^*), \quad 0 < \gamma \leq 1$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Η σχέση } X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma (X_t - X_{t-1}^*)$$

$$\text{γίνεται } X_t^* = \gamma X_t + (1 - \gamma) X_{t-1}^* \quad (1)$$

υστερώντας τη σχέση (1) διαδοχικά και πολ/ζοντας κάθε φορά επί $(1 - \gamma)^s$, όπου s = αριθμός αντίστοιχης υστέρησης, έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma) X_{t-1}^* &= \gamma (1 - \gamma) X_{t-1} + (1 - \gamma)^2 X_{t-2}^* \\ (1 - \gamma)^2 X_{t-2}^* &= \gamma (1 - \gamma)^2 X_{t-2} + (1 - \gamma)^3 X_{t-3}^* \\ &\dots\dots\dots \\ (1 - \gamma)^s X_{t-s}^* &= \gamma (1 - \gamma)^s X_{t-s} + (1 - \gamma)^{s+1} X_{t-s+1}^* \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση διαδοχικά της παραπάνω σχέσης στην (1) παίρνουμε:

$$X_t^* = \gamma \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \gamma)^s X_{t-s} \quad (2)$$

αντικαθιστάμε τη (2) στην $Y_t = \alpha + \beta X_t^* + v_t$, οπότε:

$$Y_t = \alpha + \beta \gamma \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \gamma)^s X_{t-s} + v_t \quad (3)$$

Είναι φανερό η ομοιότητα της (3) με το υπόδειγμα Koyck. Αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Koyck στο (3) παίρνουμε:

$$Y_t = \alpha^* + \beta^* X_t + (1 - \gamma) Y_{t-1} + v_t^* \quad (4)$$

$$\alpha^* = \alpha \gamma, \quad \beta^* = \beta \gamma, \quad v_t^* = v_t - (1 - \gamma) v_{t-1}$$

Με την εφαρμογή της OLS στην (4) οι εκτιμήσεις δεν θα είναι καν συνεπείς.

Αν το γ είναι γνωστό τότε εκτιμάμε το υπόδειγμα που προκύπτει μετά την απαλοιφή της αυτοσυσχέτισης κατά τα γνωστά. Αν όμως γ άγνωστο μπορούμε να εφαρμόσουμε μια από τις μεθόδους (βλέπε θεωρία) των Klein, της επαναληπτικής διαδικασίας, της εκτίμησης των συντελεστών σε 2 στάδια, των βοηθητικών, μεταβλητών και της εκτίμησης σε τρία στάδια.

ΑΣΚΗΣΗ 68η

Έστω η ακόλουθη παλινδρόμηση ανάμεσα στην αποταμίευση S και στο εισόδημα x για τη χώρα A για μια ορισμένη περίοδο

$$S_t = -0,120 + 0,274X_t$$

(0,240) (0,09)

$$R^2 = 0,894$$

$$d = 1,85$$

$$d_L = 1,35$$

$$d_u = 1,49$$

$$T = 30$$

Να γίνει η αξιολόγηση του υποδείγματος (Να χρησιμοποιήσετε οικονομικά, στατιστικά και οικονομετρικά κριτήρια).

ΛΥΣΗ

Οικονομικό κριτήριο

Το πρόσημο του συντελεστή του εισοδήματος είναι σωστό γιατί αυξανόμενου του εισοδήματος αυξάνονται και οι αποταμιεύσεις

Στατιστικό κριτήριο

$$\begin{array}{ll} H_0 : \alpha = 0 & t = \frac{|\alpha|}{S_\alpha} = \frac{0,120}{0,240} = 0,5 \\ H_1 : \alpha \neq 0 & \end{array}$$

Εφόσον $t = 0,5 < t_{\text{πινάκων}} = 2$ δεχόμαστε την H_0 . Η τιμή του α είναι στατιστικά ασήμαντη.

$$\begin{array}{ll} H_0 : \beta = 0 & t = \frac{|\beta|}{S_\beta} = \frac{0,274}{0,09} = 3,06 \\ H_1 : \beta \neq 0 & \end{array}$$

Εφόσον $t_{\text{δείγματος}} = 3,06 > t_{\text{πινάκων}} = 2$ απορρίπτουμε την H_0 δεκτή η H_1 .

Η τιμή του συντελεστή είναι στατιστικά σημαντική.

Οικονομετρικό κριτήριο

Κάνουμε τον έλεγχο αυτοσυσχέτισης

$d = 1,85 > d_u = 1,49 \rightarrow$ δεν υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση

$4 - d = 4 - 1,85 = 2,15 > d_u = 1,49 \rightarrow$ δεν υπάρχει ούτε αρνητική αυτοσυσχέτιση.

ΑΣΚΗΣΗ 69η

Από παρατηρήσεις 22 ετών εκτιμήθηκε η ακόλουθη παλινδρόμηση μεταξύ αποταμίευσης S και εισοδήματος X για τη χώρα Α

$$\hat{S}_t = -12,5 + 0,2X_t \quad R^2 = 0,9$$

(3,64) (0,015)

όπου οι αριθμοί στις παρενθέσεις παριστάνουν τυπικά σφάλματα.

Να γίνει η αξιολόγηση του υποδείγματος με οικονομικά, στατιστικά και οικονομετρικά κριτήρια, αν $t_{20} = 2,1$ και $F_{1,20} = 4,35$ για $\alpha = 5\%$ επίπεδο σημαντικότητας Durbin-Watson στατιστική $d = 0,915$ ($d_L = 1,24$, $d_U = 1,43$) $\sum d_i^2 = 650$ (d_i = διαφορές τάξεων μεταξύ X και $|\hat{U}_t|$).

ΛΥΣΗ

Οικονομικά

Το πρόσημο του συντελεστή του εισοδήματος είναι σωστό γιατί όταν αυξάνεται το εισόδημα αυξάνεται και η αποταμίευση

Στατιστικά

1ος έλεγχος

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha &= 0 \\ H_1 : \alpha &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{|\alpha|}{S_\alpha} = \frac{12,5}{3,64} = 3,43$$

t δείγματος = 3,43 > t πινάκων = 2,1 απορρίπτουμε την H_0 δεκτά η H_1

Η τιμή του συντελεστή είναι στατιστικά σημαντική

$$\begin{aligned} H_0 : \beta &= 0 \\ H_1 : \beta &\neq 0 \end{aligned} \quad t = \frac{|b|}{S_b} = \frac{0,2}{0,015} = 13,33$$

t δείγματος = 13,33 > t πινάκων = 2,1 απορρίπτουμε την H_0 δεκτή η H_1 .

Η τιμή του συντελεστή είναι στατιστική σημαντική.

2ος έλεγχος

$$\begin{array}{l} H_0 : R^2 = 0 \\ H_1 : R^2 \neq 0 \end{array} \quad F = \frac{R^2 / N}{(1 - R^2) (T - N - 1)} = \frac{0,9 / 1}{(1 - 0,9) / 22 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{0,9}{0,1/20} = \frac{0,9}{0,005} = 180$$

F δείγματος = 180 > F πινάκων 4,35 απορρίπτουμε την H_0 δεκτή η H_1

Η τιμή του R^2 είναι στατιστικά σημαντική.

Έλεγχος αυτοσυσχέτισης
Οικονομετρικά

$d = 0,915 < d_L = 1,24 \rightarrow$ υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση.

Έλεγχος ετεροσκεδαστικότητας

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 650}{22(22^2 - 1)} = 1 - \frac{3900}{22(484 - 1)} = 1 - \frac{390}{10626} = 1 - 0,37 = 0,63$$

$$\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{array} \quad t = \frac{r_s \sqrt{n - N - 1}}{\sqrt{1 - r_s^2}} = \frac{0,63 \sqrt{22 - 1 - 1}}{\sqrt{1 - 0,63^2}} = \frac{0,63 \cdot 4,47}{\sqrt{1 - 0,39}} = \frac{433}{0,24} = 3,66$$

t δείγματος = 3,66 > t πινάκων = 2,1

απορρίπτουμε την H_0 }
δεκτή η H_1 } υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα

ΑΣΚΗΣΗ 70η

Να εκτιμηθούν οι άριστοι συντελεστές του υποδείγματος $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$ όπου $U_t = 0,5 U_{t-1} + \varepsilon_t$ με βάση τα παρακάτω δεδομένα.

Για το ε_t ισχύουν όλες οι κλασικές υποθέσεις

Y_t	X_t	$Y_t^* = Y_t - \varrho Y_{t-1}$	$X_t^* = X_t - \varrho X_{t-1}$	X^*Y^*	$(X^*)^2$
2	1	$Y_1^* = Y_1 \cdot \sqrt{1-\varrho^2} = 1,72$	$X_1^* = X_1 \cdot \sqrt{1-\varrho^2} = 0,86$	1,47	0,73
4	3	$4 = 0,5 \cdot 2 = 3$	$3 - 0,5 \cdot 1 = 2,5$	7,5	6,25
5	4	3	2,5	7,5	6,25
8	6	5,5	4	22	16
		13,22	9,86	38,47	29,23

ΛΥΣΗ

Στο υπόδειγμα υπάρχει αυτοσυσχέτιση όπως είναι φανερό από τη σχέση $U_t = 0,5 \cdot U_{t-1} + \varepsilon_t$

Εξαλείψουμε την αυτοσυσχέτιση μετασχηματίζοντας το υπόδειγμα ως εξής.

Υστερούμε την εξίσωση

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t \quad (1)$$

κατά μια χρονική περίοδο και τη πολ/ζουμε επί ϱ και γίνεται:

$$\varrho \cdot Y_{t-1} = \beta_0 \varrho + \beta_1 \varrho X_{t-1} + \varrho U_{t-1} \quad (2)$$

Από την (1) αφαιρώ τη (2) οπότε έχω.

$$Y_t - \varrho Y_{t-1} = \beta_0 (1 - \varrho) + \beta_1 (X_t - \varrho X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t \quad (3)$$

Στην εξίσωση (3) εφαρμόζουμε την κλασική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και οι εκτιμήσεις είναι άριστες αφού έχει απαλειφθεί η αυτοσυσχέτιση.

$$\beta_1 = \frac{T \sum X^* Y^* - \sum X^* \sum Y^*}{T \sum X^2 - (\sum X^*)^2} = \frac{4 \cdot 38,47 - 9,86 \cdot 13,22}{4 \cdot 29,23 - 9,86^2} = \frac{153,88 - 130,34}{116,92 - 97,21} = \frac{23,54}{19,71} = 1,19$$

$$\beta_0^* = \bar{Y}^* - \beta_1 \bar{X}^* = \frac{\sum Y^*}{T} - \beta_1 \frac{\sum X^*}{T} = \frac{13,22}{4} - 1,19 \frac{9,86}{4} = 3 \cdot 30 - 2,93 = 0,37$$

Άρα η εξίσωση είναι:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική:

- 1) Γκαμαλέτσου, Θ.Γ., *Οικονομετρία*, Αθήναι 1972
- 2) *Εφαρμοσμένη Οικονομετρία*, Αθήνα 1973
- 3) Δρακάτου, Γ.Κ., *Μαθήματα Οικονομετρίας*, Αθήνα 1973
- 4) Δρεττάκη, Μ.Α., *Θεωρητική Οικονομετρία*, Αθήνα 1975
- 5) Κιντή, Α.Α., *Οικονομετρική θεωρία*, Αθήνα 1974
- 6) Σταυρινός, Β.Γ., *Οικονομετρία*, Αθήνα 1984
- 7) Χρήστου, Γ.Κ., *Εισαγωγή στην Οικονομετρία*, Θεσσαλονίκη 1978

Ξένη:

- 1) Chow, G.C., *Econometrics*, (New York; Mc Graw Hill Co., 1983)
- 2) Dhrymes, Ph.J., *Econometrics*, (New York: Harper Ed., 1970)