

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Χρηματοοικονομική

5^ο Εξάμηνο
Καθηγητής Χρηματοοικονομικής τμήματος
Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Νικόλαος Φίλιππας



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πολυμεταβλητή Παλινδρόμηση

6.6.3 Αυτοσυσχέτιση

- Όταν ο στοχαστικός όρος της παλινδρόμησης σε μια χρονική περίοδο σχετίζεται θετικά με τον στοχαστικό όρο της προηγούμενης χρονικής περιόδου τότε σε αυτή την περίπτωση αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της θετικής αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού (positive first order autocorrelation).
- Το πρόβλημα αυτό είναι συνηθισμένο στην ανάλυση χρονολογικών σειρών και, όπως θα δούμε στην συνέχεια, μπορεί να οδηγήσει σε υποεκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων των εκτιμητών επηρεάζοντας αρνητικά τους στατιστικούς ελέγχους και τα διαστήματα εμπιστοσύνης.
- Η ύπαρξη αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού όρου μπορεί να οφείλεται στην παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών από το υπόδειγμα (omitted variables).
- Ας εξετάσουμε την ισχύ της παραπάνω υπόθεσης με ένα παράδειγμα.
- Έστω λοιπόν ότι η μεταβλητή Y_t σχετίζεται με τις μεταβλητές X_{2t} & X_{3t} αλλά εσφαλμένα παραλείπουμε την μεταβλητή X_{3t} από το υπόδειγμά μας. Σε αυτή την περίπτωση η επίδραση της X_{3t} θα ενσωματωθεί στον στοχαστικό όρο u_t . Εάν η X_{3t} όπως συμβαίνει σε πολλές χρονοσειρές οικονομικής φύσεως εξαρτάται από παρελθούσες τιμές όπως η X_{3t-1} , η X_{3t-2} κλπ αναμένεται να δημιουργηθεί αναπόφευκτη συσχέτιση μεταξύ του τρέχοντος στοχαστικού όρου u_t και των παρελθουσών τιμών του u_{t-1} , u_{t-2} , κλπ.

- Ένας άλλος παράγοντας που μπορεί να προκαλέσει αυτοσυσχέτιση του στοχαστικού όρου είναι ο εσφαλμένος προσδιορισμός του υποδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή Y_t και η μεταβλητή X_{2t} συνδέονται με μια σχέση δευτέρου βαθμού της μορφής $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{2t}^2 + u_t$ αλλά εμείς εσφαλμένα υποθέτουμε και εκτιμούμε μια γραμμική σχέση της μορφής $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{2t} + u_t$.
- Σε αυτή την περίπτωση ο στοχαστικός όρος που προκύπτει από την εκτίμηση της ευθείας γραμμής θα εξαρτάται από την μεταβλητή X_{2t}^2 . Εάν λοιπόν η μεταβλητή X_{2t}^2 εμφανίζει αυξητική ή μειούμενη τάση διαχρονικά το ίδιο θα συμβαίνει και με τον στοχαστικό όρο υποδηλώνοντας με αυτό τον τρόπο την ύπαρξη διαχρονικής εξάρτησης.
- Τέλος ένας τρίτος παράγοντας υπεύθυνος για την εμφάνιση αυτοσυσχέτισης είναι τα συστηματικά σφάλματα μέτρησης.
- Έστω μια επιχείρηση η οποία πραγματοποιεί καταγραφή του αποθεματικού της σε εμπορεύματα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Εάν διαπράττεται συστηματικά κάποιο σφάλμα στην καταμέτρηση τότε το συνολικό αποθεματικό θα εμφανίζει συσσωρευμένα σφάλματα μέτρησης. Τα συγκεκριμένα σφάλματα θα εμφανίζονται ως μια διαδικασία με διαχρονική εξάρτηση.
- Η απλούστερη και πιο συνηθισμένη μορφή αυτοσυσχέτισης είναι η αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Έστω το παρακάτω πολυμεταβλητό μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + u_t \quad (154)$$

- όπου η τρέχουσα τιμή του στοχαστικού όρου (u_t) είναι μια συνάρτηση της αντίστοιχης τιμής του στοχαστικού όρου την προηγούμενη χρονική περίοδο (u_{t-1}) δηλαδή:

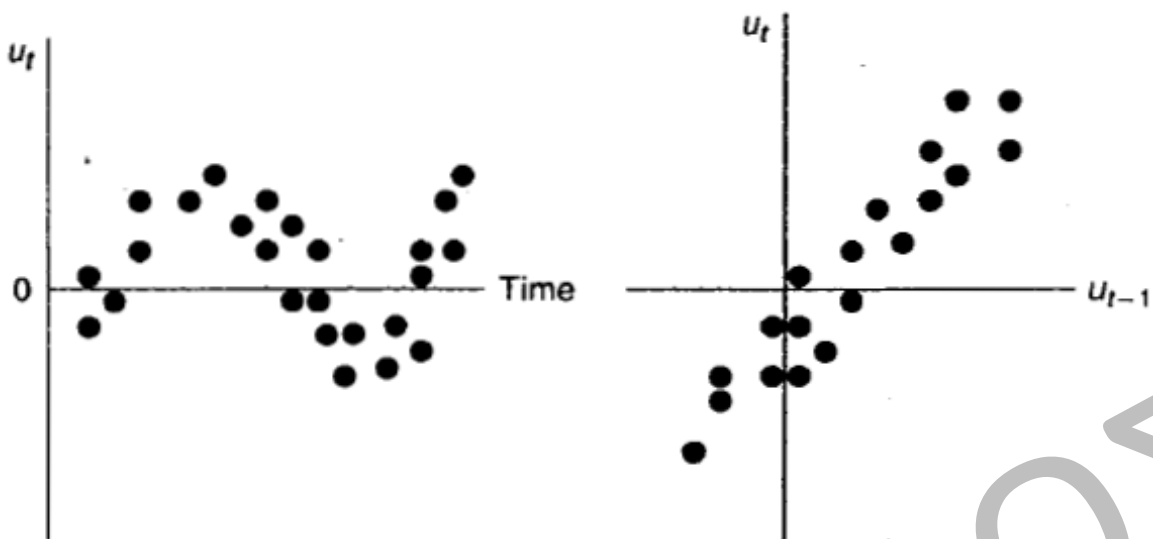
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (155)$$

- όπου ρ είναι η παράμετρος η οποία καθορίζει την συναρτησιακή σχέση μεταξύ των παρατηρήσεων του στοχαστικού όρου και ε_t είναι ένας νέος στοχαστικός όρος ο οποίος επιδεικνύει ανεξαρτησία και κατανομική ομοιογένεια (independent & identically distributed).
- Ο συντελεστής ρ ονομάζεται συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού και λαμβάνει τιμές μεταξύ του -1 και 1 προκειμένου να αποφευχθούν εκρηκτικές συμπεριφορές του φαινομένου.
- Είναι προφανές ότι το απόλυτο μέγεθος του συντελεστή ρ θα καθορίσει τον βαθμό αυτοσυσχέτισης και μπορούμε να διακρίνουμε 3 διαφορετικές περιπτώσεις:
 - Α. Εάν $\rho=0$ τότε έχουμε απουσία αυτοσυσχέτισης επειδή $u_t=\varepsilon_t$ και επομένως έχουμε έναν στοχαστικό όρο ανεξάρτητο και με την ίδια κατανομή σε όλες τις χρονικές στιγμές.

- Εάν το ρ πλησιάζει το 1 η τιμή της προγενέστερης τιμής του στοχαστικού όρου, u_{t-1} επηρεάζει ολοένα και περισσότερο την διαμόρφωση της τρέχουσας τιμής του στοχαστικού όρου u_t με αποτέλεσμα την ύπαρξη ισχυρότερης θετικής αυτοσυσχέτισης. Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρείται το ίδιο πρόσημο τόσο για την τρέχουσα τιμή του στοχαστικού όρου όσο και για την αμέσως προηγούμενη (δηλαδή ένας αρνητικός στοχαστικός όρος οδηγεί σε αρνητικό στοχαστικό όρο κ.ο.κ). Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή ως θετική αυτοσυσχέτιση.
 - Γ. Εάν το ρ πλησιάζει το -1 θα έχουμε και σε αυτή την περίπτωση ισχυρή αυτοσυσχέτιση. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση και οι στοχαστικοί όροι θα εμφανίζουν εναλλασσόμενο πρόσημο μεταξύ διαδοχικών παρατηρήσεων.
-
- Γενικά στην οικονομική επιστήμη παρατηρείται συχνότερα το φαινόμενο της αρνητικής αυτοσυσχέτισης σε σχέση με το φαινόμενο της θετικής αυτοσυσχέτισης.

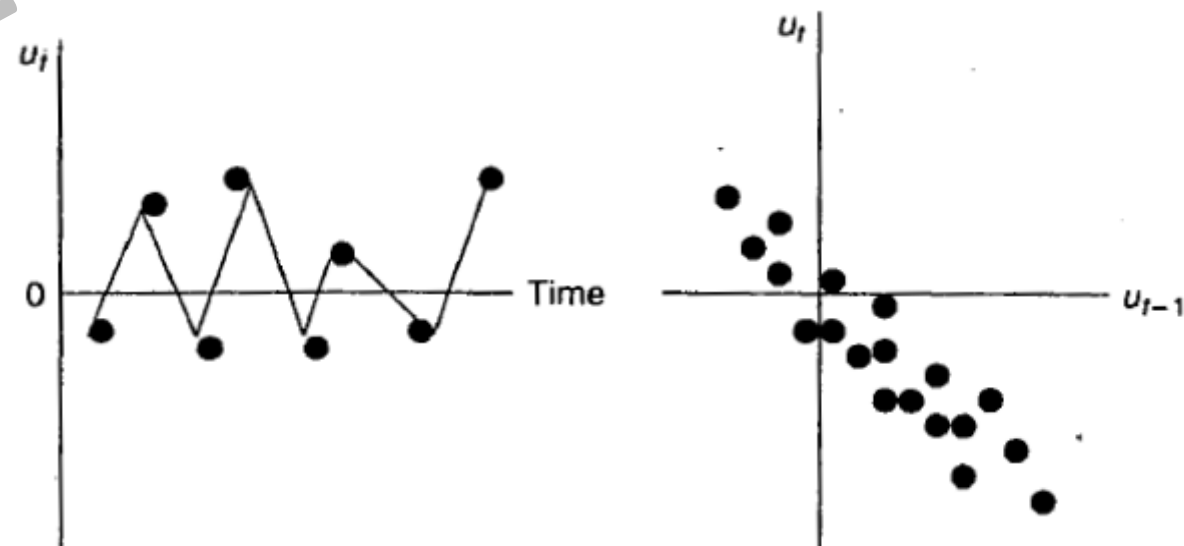
Διάγραμμα 28

Υπαρξη θετικής αυτοσυσχέτισης



Διάγραμμα 29

Υπαρξη αρνητικής αυτοσυσχέτισης



- Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τι συνεπάγεται η παρουσία αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού όρου για τους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των του παραπάνω υποδείγματος. Οι επιπτώσεις της παραβίασης της ανεξαρτησίας του στοχαστικού όρου στους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων συνοψίζονται στα παρακάτω:
- 1. Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των συντελεστών του υποδείγματος παραμένουν αμερόληπτοι και συνεπείς καθώς οι συγκεκριμένες ιδιότητες δεν εξαρτώνται από την υπόθεση ανεξαρτησίας του στοχαστικού όρου.
- 2. Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων είναι αναποτελεσματικοί και επομένως δεν είναι οι άριστοι εκτιμητές μεταξύ όλων των γραμμικών και αμερόληπτων εκτιμητών (BLUE).
- 3. Οι εκτιμηθείσες διακυμάνσεις των συντελεστών της παλινδρόμησης είναι μεροληπτικές και ασυνεπείς με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να πραγματοποιήσουμε αξιόπιστο έλεγχο υποθέσεων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο συντελεστής προσδιορισμού της παλινδρόμησης R^2 θα υπερεκτιμάται (υποδηλώνοντας υψηλότερη ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος από ότι ισχύει στην πραγματικότητα) και κατ'επέκταση θα παρατηρούνται εσφαλμένα υψηλότερες τιμές των στατιστικών κριτηρίων t (t -statistics) οδηγώντας σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης συχνότερα από ότι ισχύει.

- Όπως είχαμε δει και στην περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων όταν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του κλασικού γραμμικού υποδείγματος θα είναι ίση με:

$$E(uu') = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_n \quad (157)$$

όπου I_n είναι ένας $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

- Ωστόσο, η παρουσία αυτοσυσχέτισης έχει ως αποτέλεσμα τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων να είναι διαφορετικά του μηδενός. Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα κατάλοιπα επιδεικνύουν αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (158)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $LX_t = X_{t-1}$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$(1 - \rho L)u_t = \varepsilon_t \quad (159)$$

ή ισοδύναμα

$$u_t = \frac{1}{(1 - \rho L)} \varepsilon_t = (1 + \rho L + \rho^2 L^2 + \dots) \varepsilon_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho^3 \varepsilon_{t-3} + \dots \quad (160)$$

Υψώνοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (160) στο τετράγωνο και παίρνοντας μέση τιμή θα έχουμε:

$$E(u_t^2) = \text{var}(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \quad (161)$$

Παρατηρούμε πως η παραπάνω σχέση δεν περιέχει καθόλου την διάσταση του χρόνου t επομένως καταφέραμε με αυτό τον τρόπο η σειρά των καταλοίπων u_t να εμφανίζει σταθερή διακύμανση που δίνεται από:

$$\sigma^2_u = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \quad (162)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (160) είναι εύκολο να δείξουμε ότι η συνδιακύμανση των στοχαστικών όρων $E(u_t, u_{t-1})$ υπολογίζεται μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\begin{aligned} E(u_t, u_{t-1}) &= \rho \sigma^2_u \\ E(u_t, u_{t-2}) &= \rho^2 \sigma^2_u \\ &\dots \\ E(u_t, u_{t-s}) &= \rho^s \sigma^2_u \end{aligned} \quad (163)$$

Τελικά, η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των διαταρακτικών όρων στην περίπτωση αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$E(uu') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Omega_2^* \quad (164)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι συμβολίζουμε την μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων με Ω_2 για να την διακρίνουμε από την μήτρα στην περίπτωση παρουσίας ετεροσκεδαστικότητας (Ω).

- Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τις επιπτώσεις της παρουσίας αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων στην εκτιμηθείσα διακύμανση (και τυπικό σφάλμα αντίστοιχα) των συντελεστών παλινδρόμησης ενός πολυμεταβλητού γραμμικού υποδείγματος. Γνωρίζουμε πως η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των εκτιμητών της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\
 &= E[(X'X)^{-1} X'u][(X'X)^{-1} X'u'] \\
 &= E[(X'X)^{-1} X'uu'X(X'X)^{-1}] \\
 &= (X'X)^{-1} X'Euu'X(X'X)^{-1} \\
 &= (X'X)^{-1} X'\Omega_2 X(X'X)^{-1}
 \end{aligned} \tag{165}$$

- το οποίο, όπως και στην περίπτωση παρουσίας ετεροσκεδαστικότητας είναι τελείως διαφορετικό από την διακύμανση των εκτιμητών όταν ικανοποιούνται πλήρως οι υποθέσεις του γραμμικού υποδείγματος, δηλαδή $\sigma^2(X'X)^{-1}$
- Η μήτρα Ω_2 στην παραπάνω σχέση εκφράζει τη νέα μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης των καταλοίπων του υποδείγματος υποθέτοντας την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού όρου.
- Όπως και στην περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας, χρειάζεται να υποθέσουμε μια συγκεκριμένη μορφή για την μήτρα Ω_2 προκειμένου να υπολογίσουμε την διακύμανση και το τυπικό σφάλμα των OLS εκτιμητών με αξιοπιστία και ακρίβεια.

- Ο πιο συνηθισμένος τρόπος ελέγχου ύπαρξης αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού πραγματοποιείται με την χρήση των πινάκων του στατιστικού κριτηρίου των Durbin-Watson σε επίπεδο σημαντικότητας 5% ή 1% για n παρατηρήσεις και K ερμηνευτικές μεταβλητές.
- Εάν η υπολογισθείσα τιμή του στατιστικού ελέγχου d η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση είναι μικρότερη από την τιμή του στατιστικού κριτηρίου που δίνεται από τους πίνακες d_L τότε αποδεχόμαστε την υπόθεση της αυτοσυσχέτισης.

$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \quad (166)$$

- όπου u_t είναι το κατάλοιπο της t χρονικής περιόδου.
- Η υπόθεση της αυτοσυσχέτισης απορρίπτεται εάν $d > d_U$ ενώ το στατιστικό κριτήριο δεν οδηγεί σε αποτέλεσμα εάν ισχύει $d_L < d < d_U$.

- Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του στατιστικού κριτηρίου d δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$d = 2(1 - \rho) \quad (167)$$

- όπου ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισεως των καταλοίπων
- Οι πιθανές τιμές του στατιστικού κριτηρίου κυμαίνονται μεταξύ του 0 και του 4 με την τιμή 2 να υποδεικνύει την απουσία αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει εύκολα ότι εάν $\rho=0$ το οποίο δηλώνει την απουσία αυτοσυσχέτισης τότε το στατιστικό κριτήριο d θα λαμβάνει την τιμή 2.
- Εάν $\rho=1$ ($\rho= -1$) που σημαίνει θετική (αρνητική) αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων τότε το κριτήριο μέσω της ίδιας σχέσης θα ισούται με 0 (4).
- Εάν $\rho=1$ ($\rho= -1$) που σημαίνει θετική (αρνητική) αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων τότε το κριτήριο μέσω της ίδιας σχέσης θα ισούται με 0 (4).

$$Y_t = b_0(1 - \rho) + \rho Y_{t-1} + b_1 X_t - b_1 \rho X_{t-1} + v_t \quad (168)$$

- και στην συνέχεια επανεκτιμούμε την παλινδρόμηση με τις μετασχηματισμένες μεταβλητές:

$$(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = b_0(1 - \hat{\rho}) + b_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho} u_{t-1}) \quad (169)$$