

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

12 Αβεβαιότητα

Η αβεβαιότητα είναι ένα γεγονός της ζωής. Οι άνθρωποι αντιμετωπίζουν κινδύνους κάθε φορά που παίρνουν το μπάνιο τους, διασχίζουν το δρόμο ή κάνουν μια επένδυση. Υπάρχουν, όμως, χρηματοπιστωτικοί θεσμοί, όπως η αγορά ασφαλειών και το χρηματιστήριο, που μπορούν να μετριάσουν τουλάχιστον μερικούς από αυτούς τους κινδύνους. Τη λειτουργία των αγορών αυτών θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, πρέπει, όμως, πρώτα να μελετήσουμε την ατομική συμπεριφορά σε σχέση με τις επιλογές που ενέχουν αβεβαιότητα.

12.1 Ενδεχόμενη κατανάλωση

Εφόσον γνωρίζουμε όλα τα σχετικά με τη θεωρία της συμπεριφοράς του καταναλωτή, ας προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις διαθέσιμες γνώσεις μας για να κατανοήσουμε την επιλογή σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το πρώτο ερώτημα που τίθεται είναι, ποιο είναι το βασικό «πράγμα» που επιλέγεται;

Ο καταναλωτής ασχολείται προφανώς με την **κατανομή των πιθανοτήτων** για να αποκτήσει διαφορετικούς συνδυασμούς καταναλωτικών αγαθών. Μια κατανομή πιθανοτήτων αποτελείται από έναν κατάλογο διαφορετικών ενδεχομένων –σε αυτή την περίπτωση, διαφορετικών συνδυασμών αγαθών– και την πιθανότητα να συνδέεται με κάθε ενδεχόμενο. Όταν ένας καταναλωτής αποφασίζει πόση ασφάλεια αυτοκινήτου θα αγοράσει ή το πόσα χρήματα θα επενδύσει στο χρηματιστήριο, στην πραγματικότητα αποφασίζει μεταξύ διαφόρων ποσοτήτων κατανάλωσης, στη βάση ενός προτύπου κατανομής πιθανοτήτων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχετε \$100 τώρα και ότι σχεδιάζετε να αγοράσετε τον αριθμό 13 του λαχείου. Αν κληρώσει ο αριθμός 13, ο δικαιούχος κερδίζει \$200. Το λαχείο κοστίζει, ας πούμε, \$5. Τα δύο ενδεχόμενα που σας ενδιαφέρουν είναι αυτό τού να κληρωθεί ο συγκεκριμένος αριθμός και του να μην κληρωθεί.

Το αρχικό σας απόθεμα πλούτου –το ποσό που θα είχατε αν δεν αγοράζατε το λαχείο– είναι \$100 εάν κληρωθεί ο αριθμός 13 και \$100 αν δεν κληρωθεί. Αν όμως αγοράσετε το λαχείο αντί \$5, ~~θα έχετε μια κατανομή πλούτου που θα συνίσταται από \$295 αν κερδίσει το λαχείο σας, και \$95 αν δεν κερδίσει.~~ Το αρχικό απόθεμα πιθανοτήτων πλούτου στις διαφορετικές περιστάσεις ~~μεταβλήθηκε~~ με την αγορά του λαχείου. Ας εξετάσουμε αυτό το σημείο με λεπτομέρεια.

Στην εξέτασή μας αυτή θα περιοριστούμε, για λόγους διευκόλυνσης της παρουσίασης, στα τυχερά παιχνίδια που παίζονται με χρήμα. Βεβαίως, δεν ενδιαφέρει το χρήμα μόνο. Το «αγαθό» που, σε τελευταία ανάλυση, επιλέγουμε, είναι τα καταναλωτικά αγαθά που μπορούν να αγοράσουν τα χρήματα. Οι ίδιες αρχές ισχύουν για τα τυχερά παιχνίδια που παίζονται με αγαθά, αλλά ο περιορισμός μας στα χρηματικά ενδεχόμενα απλοποιεί τα πράγματα. Δεύτερον, θα περιοριστούμε σε πολύ απλές καταστάσεις, όπου υπάρχουν μόνο λίγα πιθανά ενδεχόμενα. Αυτό γίνεται και πάλι για λόγους απλούστευσης.

Περιγράψαμε παραπάνω την περίπτωση του παιχνιδιού με την αγορά λαχείων. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας ασφάλειας. Ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο έχει αρχικά περιουσιακά στοιχεία αξίας \$35.000, υπάρχει, όμως, μια πιθανότητα να χάσει \$10.000. Για παράδειγμα, είναι πιθανό να κλαπεί το αυτοκίνητό του, ή να πληγεί το σπίτι του από μια πλημμύρα. Έστω ότι η πιθανότητα ενός τέτοιου ενδεχομένου είναι $p = 0,01$. Τότε η κατανομή πιθανότητας που αντιμετωπίζει το άτομο είναι μια πιθανότητα 1% να έχει περιουσιακά στοιχεία \$25.000 και 99% πιθανότητα να έχει \$35.000.

Η ασφάλεια παρέχει έναν τρόπο ν' αλλάζει αυτή η κατανομή πιθανότητας. Έστω ότι υπάρχει ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο που θα πληρώσει στο άτομο \$100 αν συμβεί η απώλεια, έναντι ενός ασφαλιστρού \$1. Βεβαίως, το ασφαλιστρο πρέπει να καταβληθεί είτε συμβεί, είτε δεν συμβεί η απώλεια. Αν το άτομο αποφασίσει να αγοράσει ασφάλεια \$10.000, θα του κοστίσει \$100. Σ' αυτή την περίπτωση θα έχει 1% πιθανότητα να έχει \$34.900 (\$35.000 από άλλα περιουσιακά στοιχεία - \$10.000 απώλεια + \$10.000 αποζημίωση από την ασφάλεια - \$100 ασφάλιστρα) και μια 99% πιθανότητα να έχει \$34.900 (\$35.000 από περιουσιακά στοιχεία - \$100 ασφάλιστρα). Επομένως, ο καταναλωτής καταλήγει να έχει τον ίδιο πλούτο, ανεξάρτητα από το τι θα συμβεί. Είναι τώρα πλήρως ασφαλισμένος απέναντι σε απώλειες.

Γενικά, αν το άτομο αυτό αγοράζει K δολάρια ασφάλειας και πρέπει να πληρώσει ένα ασφαλιστρο γK , τότε θα έχει μπροστά του το εξής τυχερό παιχνίδι:

πιθανότητα 0,01 να αποκτήσει $\$25.000 + K - \gamma K$

και

πιθανότητα 0,99 να αποκτήσει $\$35.000 - \gamma K$.

Τι είδους ασφάλεια θα επιλέξει αυτό το άτομο; Αυτό εξαρτάται από τις προτιμήσεις του. Μπορεί να είναι πολύ συντηρητικός και να επιλέξει ένα ακριβό ασφαλιστικό πρόγραμμα, ή να είναι ριψοκίνδυνος και να μην αγοράσει καμιά ασφάλεια. Οι άνθρωποι έχουν διαφορετικές προτιμήσεις για την κατανομή πιθανοτήτων, με τον ίδιο τρόπο που έχουν διαφορετικές προτιμήσεις για κατανάλωση κανονικών αγαθών.

Ένας πολύ γόνιμος, πραγματικά, τρόπος προσέγγισης της λήψης απόφασης σε συνθήκες αβεβαιότητας είναι να θεωρήσουμε τα διαθέσιμα στις διαφορετικές περιστάσεις χρήματα ως διαφορετικά αγαθά. Χίλια δολάρια μετά από μια μεγάλη απώλεια είναι ίσως ένα πολύ διαφο-

ρετικό πράγμα από χίλια δολάρια όταν δεν υπάρχει απώλεια. Βεβαίως, την αρχή αυτή δεν πρέπει να την εφαρμόζουμε μόνο στο χρήμα: ένα παγωτό όταν κάνει ζέστη και ο ήλιος καίει είναι ένα πολύ διαφορετικό αγαθό από ένα παγωτό αν βρέχει και κάνει κρύο. Γενικά, τα καταναλωτικά αγαθά θα έχουν για ένα άτομο διαφορετική αξία ανάλογα με τις περιστάσεις στις οποίες γίνονται διαθέσιμα.

Ας θεωρήσουμε τα διαφορετικά ενδεχόμενα ορισμένων τυχαίων γεγονότων ως διαφορετικές **καταστάσεις πραγμάτων**. Στο παράδειγμα της ασφάλειας, που προηγήθηκε, υπήρχαν δύο καταστάσεις πραγμάτων: η απώλεια συμβαίνει ή δεν συμβαίνει. Γενικά, όμως, θα μπορούσαν να υπάρχουν πολλές καταστάσεις πραγμάτων. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ένα **σχέδιο ενδεχόμενης κατανάλωσης** ως μια συγκεκριμενοποίηση του τι θα καταναλωθεί σε κάθε διαφορετική κατάσταση πραγμάτων – κάθε διαφορετικό αποτέλεσμα της τυχαίας διαδικασίας. *Ενδεχόμενη* σημαίνει ότι εξαρτάται από κάτι που δεν είναι από πριν βέβαιο, και επομένως ένα σχέδιο ενδεχόμενης κατανάλωσης είναι αυτό που εξαρτάται από την έκβαση κάποιου γεγονότος. Στην περίπτωση της αγοράς ασφαλειών, η απρόοπτη κατανάλωση περιγράφηκε από τους όρους του ασφαλιστικού συμβολαίου: πόσα χρήματα θα έχετε αν σας συμβεί μια απώλεια, και πόσα θα έχετε αν δεν σας συμβεί. Στην περίπτωση των ηλιόλουστων και βροχερών ημερών, η ενδεχόμενη κατανάλωση θα είναι το σχέδιο του τι θα καταναλωθεί με δεδομένες τις διάφορες καιρικές καταστάσεις.

Οι άνθρωποι έχουν προτιμήσεις για διάφορα σχέδια κατανάλωσης, όπως ακριβώς έχουν τις προτιμήσεις για πραγματική κατανάλωση. Ίσως η γνώση τού ότι είστε πλήρως ασφαλισμένος να σας έκανε να αισθάνεστε καλύτερα τώρα. Οι άνθρωποι κάνουν επιλογές που αντανακλούν τις προτιμήσεις τους για την κατανάλωση σε διαφορετικές περιστάσεις, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία της επιλογής, που έχουμε ήδη αναπτύξει, για την ανάλυση αυτών των επιλογών.

Αν θεωρήσουμε ένα σχέδιο ενδεχόμενης κατανάλωσης απλώς σαν ένα κανονικό συνδυασμό καταναλωτικών αγαθών, τότε επιστρέφουμε κατευθείαν στο πλαίσιο που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι προτιμήσεις ορίζονται σε σχέση με διαφορετικά σχέδια κατανάλωσης, όπου οι «όροι ανταλλαγής» δίδονται από τον εισοδηματικό περιορισμό. Μπορούμε μ' αυτό τον τρόπο να δεχτούμε ότι ο καταναλωτής επιλέγει το άριστο σχέδιο κατανάλωσης μεταξύ αυτών που του είναι προσιτά, όπως ακριβώς κάναμε μέχρι τώρα.

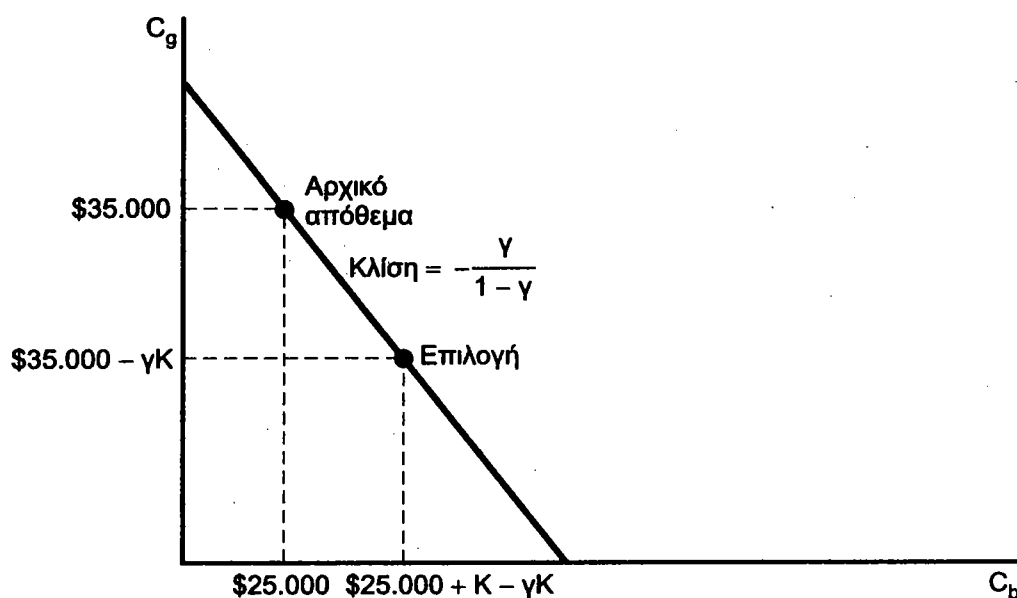
Ας περιγράψουμε την αγορά ασφάλισης με βάση την ανάλυση των καμπυλών αδιαφορίας που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Οι δύο καταστάσεις πραγμάτων είναι το ενδεχόμενο να συμβεί ή να μη συμβεί η απώλεια. Η ενδεχόμενη κατανάλωση είναι η αξία του χρηματικού ποσού που θα έχετε σε κάθε περίπτωση. Αυτό μπορεί να παρασταθεί σ' ένα διάγραμμα όπως αυτό του Σχήματος 12.1.

Το απόθεμά σας σε ενδεχόμενη κατανάλωση είναι \$25.000 για τη «δυσμενή» κατάσταση – αν συμβεί η απώλεια – και \$35.000 για την ευμενή κατάσταση – αν δεν συμβεί. Αν αγοράσετε ασφάλεια αξίας K δολαρίων, θυσιάζετε καταναλωτικές δυνατότητες γK δολαρίων στην

ευμενή κατάσταση, με αντάλλαγμα καταναλωτικές δυνατότητες αξίας $K - \gamma K$ δολαρίων κατά τη δυσμενή κατάσταση. Επομένως, η κατανάλωση που μπορείτε να χάσετε στην ευμενή περίπτωση, σε σχέση με την επιπλέον κατανάλωση που έχετε στη δυσμενή περίπτωση, θα είναι

$$\frac{\Delta C_g}{\Delta C_b} = -\frac{\gamma K}{K - \gamma K} = -\frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

Σχήμα 12.1



Ασφάλιση. Η γραμμή εισοδηματικού περιορισμού συνδέεται με την αγορά της ασφάλισης. Τα ασφαλιστήρια γ μάς επιτρέπουν να θυσιάσουμε ένα μέρος της κατανάλωσης στην ευμενή κατάσταση (C_g) προκειμένου να έχουμε περισσότερη κατανάλωση στη δυσμενή κατάσταση (C_b).

Αυτή είναι η κλίση της γραμμής εισοδηματικού περιορισμού που διέρχεται από το απόθεμά σας. Είναι ακριβώς σαν να έχουμε τιμή κατανάλωσης για την ευμενή κατάσταση $1 - \gamma$ και τιμή για τη δυσμενή κατάσταση γ .

Εδώ μπορούμε να χαράξουμε τις καμπύλες αδιαφορίας που μπορεί να έχει ένα άτομο για την ενδεχόμενη κατανάλωση. Είναι πολύ φυσικό να έχουν κι αυτές οι καμπύλες ένα κυρτό σχήμα: αυτό σημαίνει ότι το άτομο θα προτιμούσε ένα σταθερό ποσό κατανάλωσης σε κάθε περίπτωση αντί να έχει ένα μεγάλο ποσό σε μια κατάσταση και ένα μικρό ποσό σε μια άλλη.

Με δεδομένες τις καμπύλες αδιαφορίας για κάθε κατάσταση πραγμάτων, μπορούμε να ασχοληθούμε με την επιλογή της ποσότητας ασφάλισης που θέλει να αγοράσει. Ως συνήθως, η επιλογή αυτή θα χαρακτηρίζεται από μια συνθήκη επαφής: ο οριακός λόγος υποκατάστασης

σε κάθε κατάσταση πραγμάτων θα πρέπει να είναι ίσος με την τιμή στην οποία μπορείτε να ανταλλάξετε κατανάλωση σ' αυτές τις δύο καταστάσεις.

Βεβαίως, από τη στιγμή που έχουμε ένα μοντέλο άριστης επιλογής, μπορούμε να εφαρμόσουμε για την ανάλυσή του όλα τα εργαλεία που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Μπορούμε να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η ζήτηση ασφάλισης, καθώς μεταβάλλεται η τιμή της, ή καθώς μεταβάλλεται ο πλούτος του καταναλωτή κ.ο.κ. Η θεωρία της συμπεριφοράς του καταναλωτή είναι απόλυτα κατάλληλη για να περιγράψει τη συμπεριφορά κάτω από αβεβαιότητα, όπως και κάτω από βεβαιότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ομόλογα για καταστροφές

Έχουμε δει ότι η ασφάλιση είναι ένας τρόπος μεταβίβασης του πλούτου από ευμενείς καταστάσεις πραγμάτων προς δυσμενείς καταστάσεις πραγμάτων. Φυσικά, οι συναλλαγές αυτές έχουν δύο πλευρές: τα άτομα που αγοράζουν την ασφάλιση και εκείνα που την πωλούν. Εδώ θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην πλευρά της πώλησης ασφάλισης.

Η πλευρά πώλησης της αγοράς ασφαλειών χωρίζεται σε ένα τμήμα λιανικής, το οποίο ασχολείται άμεσα με τους τελικούς αγοραστές, και ένα τμήμα χονδρικής, στο οποίο οι ασφαλιστές πωλούν κινδύνους σε άλλα μέρη. Το τμήμα χονδρικής της αγοράς είναι γνωστό ως **αγορά αντασφάλισης**.

Συνήθως, η αγορά αντασφάλισης βασίζεται σε μεγάλους επενδυτές, όπως τα ταμεία συνταξιοδότησης, για να προσφέρει οικονομική υποστήριξη στους κινδύνους. Ωστόσο, κάποιες εταιρείες αντασφάλισης βασίζονται σε μεγάλους μεμονωμένους επενδυτές. Η Lloyd's του Λονδίνου, ένας από τους μεγαλύτερους ομίλους αντασφάλισης, χρησιμοποιεί σε γενικές γραμμές ιδιώτες επενδυτές.

Πρόσφατα, ο κλάδος αντασφάλισης άρχισε να πειραματίζεται με τα **ομόλογα για καταστροφές**, τα οποία, σύμφωνα με ορισμένους, αποτελούν έναν πιο ευέλικτο τρόπο παροχής αντασφάλισης. Τα ομόλογα αυτά, τα οποία συνήθως πωλούνται σε μεγάλους οργανισμούς, είναι τις περισσότερες φορές συνδεδεμένα με φυσικές καταστροφές, όπως σεισμούς ή τυφώνες.

Ένας χρηματοοικονομικός μεσάζων, όπως μία εταιρεία αντασφάλισης ή μία τράπεζα επενδύσεων, εκδίδει ένα ομόλογο που συνδέεται με ένα συγκεκριμένο ασφαλιστικό γεγονός, όπως ένας σεισμός, που περιλαμβάνει, π.χ., τουλάχιστον \$500 εκατ. σε ασφαλιστικές απαιτήσεις. Αν δεν υπάρξει σεισμός, οι επενδυτές κερδίζουν ένα γενναιόδωρο επιτόκιο. Αν όμως γίνει σεισμός, και οι απαιτήσεις υπερβαίνουν το ποσό που ορίζεται στο ομόλογο, οι επενδυτές θυσιάζουν το αρχικό τους κεφάλαιο και τον τόκο.

Τα ομόλογα για καταστροφές έχουν κάποια ελκυστικά στοιχεία. Μπορούν να επιμερίσουν ευρέως τους κινδύνους και να υποδιαιρεθούν άπειρες φορές, ώστε να επιτρέπουν σε κάθε επενδυτή να αναλάβει ένα μικρό μόνο μέρος του κινδύνου. Τα χρήματα που υποστηρίζουν την ασφάλεια καταβάλλονται προκαταβολικά, έτσι ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος μη πληρωμής για τον ασφαλισμένο.

Από πλευράς των οικονομολόγων, τα «ομόλογα καταστροφών» είναι μια μορφή **χρεογράφου που εξαρτάται από την κατάσταση πραγμάτων**, δηλαδή, ένα χρεόγραφο το οποίο αποπληρώνεται αν και μόνον αν συμβεί κάποιο συγκεκριμένο γεγονός. Η ιδέα αυτή παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον κάτοχο Νόμπελ Kenneth J. Arrow, σε μια μελέτη που δημοσιεύτηκε το 1952 και για μεγάλο διάστημα εθεωρείτο ότι είχε μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον. Αποδείχτηκε, όμως, ότι με τη βοήθεια των χρεογράφων, ενδεχομένως μπορούσαν να ερμηνευτούν καλύτερα διάφορα είδη δικαιωμάτων προαίρεσης και άλλων χρηματοοικονομικών παραγώγων. Σήμερα, οι μεγαλύτεροι επιστήμονες της Wall Street βασίζονται σε αυτό το έργο ηλικίας 50 ετών όταν δημιουργούν εξωτικά νέα παράγωγα, όπως τα ομόλογα για καταστροφές.

12.2 Συναρτήσεις ωφέλειας και πιθανότητες

Αν ο καταναλωτής έχει λογικές προτιμήσεις για κατανάλωση σε διάφορες περιστάσεις, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση ωφέλειας για να περιγράψουμε αυτές τις προτιμήσεις, ακριβώς όπως κάναμε και σε άλλες περιπτώσεις. Ωστόσο, το γεγονός ότι εξετάζουμε την επιλογή σε συνθήκες αβεβαιότητας, προσδίδει όντως μια ειδική δομή στο πρόβλημα επιλογής. Γενικά, το πώς ένα άτομο αξιολογεί την κατανάλωση σε μια κατάσταση σε σχέση με μια άλλη, εξαρτάται από την **πιθανότητα** να συμβεί πραγματικά η κατάσταση αυτή πραγμάτων. Με άλλα λόγια, ο λόγος για τον οποίο είμαι διατεθειμένος να υποκαταστήσω κατανάλωση σε περίπτωση που δεν βρέξει με κατανάλωση σε περίπτωση που βρέξει, έχει κάποια σχέση με το πόσο πιθανό θεωρώ ότι είναι να βρέξει. Οι προτιμήσεις κατανάλωσης σε διαφορετικές καταστάσεις πραγμάτων εξαρτώνται από το πόσο πιθανές θεωρεί το άτομο αυτές τις καταστάσεις.

Για το λόγο αυτό, η εξίσωση ωφέλειας που θα γράψουμε, θα εξαρτάται από τις τιμές πιθανότητας όπως επίσης και από τα επίπεδα κατανάλωσης. Έστω ότι θεωρούμε δύο αμοιβαία αποκλειόμενες καταστάσεις, όπως βροχή και καλοκαιρία, ή απώλεια και μη απώλεια, ή οτιδήποτε. Ας συμβολίσουμε με c_1 και c_2 την κατανάλωση στις καταστάσεις 1 και 2 και με π_1 και π_2 τις πιθανότητες να συμβούν πραγματικά οι καταστάσεις 1 και 2.

Αν οι δύο καταστάσεις αποκλείονται αμοιβαία, ούτως ώστε μία μόνον από αυτές μπορεί να συμβεί, τότε $\pi_2 = 1 - \pi_1$. Γενικά, όμως, θα γράφουμε και τις δύο πιθανότητες χάριν συμμετρίας.

Με δεδομένο αυτό το συμβολισμό, μπορούμε να παραστήσουμε τη συνάρτηση ωφέλειας για κατανάλωση στις καταστάσεις 1 και 2 ως $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2)$. Αυτή η συνάρτηση εκφράζει την προτίμηση του ατόμου για κατανάλωση σε καθεμία από τις καταστάσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μερικά παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχεδόν όλα τα παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας που έχουμε δει μέχρι τώρα στα πλαίσια της επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας. Ένα ωραίο

παράδειγμα είναι η περίπτωση των τέλει υποκατάστατων. Εδώ είναι φυσικό να σταθμίσουμε κάθε κατανάλωση με την πιθανότητα υλοποίησής της. Μ' αυτό τον τρόπο προκύπτει μια συνάρτηση ωφέλειας της μορφής

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2.$$

Σε συνθήκες αβεβαιότητας, αυτός ο τύπος έκφρασης είναι γνωστός ως **προσδοκώμενη αξία**. Είναι ακριβώς ο μέσος όρος της κατανάλωσης που θα έχετε.

Ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης ωφέλειας, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξέταση της επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας, είναι η συνάρτηση ωφέλειας Cobb-Douglas

$$u(c_1, c_2, \pi, 1 - \pi) = c_1^\pi c_2^{1-\pi}.$$

Εδώ, η ωφέλεια που αποδίδεται σε μια σειρά συνδυασμών καταναλωτικών αγαθών εξαρτάται από το πρότυπο κατανάλωσης κατά ένα μη γραμμικό τρόπο.

Ως συνήθως, ένας μονοτονικός μετασχηματισμός της ωφέλειας θα εξακολουθήσει να απεικονίζει τις ίδιες προτιμήσεις. Αποδεικνύεται ότι ο λογάριθμος της ωφέλειας Cobb-Douglas είναι ιδιαίτερα βολικός για τη συνέχεια. Έχουμε έτσι μια συνάρτηση ωφέλειας της μορφής

$$\ln u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2$$

12.3 Προσδοκώμενη ωφέλεια

Μια ιδιαίτερη βολική μορφή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση ωφέλειας είναι η ακόλουθη

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2).$$

Η μορφή αυτή δηλώνει ότι η ωφέλεια μπορεί να γραφεί ως ένα σταθμισμένο άθροισμα κάποιων συναρτήσεων κατανάλωσης σε κάθε κατάσταση, $v(c_1)$ και $v(c_2)$, όπου οι σταθμίσεις δίνονται από τις πιθανότητες π_1 και π_2 .

Δύο παραδείγματα δόθηκαν πρωτίτερα. Τα τέλεια υποκατάστατα, ή συνάρτηση χρησιμότητας προσδοκώμενης αξίας, είχαν αυτή τη μορφή, όπου $v(c) = c$. Η συνάρτηση Cobb-Douglas δεν είχε αρχικά αυτή τη μορφή, όταν, όμως, την εκφράσαμε λογαριθμικά, είχε τη γραμμική μορφή $v(c) = \ln c$.

Αν μια από τις καταστάσεις είναι βέβαιη, έτσι ώστε να είναι, ας πούμε, $\pi_1 = 1$, τότε η $v(c_1)$ είναι η ωφέλεια της βέβαιης κατανάλωσης στην κατάσταση 1. Αντίστοιχα, αν $\pi_2 = 1$, $v(c_2)$ είναι η ωφέλεια της κατανάλωσης στην κατάσταση 2. Επομένως, η έκφραση

$$\pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$

απεικονίζει τη μέση ωφέλεια, ή την προσδοκώμενη ωφέλεια, του προτύπου κατανάλωσης (c_1, c_2) .

Για το λόγο αυτό, ονομάζουμε μια συνάρτηση ωφέλειας, με την ιδιαίτερη μορφή που περιγράψαμε εδώ, **συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας**, ή, άλλοτε, **συνάρτηση ωφέλειας von Neumann-Morgenstern**.¹

Όταν λέμε ότι οι προτιμήσεις ενός καταναλωτή μπορούν να περιγραφούν από μια συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας, ή ότι οι προτιμήσεις του καταναλωτή έχουν την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας, εννοούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια συνάρτηση ωφέλειας με την αθροιστική μορφή που περιγράψαμε πιο πάνω. Θα μπορούσαμε, φυσικά, να επιλέξουμε και μια άλλη μορφή: οποιοσδήποτε μονοτονικός μετασχηματισμός μιας συνάρτησης προσδοκώμενης ωφέλειας είναι μια συνάρτηση ωφέλειας που εκφράζει τις ίδιες προτιμήσεις. Η παράστασή της, όμως, με αθροιστική μορφή αποδεικνύεται ιδιαίτερα βολική. Αν οι προτιμήσεις του καταναλωτή περιγράφονται από τη σχέση $\pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2$, θα περιγράφονται επίσης και από τη $c_1^{\pi_1} c_2^{\pi_2}$. Η τελευταία, όμως, παράσταση δεν έχει την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας, ενώ η πρώτη την έχει.

Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας μπορεί να υποβληθεί σε ορισμένα είδη μονοτονικού μετασχηματισμού και να συνεχίσει να έχει την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας. Λέμε ότι η συνάρτηση $v(u)$ είναι ένας **θετικός συναφής μετασχηματισμός**, αν μπορεί να γραφτεί με τη μορφή: $v(u) = au + b$ όπου $a > 0$. Ένας θετικός συναφής μετασχηματισμός είναι απλά πολλαπλασιασμός επί ένα θετικό αριθμό και πρόσθεση μιας σταθεράς. Αποδεικνύεται ότι αν υποβάλετε μια συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας σ' ένα θετικό συναφή μετασχηματισμό, όχι μόνον απεικονίζει τις ίδιες προτιμήσεις (αυτό είναι προφανές, αφού ένας συναφής μετασχηματισμός είναι απλά ένας ειδικός τύπος μονοτονικού μετασχηματισμού), αλλά και διατηρεί την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας.

Οι οικονομολόγοι λένε ότι μια συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας είναι «μοναδική μέχρι ενός συναφούς μετασχηματισμού». Αυτό σημαίνει απλά ότι μπορείτε να εφαρμόσετε ένα συναφή μετασχηματισμό και να έχετε μια νέα συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας που παριστά τις ίδιες προτιμήσεις. Κάθε, όμως, άλλο είδος μετασχηματισμού θα καταστρέψει την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας.

12.4 Γιατί είναι ορθολογική η προσδοκώμενη ωφέλεια

Η παράσταση της προσδοκώμενης ωφέλειας είναι βολική, είναι όμως λογική; Γιατί πρέπει να θεωρούμε ότι οι προτιμήσεις σχετικά με επιλογές σε συνθήκες αβεβαιότητας πρέπει να έχουν την ιδιαίτερη δομή που επιβάλλει η συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας; Όπως αποδεικνύ-

1. Ο John von Neumann υπήρξε μία από τις μεγαλύτερες φυσιογνωμίες των μαθηματικών του εικοστού αιώνα. Είχε επίσης σημαντική συμβολή στη φυσική, την επιστήμη των υπολογιστών και την οικονομική θεωρία. Ο Oscar Morgenstern υπήρξε οικονομολόγος στο Πρίνστον και, μαζί με τον von Neumann, συνέβαλε στην ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας των παιγνίων.

εται, υπάρχουν επιτακτικοί λόγοι για τους οποίους η προσδοκώμενη ωφέλεια είναι ένας λογικός αντικειμενικός σκοπός σε προβλήματα επιλογής όπου υπάρχει αβεβαιότητα.

Το γεγονός ότι τα ενδεχόμενα μιας τυχαίας επιλογής είναι καταναλωτικά αγαθά που θα καταναλωθούν σε διαφορετικές περιστάσεις, σημαίνει ότι, σε τελική ανάλυση, μόνον ένα από τα ενδεχόμενα θα συμβεί πραγματικά. Το σπίτι σας είτε θα καεί, είτε δεν θα καεί. Η μέρα είτε θα είναι ηλιόλουστη, είτε δεν θα είναι. Ο τρόπος με τον οποίο έχετε ορίσει το πρόβλημα επιλογής σημαίνει ότι μόνον ένα από τα πολλά πιθανά ενδεχόμενα θα συμβεί, και επομένως θα υλοποιηθεί μόνον ένα από τα σχέδια ενδεχόμενης κατανάλωσης.

Αυτό αποδεικνύεται ότι έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια. Έστω ότι εξετάζετε την αγορά ασφάλισης έναντι πυρκαγιάς για το σπίτι σας για τον επόμενο χρόνο. Στην επιλογή αυτή θα ενδιαφερθείτε για τον πλούτο σας σε τρεις καταστάσεις: ο πλούτος σας τώρα (c_0), ο πλούτος σας αν καεί το σπίτι σας (c_1), και ο πλούτος σας αν δεν καεί (c_2). (Φυσικά, αυτό που πραγματικά σας ενδιαφέρει είναι οι καταναλωτικές σας δυνατότητες σε κάθε ενδεχόμενο, εδώ, όμως, χρησιμοποιούμε τον πλούτο απλά σαν μια προσεγγιστική εκτίμηση της κατανάλωσης). Αν π_1 είναι η πιθανότητα να καεί το σπίτι σας και π_2 η πιθανότητα να μην καεί, τότε οι προτιμήσεις σας γι' αυτές τις τρεις διαφορετικές καταναλώσεις μπορούν γενικά να παρασταθούν από μια συνάρτηση ωφέλειας $u(\pi_1, \pi_2, c_0, c_1, c_2)$.

Έστω ότι εξετάζουμε την αρνητική σχέση μεταξύ του πλούτου τώρα και ενός από τα πιθανά ενδεχόμενα – ας πούμε, πόσα χρήματα είμαστε διατεθειμένοι να θυσιάσουμε τώρα για να έχουμε λίγο περισσότερα χρήματα αν το σπίτι καεί. Τότε, η απόφαση αυτή θα είναι ανεξάρτητη από το πόση κατανάλωση θα έχετε στις άλλες καταστάσεις πραγμάτων – πόσο πλούτο θα έχετε αν το σπίτι σας δεν καταστραφεί. Γιατί το σπίτι είτε θα καεί είτε δεν θα καεί. Αν καεί, η αξία τού επιπλέον πλούτου δεν θα εξαρτάται από τον πλούτο που θα είχατε αν δεν καιγόταν. Ό,τι έγινε, έγινε, επομένως ό,τι δεν συμβαίνει, δεν θα πρέπει να επηρεάζει το ύψος της κατανάλωσης στο ενδεχόμενο που όντως συμβαίνει.

Σημειώστε ότι αυτή είναι μια υπόθεση για τις προτιμήσεις ενός ατόμου. Αυτή, όμως, είναι δυνατόν να παραβιαστεί. Όταν οι άνθρωποι εξετάζουν μια επιλογή μεταξύ δύο πραγμάτων, η ποσότητα ενός τρίτου πράγματος που κατέχουν, παίζει συνήθως κάποιο ρόλο. Η επιλογή μεταξύ καφέ και τσαγιού ενδέχεται να εξαρτάται από το πόση κρέμα έχετε. Αυτό συμβαίνει επειδή καταναλώνετε καφέ μαζί με κρέμα. Αν εξετάσετε την επιλογή όπου ρίχνετε ένα ζάρι και παίρνετε καφέ ή τσάι ή κρέμα, τότε το ποσό της κρέμας που θα πάρετε δεν θα επηρεάσει τις προτιμήσεις σας μεταξύ καφέ και τσαγιού. Γιατί; Διότι αποκτάτε ή το ένα πράγμα ή το άλλο. Αν σας τύχει η κρέμα, το γεγονός ότι θα μπορούσατε ίσως να έχετε πάρει είτε καφέ είτε τσάι είναι αδιάφορο.

Επομένως, στην επιλογή σε συνθήκες αβεβαιότητας υπάρχει ένα φυσικό είδος «ανεξαρτησίας» μεταξύ των διαφορετικών ενδεχομένων, διότι πρέπει αυτά να καταναλωθούν ξεχωριστά – σε διαφορετικές καταστάσεις πραγμάτων. Οι επιλογές που σχεδιάζουν οι άνθρωποι να κάνουν σε μια κατάσταση πραγμάτων πρέπει να είναι ανεξάρτητες από τις επιλογές που σχεδιάζουν να κάνουν σε άλλες καταστάσεις πραγμάτων. Η υπόθεση αυτή είναι γνωστή ως υπόθεση **ανεξαρτησίας**. Αποδεικνύεται ότι η παραδοχή αυτή συνεπάγεται ότι η συνάρτηση

ωφέλειας για ενδεχόμενη κατανάλωση θα έχει μια πολύ ειδική δομή: πρέπει να έχει τη μορφή αθροίσματος του οποίου οι όροι είναι οι διάφοροι συνδυασμοί ενδεχόμενης κατανάλωσης.

Αν, δηλαδή, c_1 , c_2 και c_3 είναι η κατανάλωση σε διαφορετικές καταστάσεις πραγμάτων, και π_1 , π_2 και π_3 οι πιθανότητες υλοποίησης αυτών των διαφορετικών καταστάσεων, τότε αν ικανοποιείται η παραδοχή ανεξαρτησίας που προαναφέραμε, η συνάρτηση ωφέλειας πρέπει να έχει τη μορφή

$$U(c_1, c_2, c_3) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) + \pi_3 u(c_3).$$

Είναι αυτό που ονομάσαμε συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας. Σημειώστε ότι η συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας ικανοποιεί πραγματικά τη συνθήκη που ορίζει ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ δύο αγαθών είναι ανεξάρτητος από την ποσότητα ενός τρίτου αγαθού. Ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ, π.χ., των αγαθών 1 και 2 παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \text{ΟΛΥ}_{12} &= - \frac{\Delta U(c_1, c_2, c_3) / \Delta c_1}{\Delta U(c_1, c_2, c_3) / \Delta c_2} \\ &= - \frac{\pi_1 \Delta u(c_1) / \Delta c_1}{\pi_2 \Delta u(c_2) / \Delta c_2}. \end{aligned}$$

Αυτός ο ΟΛΥ εξαρτάται μόνον από τη διαθέσιμη ποσότητα των αγαθών 1 και 2, και όχι από τη διαθέσιμη ποσότητα του αγαθού 3.

12.5 Αποστροφή κινδύνου

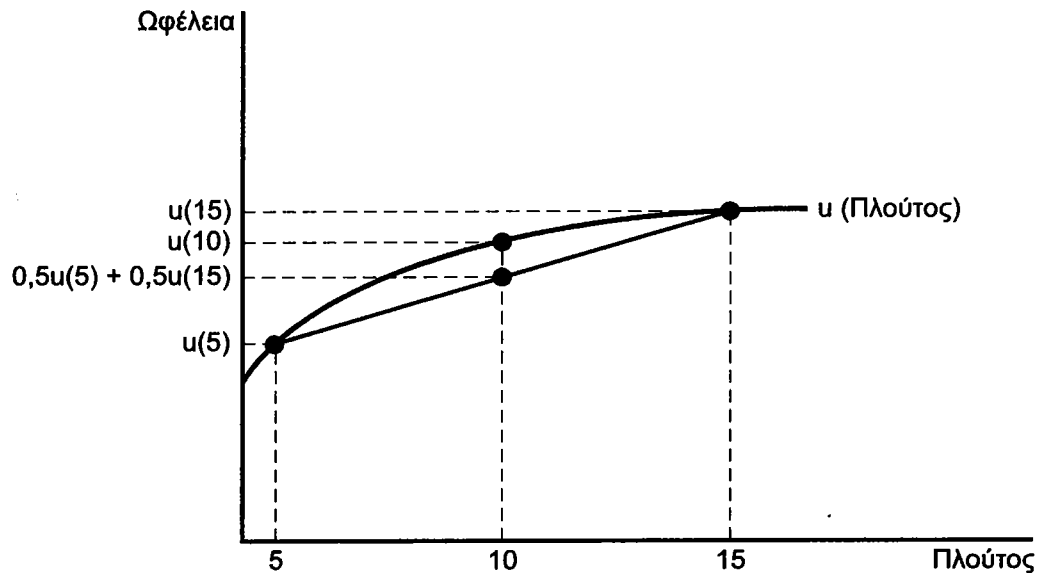
Ισχυριστήκαμε πιο πάνω ότι η συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας έχει μερικές ιδιότητες πολύ πρόσφορες για την ανάλυση της επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

Ας εφαρμόσουμε την έννοια της προσδοκώμενης ωφέλειας σ' ένα απλό πρόβλημα επιλογής. Έστω ότι ένας καταναλωτής έχει σήμερα \$10 πλούτου και σχεδιάζει να συμμετάσχει σ' ένα τυχερό παιχνίδι που του δίνει μια πιθανότητα 50% να κερδίσει \$5 και μια πιθανότητα 50% να χάσει \$5. Επομένως, ο πλούτος του είναι τυχαίος: έχει 50% πιθανότητα να καταλήξει με \$5 και 50% πιθανότητα να καταλήξει με \$15. Η προσδοκώμενη αξία του πλούτου του είναι \$10, και η προσδοκώμενη ωφέλεια είναι

$$\frac{1}{2} u(\$15) + \frac{1}{2} u(\$5).$$

Αυτό απεικονίζει το Σχήμα 12.2. Η προσδοκώμενη ωφέλεια του πλούτου είναι ο μέσος όρος των αριθμών $u(\$15)$ και $u(\$5)$, που στο διάγραμμα ορίζονται ως $0,5u(5)$ και $0,5u(15)$. Έχουμε επίσης απεικονίσει την ωφέλεια της προσδοκώμενης αξίας του πλούτου, που στο

Σχήμα 12.2



Αποστρόφη κινδύνου. Για έναν καταναλωτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο, η ωφέλεια της προσδοκώμενης αξίας του πλούτου, $u(10)$, είναι μεγαλύτερη από την προσδοκώμενη ωφέλεια του πλούτου, $0,5u(5) + 0,5u(15)$.

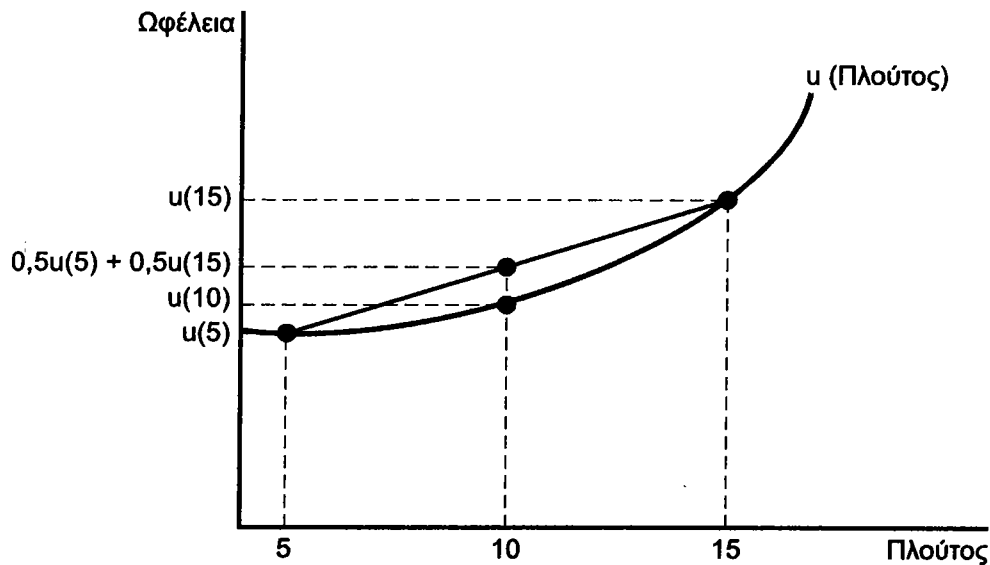
διάγραμμα ονομάζεται $u(\$10)$. Σημειώστε ότι στο διάγραμμα αυτό η προσδοκώμενη ωφέλεια του πλούτου είναι μικρότερη από την ωφέλεια του προσδοκώμενου πλούτου. Δηλαδή

$$u\left(\frac{1}{2}15 + \frac{1}{2}5\right) = u(10) > \frac{1}{2}u(15) + \frac{1}{2}u(5).$$

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο καταναλωτής **αποστρέφεται τον κίνδυνο**, αφού προτιμά την προσδοκώμενη αξία του πλούτου από το ίδιο το τυχερό παιχνίδι. Βεβαίως, οι προτιμήσεις του καταναλωτή μπορεί να είναι τέτοιες ώστε αυτός να προτιμά το τυχερό παιχνίδι από την προσδοκώμενη αξία του, και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο καταναλωτής **επιδιώκει τον κίνδυνο**. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 12.3.

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ Σχημάτων 12.2 και 12.3. Ο καταναλωτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο έχει μια κοίλη συνάρτηση ωφέλειας – η κλίση της γίνεται περισσότερο επίπεδη καθώς αυξάνεται ο πλούτος. Ο καταναλωτής που επιδιώκει τον κίνδυνο έχει μια κυρτή συνάρτηση ωφέλειας – η κλίση της γίνεται πιο απότομη καθώς αυξάνει ο πλούτος. Επομένως, η καμπυλότητα της συνάρτησης ωφέλειας εκφράζει τη στάση του καταναλωτή απέναντι στον κίνδυνο. Γενικά, όσο πιο κοίλη είναι η συνάρτηση ωφέλειας, τόσο περισσότερο θα αποφεύγει τον κίνδυνο ο καταναλωτής, και όσο πιο κυρτή είναι η συνάρτηση ωφέλειας, τόσο περισσότερο θα επιδιώκει τον κίνδυνο.

Σχήμα 12.3



Επιδίωξη του κινδύνου. Για έναν καταναλωτή που επιδιώκει τον κίνδυνο, η προσδοκώμενη ωφέλεια του πλούτου, $0,5u(5) + 0,5u(15)$, είναι μεγαλύτερη από την ωφέλεια της προσδοκώμενης αξίας του πλούτου, $u(10)$.

Η ενδιάμεση περίπτωση είναι αυτή μιας γραμμικής συνάρτησης ωφέλειας. Εδώ ο καταναλωτής είναι **ουδέτερος απέναντι στον κίνδυνο**. Η προσδοκώμενη ωφέλεια του πλούτου είναι η ωφέλεια της προσδοκώμενης αξίας του. Σε αυτή την περίπτωση, ο καταναλωτής δεν ενδιαφέρεται για την επικινδυνότητα του τυχερού παιχνιδιού – μόνο για την προσδοκώμενη αξία του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η ζήτηση ασφάλισης

Ας εφαρμόσουμε τη δομή της προσδοκώμενης ωφέλειας στη ζήτηση ασφάλισης που εξετάσαμε προηγουμένως. Ας θυμηθούμε ότι στο παράδειγμα αυτό, το άτομο είχε έναν πλούτο \$35.000 και ότι υπήρχε η περίπτωση απώλειας \$10.000. Η πιθανότητα απώλειας ήταν 1%, και το κόστος της αγοράς K δολαρίων ασφάλειας ήταν γK . Εξετάζοντας το παράδειγμα αυτό μέσω των καμπυλών αδιαφορίας, είδαμε ότι η άριστη επιλογή ασφάλισης καθορίστηκε από τη συνθήκη που ορίζει ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ της κατανάλωσης στα δύο ενδεχόμενα –απώλεια και μη απώλεια– είναι ίσος προς $-\gamma/(1 - \gamma)$. Έστω π η πιθανότητα να συμβεί η απώλεια και $1 - \pi$ η πιθανότητα να μη συμβεί.

Ας ορίσουμε με I την κατάσταση της μη απώλειας, οπότε ο πλούτος στην κατάσταση αυτή θα είναι

$$c_1 = \$35.000 - \gamma K,$$

και ας ορίσουμε με 2 την κατάσταση απώλειας στην οποία ο πλούτος θα είναι

$$c_2 = \$35.000 - \$10.000 + K - \gamma K.$$

Η άριστη επιλογή ασφάλισης του καταναλωτή ορίζεται τότε από τη συνθήκη που θέλει ο λόγος υποκατάστασης μεταξύ κατανάλωσης στα δύο ενδεχόμενα να είναι ίσος με το λόγο των τιμών

$$O\Delta Y = -\frac{\pi \Delta u(c_2)/\Delta c_2}{(1-\pi)\Delta u(c_1)/\Delta c_1} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}. \quad (12.1)$$

Ας κοιτάξουμε τώρα το ασφαλιστήριο συμβόλαιο από την πλευρά της ασφαλιστικής εταιρείας. Με πιθανότητα π , η εταιρεία πρέπει να καταβάλει ένα ποσό K , και με μια πιθανότητα $(1-\pi)$ δεν θα καταβάλει τίποτα. Ανεξάρτητα από το τι θα συμβεί, θα εισπράξει ένα ασφάλιστρο γK . Επομένως, το αναμενόμενο κέρδος P , της ασφαλιστικής εταιρείας είναι

$$P = \gamma K - \pi K - (1-\pi) \cdot 0 = \gamma K - \pi K.$$

Ας υποθέσουμε ότι κατά μέσο όρο η ασφαλιστική εταιρεία με το συμβόλαιο δεν έχει ούτε κέρδη ούτε ζημιές. Δηλαδή προσφέρει ασφάλιση μ' ένα «δίκαιο» αντίτιμο, όπου «δίκαιο» σημαίνει ότι η προσδοκώμενη αξία της ασφάλειας είναι ακριβώς ίση με το κόστος της. Τότε έχουμε

$$P = \gamma K - \pi K = 0,$$

που συνεπάγεται ότι $\gamma = \pi$.

Εισάγοντας τη σχέση αυτή στην εξίσωση (12.1), έχουμε

$$\frac{\pi \Delta u(c_2)/\Delta c_2}{(1-\pi)\Delta u(c_1)/\Delta c_1} = \frac{\pi}{1-\pi}.$$

Με απαλοιφή των π , καταλήγουμε στη συνθήκη ότι το άριστο ποσό ασφάλισης πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} = \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}. \quad (12.2)$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι η οριακή ωφέλεια ενός επιπλέον δολαρίου εισοδήματος αν συμβεί η απώλεια, πρέπει να είναι ίση προς την οριακή ωφέλεια ενός επιπλέον δολαρίου εισοδήματος αν δεν συμβεί η απώλεια.

Ας υποθέσουμε ότι ο καταναλωτής αποστρέφεται τον κίνδυνο ώστε η οριακή ωφέλεια του χρήματος να είναι φθίνουσα καθώς αυξάνεται το χρηματικό ποσό που κατέχει. Τότε, αν $c_1 > c_2$, η οριακή ωφέλεια στο c_1 θα είναι μικρότερη από την οριακή ωφέλεια στο c_2 , και αντιστρόφως. Επιπλέον, αν οι οριακές ωφέλειες εισοδήματος είναι ίσες στα c_1 και c_2 , όπως

στην εξίσωση (12.2), τότε πρέπει να ισχύει ότι: $c_1 = c_2$. Εφαρμόζοντας τους τύπους για τα c_1 και c_2 , έχουμε:

$$35.000 - \gamma K = 25.000 + K - \gamma K,$$

απ' όπου συνάγεται ότι $K = \$10.000$. Αυτό σημαίνει ότι, όταν δίνεται η ευκαιρία αγοράς μιας ασφάλισης έναντι ενός «δίκαιου» ασφαλιστρού, ένας καταναλωτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα προτιμήσει πάντα να ασφαλιστεί πλήρως.

Αυτό συμβαίνει επειδή η ωφέλεια του πλούτου σε κάθε κατάσταση εξαρτάται μόνον από τη συνολική ποσότητα πλούτου που διαθέτει ο καταναλωτής σ' αυτή την κατάσταση – και όχι από αυτό που ενδεχόμενα θα είχε σε μια άλλη κατάσταση – έτσι ώστε αν οι συνολικές ποσότητες πλούτου που κατέχει ο καταναλωτής σε κάθε κατάσταση είναι ίσες, οι οριακές ωφέλειες του πλούτου πρέπει να είναι επίσης ίσες.

Για να ανακεφαλαιώσουμε: αν ο καταναλωτής αποστρέφεται τον κίνδυνο και μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη ωφέλεια, και αν του προσφερθεί μια δίκαιη ασφάλιση απέναντι σε μια απώλεια, τότε η άριστη επιλογή του θα είναι η πλήρης ασφάλιση.

12.6 Διαφοροποίηση

Ας στραφούμε τώρα σ' ένα διαφορετικό θέμα όπου υπάρχει αβεβαιότητα – τα κέρδη από διαφοροποίηση. Έστω ότι εξετάζετε την επένδυση \$100 σε δύο διαφορετικές εταιρείες, σε μία που κατασκευάζει γυαλιά ηλίου και σε μία που κατασκευάζει αδιάβροχα. Η μακροπρόθεσμη πρόγνωση του καιρού σας λέει ότι το επόμενο καλοκαίρι είναι εξίσου πιθανό να είναι βροχερό ή ηλιόλουστο. Πώς θα επενδύσετε τα χρήματά σας;

Δεν θα ήταν λογικό να εξασφαλίσετε τα λεφτά σας και να επενδύσετε μερικά χρήματα σε καθεμία εταιρεία; Με τη διαφοροποίηση της τοποθέτησης των χρημάτων σας στις δύο επενδύσεις, μπορείτε να έχετε μια πιο ασφαλή απόδοση της επένδυσής σας, και επομένως πιο επιθυμητή για κάποιον που αποστρέφεται τον κίνδυνο.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι οι μετοχές της εταιρείας αδιάβροχων και γυαλιών ηλίου έχουν μια τρέχουσα τιμή \$10. Εάν έχουμε ένα βροχερό καλοκαίρι, η μετοχή της εταιρείας των αδιάβροχων θα αξίζει \$20 και αυτή της εταιρείας των γυαλιών ηλίου θα αξίζει \$5. Εάν έχουμε ένα ηλιόλουστο καλοκαίρι, οι αποδόσεις αντιστρέφονται: η μετοχή της εταιρείας γυαλιών ηλίου θα αξίζει \$20 και της εταιρείας αδιάβροχων θα αξίζει \$5. Αν επενδύσετε και τα \$100 στην εταιρεία γυαλιών ηλίου, ποντάρετε σ' ένα παιγνίδι τύχης που με πιθανότητα 50% θα σας αποδώσει \$200 και με πιθανότητα 50% θα σας αποδώσει \$50. Το ίδιο μέγεθος πληρωμών προκύπτει αν επενδύσετε όλα σας τα χρήματα στην εταιρεία γυαλιών ηλίου: σε κάθε περίπτωση, θα έχετε μια προσδοκώμενη απόδοση \$125.

Κοιτάξτε, όμως, τι συμβαίνει αν τοποθετήσετε τα μισά χρήματά σας σε καθεμία εταιρεία. Τότε, εάν υπάρχει ηλιοφάνεια, θα έχετε \$100 από την επένδυση στα γυαλιά ηλίου και \$25 από

την επένδυση στα αδιάβροχα. Αν όμως έχουμε βροχερό καιρό, θα έχετε \$100 από την επένδυση στα αδιάβροχα και \$25 από την επένδυση στα γυαλιά ηλίου. Είτε έτσι, είτε αλλιώς, θα έχετε τελικά εξασφαλισμένα \$125. Με τη διαφοροποίηση της επένδυσής σας σε δύο εταιρείες έχετε κατορθώσει να μειώσετε τον συνολικό κίνδυνο της επένδυσής σας, κρατώντας παράλληλα σταθερή την προσδοκώμενη απόδοση.

Η διαφοροποίηση ήταν πολύ εύκολη σ' αυτό το παράδειγμα: τα δύο περιουσιακά στοιχεία είχαν απόλυτα αρνητική συσχέτιση – όταν συνέβαινε το ένα, δεν συνέβαινε το άλλο. Ζεύγη περιουσιακών στοιχείων όπως αυτό είναι εξαιρετικά πολύτιμα γιατί μπορούν να μειώσουν δραματικά τους κινδύνους. Δυστυχώς, όμως, είναι και δύσκολο να βρεθούν. Τα περισσότερα περιουσιακά στοιχεία κινούνται μαζί: όταν οι μετοχές της GM είναι ψηλά, είναι επίσης ψηλά και οι μετοχές της Ford, και οι μετοχές της Goodrich. Στο βαθμό, όμως, που οι κινήσεις της τιμής των περιουσιακών στοιχείων δεν είναι απόλυτα θετικά συσχετισμένες, θα υπάρχουν κάποια κέρδη από αυτή τη διαφοροποίηση.

12.7 Διασπορά κινδύνου

Ας επιστρέψουμε τώρα στο παράδειγμα της ασφάλισης. Εξετάσαμε εκεί την κατάσταση ενός ατόμου που είχε \$35.000 και αντιμετώπιζε την απώλεια \$10.000 με πιθανότητα 0,01. Έστω ότι υπάρχουν 1.000 τέτοια άτομα. Τότε, κατά μέσο όρο, θα έχουν συμβεί 10 απώλειες, αξίας \$100.000 κάθε χρόνο. Καθένα από τα 1.000 άτομα θα αντιμετώπιζε μια προσδοκώμενη απώλεια 0,01 επί \$10.000, ή \$100 το χρόνο. Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να υποστεί ένα άτομο μια απώλεια δεν επηρεάζει την πιθανότητα να υποστεί απώλεια ένα οποιοδήποτε από τα άλλα άτομα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι οι κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι.

Τότε κάθε άτομο θα έχει έναν προσδοκώμενο πλούτο $0,99 \times \$35.000 + 0,01 \times \$25.000 = \$34.900$. Όμως κάθε άτομο υφίσταται ένα μεγάλο ποσοστό κινδύνου. Κάθε άτομο έχει μια πιθανότητα 1% να χάσει \$10.000.

Έστω ότι κάθε καταναλωτής αποφασίζει να διαφοροποιήσει τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει. Πώς μπορεί να το κάνει αυτό; Με την πώληση μέρους του κινδύνου του σε άλλα άτομα. Έστω ότι οι 1.000 καταναλωτές αποφασίζουν να ασφαλίσουν ο ένας τον άλλο. Αν κάποιος υποστεί μια απώλεια \$10.000, καθένας από τους 1.000 καταναλωτές θα συνεισφέρει \$10 σ' αυτό το άτομο. Μ' αυτό τον τρόπο, ο δυστυχής τού οποίου το σπίτι καίγεται, αποζημιώνεται για την απώλειά του, και οι άλλοι καταναλωτές έχουν εξασφαλίσει ότι θα αποζημιωθούν αν συμβεί η δυστυχής αυτή ψυχή να είναι οι ίδιοι! Αυτό είναι ένα παράδειγμα **διασποράς του κινδύνου**. Κάθε καταναλωτής επιμερίζει τον κίνδυνό του πάνω σ' όλους τους άλλους καταναλωτές και συνεπώς μειώνει το ποσό του κινδύνου που επωμίζεται.

Τώρα, κατά μέσο όρο, θα καούν 10 σπίτια το χρόνο, επομένως κατά μέσο όρο καθένας από τα 1.000 άτομα θα καταβάλει \$100 το χρόνο. Αυτό, όμως, συμβαίνει μόνο κατά μέσο όρο. Πιθανόν κάποια χρόνια να υπάρξουν 12 απώλειες και κάποια άλλα χρόνια 8 απώλειες. Η

πιθανότητα ότι ένα άτομο θα πρέπει να πληρώσει, ας πούμε, περισσότερα από \$200 σ' ένα χρόνο είναι πολύ μικρή, ακόμα, όμως, και έτσι ο κίνδυνος είναι υπαρκτός.

Υπάρχει, όμως, ένας τρόπος διαφοροποίησης και αυτού του κινδύνου. Έστω ότι οι ιδιοκτήτες σπιτιών συμφωνούν να καταβάλουν σταθερά \$100 το χρόνο, ανεξάρτητα από αν υπάρχουν ή δεν υπάρχουν απώλειες. Μπορούν μ' αυτό τον τρόπο να δημιουργήσουν ένα χρηματικό απόθεμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα χρόνια όπου οι φωτιές είναι πολλαπλάσιες. Θα καταβάλλουν σταθερά \$100 το χρόνο, και κατά μέσο όρο τα χρήματα αυτά θα είναι αρκετά για να αποζημιώνονται οι ιδιοκτήτες για τις πυρκαγιές.

Όπως βλέπετε, έχουμε κάτι που μοιάζει πολύ με μια συνεταιριστική ασφαλιστική εταιρεία. Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μερικά ακόμη χαρακτηριστικά: η ασφαλιστική εταιρεία επενδύει το χρηματικό της απόθεμα σε περιουσιακά στοιχεία που της αποφέρουν τόκους, η ουσία, όμως, της ασφαλιστικής εταιρείας είναι σαφώς παρούσα.

12.8 Ο ρόλος του χρηματιστηρίου

Το χρηματιστήριο παίζει ένα ρόλο παρόμοιο με αυτόν της αγοράς ασφαλειών, με την έννοια ότι επιτρέπει τη διασπορά του κινδύνου. Θυμηθείτε ότι στο Κεφάλαιο ΙΙ υποστηρίξαμε ότι το χρηματιστήριο επιτρέπει στους αρχικούς ιδιοκτήτες των εταιρειών να μετατρέψουν τη διαχρονική ροή της απόδοσής τους σε μια εφάπαξ πληρωμή. Το χρηματιστήριο τούς επιτρέπει επίσης να μετατρέψουν την επικίνδυνη θέση τού να έχουν επενδύσει όλο τους τον πλούτο σε μια επιχείρηση, σε μια κατάσταση όπου μπορούν να επενδύσουν σε μια ποικιλία περιουσιακών στοιχείων. Οι αρχικοί ιδιοκτήτες της εταιρείας έχουν ένα κίνητρο να εκδώσουν μετοχές της εταιρείας τους, ούτως ώστε να επιμερίσουν τον κίνδυνο της εταιρείας σ' ένα μεγάλο αριθμό μετόχων.

Αντίστοιχα, οι τελευταίοι μέτοχοι μιας εταιρείας μπορούν να χρησιμοποιήσουν το χρηματιστήριο για να ανακατανεύρουν τους κινδύνους του. Αν η εταιρεία της οποίας κατέχετε μετοχές ακολουθεί μια πολιτική υπέρμετρα επικίνδυνη κατά τις εκτιμήσεις σας —ή υπέρμετρα συντηρητική— μπορείτε να πωλήσετε αυτές τις μετοχές και να αγοράσετε άλλες.

Στην περίπτωση της ασφάλισης, ένα άτομο ήταν σε θέση να μειώσει τον κίνδυνό του στο μηδέν με την αγορά ασφάλισης. Μ' ένα σταθερό ασφάλιστρο \$100, το άτομο θα μπορούσε να έχει πλήρη ασφάλιση για μια απώλεια \$10.000. Αυτό ισχύει γιατί κατά βάση συνολικά δεν υπάρχει κανένας κίνδυνος: αν η πιθανότητα απώλειας είναι 1%, τότε, κατά μέσο όρο, 10 στους 100 ανθρώπους θα υποστούν μια απώλεια — απλά δεν γνωρίζουμε ποιοι συγκεκριμένα.

Στην περίπτωση του χρηματιστηρίου, υπάρχει ένας κίνδυνος για το σύνολο. Είναι δυνατό μια χρονιά το χρηματιστήριο να πάει καλά σαν σύνολο και μια άλλη να πάει άσχημα. Κάποιος πρέπει να διατρέξει αυτό το είδος κινδύνου. Το χρηματιστήριο προσφέρει έναν τρόπο για μεταφορά επενδύσεων που ενέχουν κίνδυνο από ανθρώπους που δεν θέλουν να διατρέχουν κίνδυνο σε ανθρώπους που είναι διατεθειμένοι να διατρέχουν κίνδυνο.

Βεβαίως, σε λίγους ανθρώπους έξω από το Λας Βέγκας *αρέσει* να διατρέχουν κίνδυνο: οι περισσότεροι άνθρωποι αποστρέφονται τον κίνδυνο. Επομένως, το χρηματιστήριο επιτρέπει στους ανθρώπους να μεταφέρουν τον κίνδυνο από αυτούς που δεν θέλουν να τον διατρέχουν σε εκείνους που είναι διατεθειμένοι να τον διατρέξουν, αν αποζημιωθούν αρκετά γι' αυτό. Θα διερευνήσουμε περαιτέρω την ιδέα αυτή στο επόμενο κεφάλαιο.

Περίληψη

1. Η κατανάλωση σε διαφορετικές καταστάσεις πραγμάτων μπορεί να θεωρηθεί ως καταναλωτικά αγαθά, και όλη η ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων είναι δυνατόν να εφαρμοστεί στην περίπτωση της επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας.
2. Ωστόσο, η συνάρτηση ωφέλειας που συνοψίζει τη συμπεριφορά κατά την επιλογή σε συνθήκες αβεβαιότητας ενδέχεται να έχει μια ειδική δομή. Συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση ωφέλειας είναι γραμμική ως προς τις πιθανότητες, τότε η αποδιδόμενη σ' ένα τυχερό παιχνίδι ωφέλεια θα είναι ακριβώς η προσδοκώμενη ωφέλεια των διαφόρων ενδεχομένων.
3. Η καμπυλότητα της συνάρτησης προσδοκώμενης ωφέλειας περιγράφει τη στάση του καταναλωτή απέναντι στον κίνδυνο. Αν η συνάρτηση είναι κοίλη, ο καταναλωτής αποφεύγει τον κίνδυνο, αν είναι κυρτή, ο καταναλωτής επιδιώκει τον κίνδυνο.
4. Χρηματοπιστωτικοί θεσμοί, όπως η αγορά ασφαλειών και το χρηματιστήριο, παρέχουν στους καταναλωτές τρόπους διαφοροποίησης και διασποράς του κινδύνου.

Ερωτήσεις

1. Πώς θα μπορούσε κανείς να φτάσει στα σημεία κατανάλωσης αριστερά του αποθέματος, στο Σχήμα 12.1;
2. Ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις ωφέλειας έχουν την ιδιότητα της προσδοκώμενης ωφέλειας; (α) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = a(\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2)$, (β) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2^2$, (γ) $u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2 + 17$.
3. Σ' ένα άτομο που αποφεύγει τον κίνδυνο προσφέρεται η επιλογή μεταξύ ενός τυχερού παιχνιδιού που δίνει την ευκαιρία κέρδους \$1.000 με πιθανότητα 25% και ενός άλλου κέρδους \$100 με πιθανότητα 75% και μιας απολαβής \$325. Τι θα επιλέξει το άτομο αυτό;
4. Τι θα επέλεγε αν η απολαβή ήταν \$320;
5. Χαράξτε μια συνάρτηση ωφέλειας που παρουσιάζει μια συμπεριφορά που επιδιώκει τους μικρούς κινδύνους και αντίστοιχα μια συμπεριφορά που αποφεύγει τους μεγάλους κινδύνους.

6. Γιατί θα ήταν ίσως δυσκολότερο για μια ομάδα γειτόνων να αυτασφαλιστεί κατά της πλημμύρας απ' ό,τι κατά της πυρκαγιάς;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ας εξετάσουμε ένα απλό πρόβλημα για να αποδείξουμε τις αρχές της μεγιστοποίησης της προσδοκώμενης ωφέλειας. Έστω ότι ο καταναλωτής έχει κάποιο πλούτο w και σκέφτεται να επενδύσει κάποιο ποσό x σ' ένα περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο. Το περιουσιακό αυτό στοιχείο θα μπορούσε να αποδώσει r_g στο «καλό» ενδεχόμενο και r_b στο «κακό» ενδεχόμενο. Θεωρήστε το r_g ως μια θετική απόδοση – το περιουσιακό στοιχείο αυξάνεται σε αξία, και το r_b ως μια αρνητική απόδοση – μια μείωση της αξίας του.

Επομένως, ο πλούτος του καταναλωτή στο καλό και στο κακό ενδεχόμενο θα είναι:

$$W_g = (w - x) + x(1 + r_g) = w + xr_g$$

$$W_b = (w - x) + x(1 + r_b) = w + xr_b.$$

Έστω ότι το καλό ενδεχόμενο πραγματοποιείται με πιθανότητα π και το κακό με πιθανότητα $(1 - \pi)$. Τότε η προσδοκώμενη ωφέλεια, αν ο καταναλωτής αποφασίσει να επενδύσει x δολάρια, είναι

$$EU(x) = \pi u(w + xr_g) + (1 - \pi)u(w + xr_b).$$

Ο καταναλωτής θέλει να επιλέξει το x για να μεγιστοποιήσει αυτή την έκφραση.

Διαφορίζοντας ως προς x , βρίσκουμε τον τρόπο μεταβολής της ωφέλειας σε συνάρτηση με τη μεταβολή x

$$EU'(x) = \pi u'(w + xr_g)r_g + (1 - \pi)u'(w + xr_b)r_b. \quad (12.3)$$

Η δεύτερη παράγωγος της ωφέλειας ως προς x είναι

$$EU''(x) = \pi u''(w + xr_g)r_g^2 + (1 - \pi)u''(w + xr_b)r_b^2. \quad (12.4)$$

Αν ο καταναλωτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, η συνάρτηση ωφέλειάς του θα είναι κοίλη, πράγμα που σημαίνει ότι $u''(w) < 0$ για κάθε επίπεδο του πλούτου. Επομένως, η δεύτερη παράγωγος της προσδοκώμενης ωφέλειας είναι αναμφισβήτητα αρνητική. Η προσδοκώμενη ωφέλεια θα είναι κοίλη συνάρτηση του x .

Ας εξετάσουμε τη μεταβολή της προσδοκώμενης ωφέλειας για το πρώτο δολάριο που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο. Είναι ακριβώς η εξίσωση (12.3) στην οποία η παράγωγος υπολογίζεται για $x = 0$.

$$\begin{aligned} EU'(0) &= \pi u'(w)r_g + (1 - \pi)u'(w)r_b \\ &= u'(w)[\pi r_g + (1 - \pi)r_b]. \end{aligned}$$

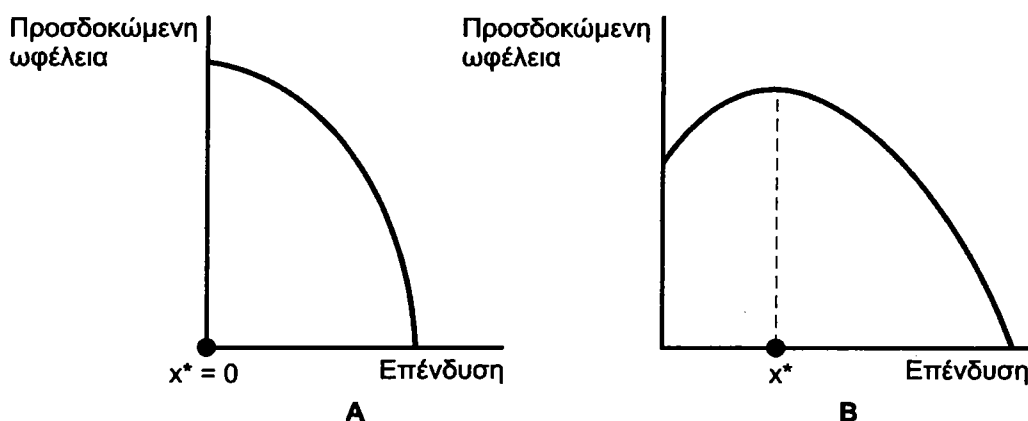
Η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι η **προσδοκώμενη απόδοση** του περιουσιακού στοιχείου. Αν η προσδοκώμενη απόδοση του περιουσιακού στοιχείου είναι αρνητική, η προσδοκώμενη ωφέλεια πρέπει να μειώνεται όταν το πρώτο δολάριο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο. Εφόσον, όμως, η δεύτερη παράγωγος της προσδοκώμενης ωφέλειας είναι αρνητική λόγω της κοίλης καμπυλότητας, η ωφέλεια πρέπει να συνεχίσει να μειώνεται καθώς θα επενδύονται πρόσθετα δολάρια.

Βρίσκουμε έτσι ότι αν η προσδοκώμενη αξία ενός τυχερού παιχνιδιού είναι αρνητική, ένας καταναλωτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα έχει την υψηλότερη προσδοκώμενη ωφέλεια όταν $x^* = 0$: δεν θα θέλει να συμμετέχει σε μια ζημιογόνο πρόταση.

Από την άλλη, αν η προσδοκώμενη απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου είναι θετική, η αύξηση του x από το μηδέν θα αυξήσει την προσδοκώμενη ωφέλεια. Θα θέλει επομένως να επενδύσει κάτι στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο, ανεξάρτητα από το πόσο αποστρέφεται τον κίνδυνο.

Η προσδοκώμενη ωφέλεια ως συνάρτηση του x απεικονίζεται στο Σχήμα 12.4. Στο Σχήμα 12.4Α, η προσδοκώμενη απόδοση είναι αρνητική και η άριστη επιλογή είναι $x^* = 0$. Στο 12.4Β, η προσδοκώμενη απόδοση είναι θετική σε κάποιο διάστημα τιμών, έτσι, λοιπόν, ο καταναλωτής θέλει να επενδύσει ένα θετικό ποσό x^* στο περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο.

Σχήμα 12.4



Επένδυση σε ένα περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο. Στο πλαίσιο Α, η άριστη επένδυση είναι μηδέν, αλλά, στο πλαίσιο Β, ο καταναλωτής θέλει να επενδύσει ένα θετικό ποσό.

Το άριστο ποσό επένδυσης για έναν καταναλωτή θα προσδιορίζεται από τη συνθήκη, σύμφωνα με την οποία η παράγωγος της προσδοκώμενης ωφέλειας ως προς x θα είναι ίση με μηδέν. Εφόσον η δεύτερη παράγωγος της ωφέλειας είναι αυτόματα αρνητική λόγω της κοίλης καμπυλότητας, το σημείο αυτό θα είναι ένα ολικό μέγιστο.

Εξισώνοντας την (12.3) με μηδέν, έχουμε

$$EU'(x) = \pi u'(w + xr_g)r_g + (1 - \pi)u'(w + xr_b)r_b = 0. \quad (12.5)$$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει την άριστη επιλογή του x για τον δεδομένο καταναλωτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η επίδραση της φορολογίας στην επένδυση σε περιουσιακά στοιχεία που ενέχουν κίνδυνο

Πώς συμπεριφέρεται το επενδυόμενο ποσό σ' ένα περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο όταν φορολογήσετε την απόδοσή του; Αν το άτομο καταβάλλει φόρους με συντελεστή t , οι μετά τους φόρους αποδόσεις θα είναι $(1 - t)r_g$ και $(1 - t)r_b$. Επομένως, η συνθήκη πρώτης τάξης που προσδιορίζει την άριστη επένδυσή του, x , θα είναι

$$EU'(x) = \pi u'(w + x(1 - t)r_g)(1 - t)r_g + (1 - \pi)u'(w + x(1 - t)r_b)(1 - t)r_b = 0.$$

Με απαλοιφή των όρων $(1 - t)$, έχουμε

$$EU'(x) = \pi u'(w + x(1 - t)r_g)r_g + (1 - \pi)u'(w + x(1 - t)r_b)r_b = 0. \quad (12.6)$$

Ας συμβολίσουμε τη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης χωρίς φόρους –όταν $t = 0$ – με x^* και τη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης με φόρους με $\hat{x}$. Ποια είναι η σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$;

Η πρώτη σας αντίδραση ίσως είναι να σκεφτείτε ότι $x^* > \hat{x}$ –ότι δηλ. η φορολόγηση ενός περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο θα τείνει να αποθαρρύνει την επένδυση σ' αυτό. Αποδεικνύεται, όμως, ότι αυτό είναι τελείως λάθος! Η φορολόγηση ενός περιουσιακού στοιχείου που ενέχει κίνδυνο στην πραγματικότητα θα ενθαρρύνει την επένδυση σ' αυτό!

Υπάρχει, μάλιστα, μια ακριβής σχέση μεταξύ x^* και $\hat{x}$. Πρέπει να είναι

$$\hat{x} = \frac{x^*}{1 - t}.$$

Η απόδειξη συνίσταται στο να σημειώσουμε απλά ότι αυτή η τιμή του $\hat{x}$ ικανοποιεί τη συνθήκη πρώτης τάξης για την άριστη επιλογή όταν υπάρχει φόρος. Αντικατάσταση αυτής της τιμής στην εξίσωση (12.6) μας δίνει

$$\begin{aligned} EU'(\hat{x}) &= \pi u'\left(w + \frac{x^*}{1 - t}(1 - t)r_g\right)r_g \\ &\quad + (1 - \pi)u'\left(w + \frac{x^*}{1 - t}(1 - t)r_b\right)r_b \\ &= \pi u'(w + x^*r_g)r_g + (1 - \pi)u'(w + x^*r_b)r_b = 0, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το x^* είναι η άριστη λύση όταν δεν υπάρχει φόρος.

Τι συμβαίνει εδώ; Πώς μπορεί η επιβολή ενός φόρου να αυξήσει το ποσό της επένδυσης σ' ένα περιουσιακό στοιχείο που ενέχει κίνδυνο; Να τι συμβαίνει. Όταν επιβάλλεται ο φόρος, το άτομο θα έχει λιγότερο κέρδος στο ευνοϊκό ενδεχόμενο, θα έχει, όμως, και λιγότερη απώλεια στο δυσμενές ενδεχόμενο. Πολλαπλασιάζοντας την αρχική του επένδυση επί $1/(1 - t)$, ο καταναλωτής μπορεί να αναπαραγάγει την ίδια μετά το φόρο απόδοση που είχε και πριν την επιβολή του φόρου. Ο φόρος μειώνει την προσδοκώμενη απόδοσή του, μειώνει, όμως, και τον κίνδυνό του. Αυξάνοντας την επένδυσή του, ο καταναλωτής μπορεί να έχει ακριβώς το ίδιο πρότυπο απόδοσης που είχε και προηγουμένως, και επομένως να εξουδετερώσει τελείως την επίδραση του φόρου. Η φορολογία μιας επένδυσης που ενέχει κίνδυνο αντιπροσωπεύει τη φορολογία ενός κέρδους όπου η απόδοση είναι θετική – αντιπροσωπεύει, όμως, μια επιδότηση της ζημίας όταν η απόδοση είναι αρνητική.

