

Οικονομική της Ασφάλισης

Υπολογιστικά θέματα Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Η θεωρία της αναμενόμενης χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο αριθμητικών ασκήσεων που εξετάζουν την κατανόηση και βασικές μαθηματικές δεξιότητες. **Τέτοιες ασκήσεις μπορεί να πλαισιώσουν και θέματα εξετάσεων.**

Ακολουθεί σειρά λυμένων ασκήσεων που δίνουν μια ιδέα του πώς προσεγγίζονται τέτοιες ασκήσεις. **Οι ασκήσεις αυτές θα πρέπει να διαβαστούν παράλληλα με τις σημειώσεις της ενότητας 3 και 4.**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Ένα άτομο έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x) = \ln e^x$. Εάν είναι πολύ τυχερός κερδίζει 100€, εάν είναι τυχερός κερδίζει 30 ενώ άμα είναι άτυχος κερδίζει 20€. Είναι άτυχος με πιθανότητα 20% και πολύ τυχερός με πιθανότητα 30%. Η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι:

(α) 16 (b) 49 (c) 87.2 (d) 9.2 (e) 0 (f) δεν υπάρχει λύση

Λύση

$$EU = 0.2u(20) + 0.3u(100) + 0.5u(30) = 0.2(\ln e^{20}) + 0.3(\ln e^{100}) + 0.5(\ln e^{30}) = 49$$

2. Ένας επενδυτής με συνάρτηση χρησιμότητας $u(w) = \ln(w)$ και πλούτο ίσο με 4€ ποντάρει 2€ σε μια μετοχή. Για να ποντάρει στην μετοχή η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει είναι:

(α) 0.5 (b) 1.09 (c) 0.63 (d) 0.69 (e) 0 (f) δεν υπάρχει λύση

Λύση

$$\begin{aligned} EU &= 0 \rightarrow \\ EU &= pu(w+2) + (1-p)u(w-2) = 0 \rightarrow \\ EU &= pu(4+2) + (1-p)u(4-2) = 0 \rightarrow \\ EU &= p\ln(6) + (1-p)\ln(2) = 0 \rightarrow \\ p\ln(6) + \ln(2) - p\ln(2) &= 0 \rightarrow \\ p &= 0.63 \end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση χρησιμότητας κάποιου είναι $U(W)=3W$. Ο πλούτος του είναι 3000 € και έχει 10% πιθανότητα να τα χάσει όλα εξαιτίας ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Το μέγιστο ποσό ασφάλισης που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για πλήρη ασφάλιση είναι:

a. 100 €
b. 200 €
c. 300 €
d. 600 €
e. 900 €

Λύση

$$U(w) = 3w \rightarrow$$

Για να βρούμε την στάση του ατόμου απέναντι στο ρίσκο υπολογίζουμε την

$$U''(w) \rightarrow U''(w) = 0 \rightarrow \text{ουδέτερος στο ρίσκο} \text{ — } risk\ neutral$$

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.1(3000) + 0.9(0) = 300$$

Αφού είναι ουδέτερος στο ρίσκο (risk neutral), η μέγιστη τιμή θα είναι ίση με 300 €

4. Στην θεωρία παιγνίων, η κατάσταση κατά την οποία ο ένας παίκτης μπορεί να κερδίσει αυτό που ο άλλος χάνει, λέγεται:
- a. Δίλλημα του φυλακισμένου
 - b. Μάχη των φύλων
 - c. Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος
 - d. S.O.S. Μόσχα καλεί Πεντάγωνο

5. Κάποιος που αποστρέφεται τον κίνδυνο έχει συνάρτηση χρησιμότητας που παρουσιάζει:

- a. Σταθερή οριακή χρησιμότητα του πλούτου
- b. Μηδενική οριακή χρησιμότητα του πλούτου
- c. Αυξανόμενη οριακή χρησιμότητα του πλούτου
- d. Μειούμενη οριακή χρησιμότητα του πλούτου

Δηλαδή κυρτή συνάρτηση χρησιμότητας. €100 αξίζουν περισσότερο αν είσαι φτωχός παρά αν είσαι δισεκατομμυριούχος.

Αν ήταν ουδέτερος θα ήταν γραμμική (σταθερή οριακή χρησιμότητα).

6. Για κάποιον με πλούτο 10000 € η ανταγωνιστική τιμή για πλήρη ασφάλιση έναντι ζημιάς 3600 € με πιθανότητα 50% είναι:
- a. 1800 €
 - b. 1900 €
 - c. 3200 €
 - d. 5000 €
 - e. Τίποτα από τα παραπάνω

Λύση

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.5(3600) + 0.5(0) = 1800$$

Άρα η ανταγωνιστική τιμή θα είναι 1800 €

7. Η συνάρτηση χρησιμότητας κάποιου είναι $U(W)=W^2$. Ο πλούτος του είναι 560 € και έχει 50% πιθανότητα να χάσει 480 € εξαιτίας ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Το μέγιστο ποσό ασφάλισης που είναι διατεθειμένος να πληρώσει είναι:

- a. 160 €

- b. 360 €
- c. 240 €
- d. 200 €
- e. Τίποτα από τα παραπάνω

Λύση

$$U(w) = w^2 \rightarrow$$

Για να βρούμε την στάση του ατόμου απέναντι στο ρίσκο υπολογίζουμε την $U''(w) > 0 \rightarrow$ επιδιώκει το ρίσκο. Είναι *risk lover*.

(α) **Γρήγορη λύση** χωρίς πολλούς υπολογισμούς:

Αν επιδιώκει το ρίσκο, γνωρίζουμε ότι το άτομο διατεθειμένο να πληρώσει για ασφάλιση μόνο αν το ασφάλιστρο είναι χαμηλότερο από την αναμενόμενη ζημία. Η αναμενόμενη ζημία $0,5 \cdot 480 = 240$. Η μόνη εκδοχή που είναι καθαρά μικρότερη είναι 160. (Το 240 είναι ίσο).

(β) **Αργή λύση** με πολλούς υπολογισμούς για όσους έχουν χρόνο:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα χωρίς ασφάλιση

$$E(U) = 156800 + 320 = 160000$$

Βήμα 2: Αλγεβρική παράσταση του μέγιστου ποσού ασφάλιση G

$$(560 - G)^2 = 160000$$

Βήμα 3: επίλυση ως προς το G - τετραγωνική ρίζα

$$560 - G = 400, \quad G = 160$$

8. Σε ένα πείραμα ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να διαλέξουν ένα από τα δύο, (α) 1εκ.€ σίγουρα ή (β) 3 εκ.€ με πιθανότητα 50%. Οι περισσότεροι διάλεξαν το (α). Παραβιάζει η στάση αυτή την θεωρία των von Neumann και Morgenstern; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. Σημαίνει αυτό ότι δεν ισχύει ο ορθολογισμός και συνεπώς δεν λειτουργεί το 'άόρατο χέρι' και η αγορά ασφάλισης;

Λύση

Ορθολογισμός -> μεγιστοποίηση χρησιμότητας

Δηλαδή, Αναμενόμενη τιμή (β) μεγαλύτερη από (α)

Επιλογή (α) -> αποστροφή στο ρίσκο risk aversion

9. Ο Αρης και η Βούλα προβληματίζονται αν θα παντρευτούν. Η Βούλα δηλώνει ότι πάντοτε ακολουθεί την αναμενόμενη ωφέλεια και μεγιστοποιεί τον λογάριθμο του εισοδήματός της. Ο Αρης συμφωνεί αλλά προσθέτει ότι εκείνος μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του εισοδήματός του. Η Βούλα λέει: 'Με τέτοιες διαφορές στην στάση απέναντι στο ρίσκο, δυστυχώς χωρίζουμε'. Ο Αρης διαμαρτύρεται λέγοντας ότι το τετράγωνο είναι απλή μονοτονική μετατροπή του λογαρίθμου, και άρα οι διαφορές δεν είναι ουσιαστικές. Ποιος έχει δίκιο;
- a. Ο Αρης.
 - b. Η Βούλα.
 - c. Ο Αρης έχει δίκιο για μεγάλα ρίσκα και άδικο για μικρά

- d. Η Βούλα έχει δίκιο για μικρά ρίσκα και άδικο για μεγάλα.
- e. Και οι δύο έχουν άδικο

Λύση

Βούλα $\rightarrow u(x) = \ln(x) \rightarrow$ risk averse Αποστρέφεται το ρίσκο

Άρης $\rightarrow u(x) = x^2 \rightarrow$ risk lover επιδιώκει το ρίσκο

Αρα έχει η Βούλα δίκιο γιατί δεν θα συμφωνούν ποτέ.

10. Ο Γιώργος Σούζας έχει μια Φεράρι που αξίζει €100.000. Είναι ιδιαίτερα απρόσκετος και αφήνει τις πόρτες ανοικτές και το κλειδί στην μηχανή με αποτέλεσμα η πιθανότητα κλοπής να είναι 0,5. Αν η Φεράρι κλαπεί, ξέρει ότι δεν θα την πάρει πίσω ποτέ. Ο Γιώργος έχει και άλλη περιουσία ύψους €100.000 και η εξίσωση χρησιμότητας von-Neumann Morgenstern για περιουσία είναι $u(W) = \ln(W)$. Αν ο ΓΣ μπορεί να ασφαλίσει ένα ποσό €K με ασφάλιστρο €0,6K. Πόση ασφάλιση θα αγοράσει;

- a. €0
- b. €100.000
- c. Περισσότερο από €0 αλλά λιγότερο από €50.000.
- d. Περισσότερο από €50.000 αλλά λιγότερο από €100.000.
- e. Ακριβώς €50,000.

Λύση

Πλούτος = 100.000

Αμάξι = 100.000

Συνολικός πλούτος (W) = 200.000

Ζημία (L) = 100.000

Πιθανότητα (p) = 0.5

$$E(W) = (1 - p)W + p(W - L) = 0.5(200.000) + 0.5(100.000) = 150.000$$

Χωρίς ασφάλιση

$$EU = (1 - p)u(W) + (p)u(W - L) = 0.5 \ln(200.000) + 0.5 \ln(100.000) \\ = 6.10 + 5.76 = 11.86$$

Με ασφάλιση

Η ασφάλιση (C) κοστίζει €0.6K άρα

$$U(W - C) = 11.86 \rightarrow \ln(200.000 - 0.6K) = 11.86 \rightarrow 200.000 - 0.6K \\ = 141.492 \rightarrow K = \frac{200.000 - 141.492}{0.6} \rightarrow \\ K = 97.512$$

Άρα θα αγοράσει κάλυψη για €97.512

11. Σε πείραμα της στάσης στο ρίσκο, δόθηκε η επιλογή: A) Χάνουν \$100 σίγουρα B) 50% πιθανότητα να κερδίσουν \$50, 50% πιθανότητα να χάσουν \$200. Η πλειοψηφία διάλεξε το B. πώς εξηγείται αυτό;

- a. Οι άνθρωποι έχουν περισσότερη αποστροφή στην απώλεια παρά στο ρίσκο
- b. Το B έχει μικρότερη αναμενόμενη απώλεια από το A.
- c. Το παράδειγμα είναι συμβατό με την αποστροφή του ρίσκου στις απώλειες
- d. Το B έχει αναμενόμενο κέρδος σε αντίθεση με την σίγουρη απώλεια του A

- e. Η συμπεριφορά αυτά παραβιάζει το Βασικό Αξίωμα της Εκφρασμένης Προτίμηση

Λύση

Η επιλογή του B, καταδεικνύει την τάση των ατόμων να δίνουν μεγαλύτερο βάρος στα πιθανά κέρδη έναντι ορισμένων ζημιών. Σχέση με συμπεριφορές που χαρακτηρίζονται από αποστροφή στον κίνδυνο. (Κυρτές προτιμήσεις)

12. Ο Ζήσης Αλογομούρης έχει αποστροφή στο ρίσκο. Μπορεί να συμμετέχει σε στοίχημα όπου με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ θα χάσει €1000 και με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ θα κερδίσει €500.
- a. Αφού αποστρέφεται το ρίσκο δεν θα στοιχηματίσει σε καμιά περίπτωση.
 - b. Αφού η αναμενόμενη αξία είναι θετική θα στοιχηματίσει.
 - c. Αν τα αρχικά του περιουσιακά στοιχεία είναι άνω του €1500 θα στοιχηματίσει.
 - d. Αν τα αρχικά του περιουσιακά στοιχεία είναι κάτω του €1500, τότε θα στοιχηματίσει.
 - e. Δεν υπάρχει επαρκής πληροφόρηση για να εκτιμήσουμε αν θα στοιχηματίσει ή όχι.

Εξηγείστε την επιλογή σας.

Λύση - εξήγηση

- Θετική αναμενόμενη τιμή $E(X) = -250 + 375 = 125€$
- $EU = 0.25 \cdot U(-1000) + 0.75 \cdot U(+500)$.
- Αν δεν στοιχηματίσει θα έχει $U(I)$
- Αποστροφή σημαίνει $EU(\alpha\beta\acute{\epsilon}\beta\alpha\iota\omicron) < U(E(x))$
- Θα στοιχηματίσει αν $EU > U(I)$
- Όμως ακόμη και αν $I = 1500$, και έχει αποστροφή το τι ισχύει εξαρτάται από το πόση αποστροφή στο ρίσκο έχει
- Αρα επιλογή e – χρειαζόμαστε τη μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας

13. Η περιουσία της Ηλέκτρας είναι €600, αλλά υπάρχει μια πιθανότητα 0,25 ότι θα χάσει €100. Η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο. Της προσφέρεται ασφάλιση η οποία θα την αποζημιώσει πλήρως για την απώλειά της.
- a. Η Ηλέκτρα θα ήταν διατεθειμένη να πληρώσει λίγο περισσότερο από €25 για να ασφαλιστεί
 - b. Η Ηλέκτρα θα πλήρωνε ως €25 για την ασφάλιση αυτή.
 - c. Δεδομένου ότι η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο, δεν θα πλήρωνε τίποτε για να ασφαλιστεί.
 - d. Αφού δεν γνωρίζουμε την ακριβή συνάρτηση χρησιμότητας της Ηλέκτρας, αδυνατούμε να εκφράσουμε γνώμη για κάποια τιμή.
 - e. Η Ηλέκτρα δεν θα πλήρωνε περισσότερο από € 16,66 για την ασφάλιση.

Λύση

Η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο

$$U(w) \rightarrow \text{risk neutral}$$

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.25(100) = 25$$

Άρα, το μέγιστο ποσό που είναι διατεθειμένη να δώσει είναι €25

14. Ο μεγάλος ποδοσφαιριστής Kalã έχει προτιμήσεις von-Neumann Morgenstern με συνάρτηση χρησιμότητας $U(c) = c^{1/2}$. Αν ο Kalã καταφέρει να μην τραυματιστεί σε αυτό το πρωτάθλημα, το εισόδημά του θα είναι €2.5 εκ. Αν τραυματιστεί το εισόδημά του θα περιοριστεί στα έσοδα από πωλήσεις ποπ-κορν στους αγώνες, δηλαδή €100,000. Η πιθανότητα τραυματισμού είναι 0,1 και η πιθανότητα αρτιμέλειας 0,9. Η αναμενόμενη χρησιμότητα του Kalã είναι
- 100.000
 - 9.020
 - Μεταξύ 24 εκ και 25 εκ.
 - 4,510
 - 18.040

Λύση

Η αναμενόμενη χρησιμότητα θα είναι

$$EU = 0.9u(25) + 0.1u(1) = 0.9(25^{0.5}) + 0.1(1^{0.5}) = 4.5 + 0.1 = 4.51$$

15. Η Νίκη έχει προτιμήσεις von-Neumann Morgenstern $U(c_A, c_B, p_A, p_B) = p_A v(c_A) + p_B v(c_B)$, όπου p_A και p_B είναι πιθανότητες των γεγονότων A και B και c_A και c_B είναι καταναλώσεις εξαρτώμενες αν θα προκύψει το γεγονός A ή B αντίστοιχως. Για $c \leq €2.000$, $v(c) = 2c$ και για $c > €2.000$, $v(c) = 2.000 + c$.
- Για στοιχήματα που δεν έχουν πιθανότητα να οδηγήσουν στην περιουσία της να υπερβεί τα €2000, η Νίκη θα αγοράσει κάθε λαχείο που έχει θετική αναμενόμενη καθαρή αξία.
 - Η Νίκη θα αποστρέφεται τον κίνδυνο αν η περιουσία της είναι μικρότερη από €2000 και θα τον επιδιώκει αν η περιουσία της είναι μεγαλύτερη από €2.000.
 - Η Νίκη θα είναι ουδέτερη απέναντι στο ρίσκο αν η περιουσία της είναι μικρότερη από €2000 και θα τον αποστρέφεται αν η περιουσία της μεγαλύτερη από €2.000.
 - Η Νίκη δεν θα δεχτεί κανένα στοιχείο αν υπάρχει πιθανότητα ότι θα καταλήξει να της αφήσει περιουσία λιγότερη από €4000.
 - Κανένα από τα παραπάνω.

Λύση

- Συνάρτηση χρησιμότητας risk neutral
- Σύγκριση με αναμενόμενη τιμή $E(X)$

16. Ο Παύλος έχει εξίσωση χρησιμότητας $U(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$, όπου c_1 και c_2 είναι η κατανάλωσή του στην περίοδο 1 και περίοδο 2 αντίστοιχα. Ο Παύλος έχει εισόδημα €189

την περίοδο 1 και €63 την περίοδο 2, ενώ δεν υπάρχει αβεβαιότητα. Μπορεί να δανειστεί ή να δανείσει με επιτόκιο 10%. Δεν υπάρχει πληθωρισμός.

- a. Θα αποταμιεύσει €60
- b. Θα δανειστεί €60
- c. Ούτε θα δανείσει ούτε θα δανειστεί
- d. Θα αποταμιεύσει €124
- e. Τίποτε από τα παραπάνω.

Λύση

Έστω $y_1 = 189$, $y_2 = 63$, $r = 0.1$

- Εισοδηματικός περιορισμός

$$\begin{aligned}c_1 + \frac{c_2}{1+r} &= y_1 + \frac{y_2}{1+r} \rightarrow \\c_1 + \frac{c_2}{1.1} &= 189 + \frac{63}{1.1} \rightarrow \\c_1 + \frac{c_2}{1.1} &= 246.27 \rightarrow 1.1c_1 + c_2 = 271\end{aligned}$$

- Μεγιστοποίηση συνάρτησης χρησιμότητας

Ο Παύλος για να μεγιστοποιήσει την $U(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$ θα θεωρήσει $c_1 = c_2$ καθώς επιθυμεί ίδια κατανάλωση στα 2 έτη. Άρα,

$$1.1c_1 + c_1 = 271 \rightarrow 2.1c_1 = 271 \rightarrow c_1 = 129.05$$

Οπότε θα καταναλώσει την περίοδο 1 129€ από τα συνολικά €189 με αποτέλεσμα να αποταμιεύσει €60