

Άσκηση 3

(A)

Το μέγεθος των ζημιών, κατά το τρέχον έτος ενός ασφαλιστηρίου συμβόλαιου είναι τ.μ. X με σ.λ.λ. $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Κατά το επόμενο έτος οι ζημιές μεταβάλλονται ομοιόμορφα κατά 10% λόγω της ύπαρξης ενός πληθωρισμού παράγοντος. Για το συμβόλαιο υπάρχει ένα απαράρτιο ποσό $d = 110$ ν.μ. και ένα όριο ίδιας κλάσης $m = 1100$ ν.μ. για όλες τις ζημιές. Να βρεθούν:

- Η αναμενόμενη αποζημίωση ανά ζημιά
- Η αναμενόμενη αποζημίωση ανά πληρωμή
- Η σ.λ.λ. των αποζημιώσεων κατά το επόμενο έτος ανά πληρωμή

Λύση

Για το έτος πριν την επίδραση του πληθωρισμού, η αποζημίωση Y_L ανά ζημιά είναι:

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X - d & , d < X \leq m \\ m - d & , X > m \end{cases} \quad \text{και με πληθωρισμό} \quad Y_L = \begin{cases} 0 & , (1+r)X \leq d \\ (1+r)X - d & , d < (1+r)X \leq m \\ m - d & , (1+r)X > m \end{cases}$$

Ισχύει ότι

$$Y_L = (X \wedge m) - (X \wedge d) \quad \text{και για την} \quad Y_{Lr} = (1+r) \cdot \begin{cases} 0 & , X \leq \frac{d}{1+r} \\ X - \frac{d}{1+r} & , \frac{d}{1+r} < X \leq \frac{m}{1+r} \\ \frac{m}{1+r} - \frac{d}{1+r} & , X > \frac{m}{1+r} \end{cases}$$

Ανταδίν

$$Y_{Lr} = (1+r) \cdot \left[(X \wedge \frac{m}{1+r}) - (X \wedge \frac{d}{1+r}) \right]$$

$$\text{Άρα} \quad E[Y_{Lr}] = (1+r) \cdot \left[E(X \wedge \frac{m}{1+r}) - E(X \wedge \frac{d}{1+r}) \right]$$

Έτσι για την αναμενόμενη αποζημίωση ανά πληρωμή, επειδή έχουμε

$$Y_{pr} = Y_{Lr} | Y_{Lr} > 0 \Rightarrow E[Y_{pr}] = E[Y_{Lr} | Y_{Lr} > 0] = \frac{E[Y_{Lr}]}{1 - F_{Y_{Lr}}(0)} \\ = \frac{E[Y_{Lr}]}{1 - F_X(\frac{d}{1+r})}$$

Έχουμε ότι $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0 \Rightarrow X \sim \text{Exp}(1)$

(B) (3)

$$\text{Άρα } E[X \wedge \alpha] = \int_0^{\alpha} 1 - F_X(x) dx = \int_0^{\alpha} e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\alpha}$$

Για τις τιμές των παραμέτρων $d=110$, $m=1100$, $r=0.1$ έχουμε ότι

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , 1.1 X \leq 110 \\ 1.1 X - 110 & , 110 \leq 1.1 X \leq 1100 \\ 990 & , 1.1 X > 1100 \end{cases}$$

α) Είναι

$$\begin{aligned} E[Y_L] &= 1.1 \cdot \left[E(X \wedge \frac{1100}{1.1}) - E(X \wedge \frac{110}{1.1}) \right] = \\ &= 1.1 \cdot \left[E(X \wedge 1000) - E(X \wedge 100) \right] = 1.1 \cdot [1 - e^{-1000} - 1 + e^{-100}] = \\ &= 1.1 \cdot \frac{e^{10} - 1}{e^{100}} \end{aligned}$$

β)

Η αναμενόμενη αποζημίωση ανά πληρωμή θα είναι :

$$E[Y_{pr}] = \frac{E[Y_L]}{1 - F_X(\frac{d}{1+r})} = \frac{1.1 \frac{e^{10} - 1}{e^{100}}}{1 - 1 + e^{-100}} = 1.1 (e^{10} - 1)$$

γ) Έχουμε ότι

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq 100 \\ 1.1 X - 100 & , 100 < X \leq 1000 \\ 990 & , X > 1000 \end{cases} \quad \text{και} \quad Y_{pr} = \begin{cases} \text{δωρίζεται} & , X \leq 100 \\ 1.1 X - 100 & , 100 < X \leq 1000 \\ 990 & , X > 1000 \end{cases}$$

Η τ.μ. $Y_{pr} \in (0, 990]$. Άρα

$$\begin{aligned} P(Y_{pr} = 990) &= P(Y_L = 990 | Y_L > 0) = P(X > 1000 | X > 100) = \\ &= \frac{P(X > 1000 \cap X > 100)}{P(X > 100)} = \frac{P(X > 1000)}{P(X > 100)} = \frac{e^{-1000}}{e^{-100}} = e^{-900} \end{aligned}$$

Για $y \in (0, 990)$ η σ.κ είναι

$$\begin{aligned} F_{Y_{pr}}(y) &= P(Y_{pr} \leq y) = P(1.1X - 110 \leq y \mid X > 100) = P\left(X \leq \frac{y+110}{1.1} \mid X > 100\right) \\ &= \frac{P\left(100 < X \leq \frac{y+110}{1.1}\right)}{P(X > 100)} = \frac{F_X\left(\frac{y+110}{1.1}\right) - F_X(100)}{1 - F_X(100)} \end{aligned}$$

Επομένως

$$f_{Y_{pr}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1.1(1 - F_X(100))} \cdot f_X\left(\frac{y+110}{1.1}\right) & , 0 < y < 990 \\ \frac{1 - F_X(1000)}{1 - F_X(100)} & , y = 990 \end{cases}$$

• Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

$$L(\theta) = f(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad , \quad l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i; \theta)]$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \dots \quad ($$

Άσκηση 1

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. από την αλτή κατανομή Pareto με σ.κ: $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{400}{x}\right)^\alpha$, $x > 400$, $\alpha > 0$.

α) Να βρεθεί η ευρίσκηση μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο α

β) Αν για δείγμα $n=5$ έχουμε λάβει τις τιμές:

420 530 609 715 998

να βρεθεί ο εμλ $\hat{\alpha}$.

Λύση

α) Η $f_{X_i}(x) = \frac{dF_{X_i}(x)}{dx} = \frac{\alpha 400^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x > 400$, $\alpha > 0$.

Άρα $L(\alpha) = f(x; \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha 400^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \alpha^n \cdot 400^{n\alpha} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-\alpha-1}$

Άρα $l(\alpha) = \ln L(\alpha) = n \ln \alpha + n\alpha \ln 400 - (\alpha+1) \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$

$$l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + n \ln 400 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \quad l''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} < 0$$

Θέτουμε $l'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\alpha} + n \ln 400 - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \Rightarrow$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \cdot \ln(400)}$$

β) Για τις τιμές που έχουμε λάβει και $n=5$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^5 \ln(x_i) = 32,20299$

Άρα $\hat{\alpha} = \frac{5}{32,20299 - 5 \cdot \ln(400)} = 2.226514$

• Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας στα Ομαδοποιημένα Δεδομένα

Ευρος j	Πλήθος
$[c_0, c_1]$	n_1
$[c_1, c_2]$	n_2
$\vdots$	$\vdots$
$[c_{j-1}, c_j]$	n_j
$\vdots$	$\vdots$
$[c_{k-1}, c_k]$	n_k

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^k [F(c_j; \theta) - F(c_{j-1}; \theta)]^{n_j}$$

Άσκηση 32 / Σελ 155

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται παρατηρήσεις ομαδοποιημένες σε τρία διαστήματα (κελιά). Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου

θ με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας :

α) Όταν έχουμε εκθετική κατανομή με παράμετρο θ

β) Όταν έχουμε ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, \theta)$

Ευρος i	f_i	F_i
$(0, 100]$	3	3
$(100, 200]$	3	6
$(200, \infty)$	2	8

Λύση

α) Η σ.κ. της εκθετικής είναι : $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0, \theta > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } L(\theta) &= \prod_{j=1}^3 [F(c_j; \theta) - F(c_{j-1}; \theta)]^{f_j} = [1 - e^{-\frac{100}{\theta}}]^3 \cdot [e^{-\frac{100}{\theta}} - e^{-\frac{200}{\theta}}]^3 \cdot [e^{-\frac{200}{\theta}}]^2 \\ &= (1 - e^{-\frac{100}{\theta}})^3 \cdot (e^{-\frac{100}{\theta}} (1 - e^{-\frac{100}{\theta}}))^3 \cdot e^{-\frac{400}{\theta}} = e^{-\frac{700}{\theta}} (1 - e^{-\frac{100}{\theta}})^6 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \ell(\theta) = \ln L(\theta) = -\frac{700}{\theta} + 6 \ln(1 - e^{-\frac{100}{\theta}}).$$

$$\ell'(\theta) = \frac{700}{\theta^2} + 6 \frac{-e^{-\frac{100}{\theta}} \cdot \frac{100}{\theta^2}}{1 - e^{-\frac{100}{\theta}}}. \quad \text{Θέτω } \ell'(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\theta^2} \left(700 + \frac{600 \cdot e^{-\frac{100}{\theta}}}{e^{-\frac{100}{\theta}} - 1} \right) = 0 \Rightarrow 700 + \frac{600 e^{-\frac{100}{\theta}}}{e^{-\frac{100}{\theta}} - 1} = 0 \Rightarrow$$

$$700 e^{-\frac{100}{\theta}} - 700 + 600 e^{-\frac{100}{\theta}} = 0 \Rightarrow 1300 e^{-\frac{100}{\theta}} = 700 \Rightarrow -\frac{100}{\theta} = \ln\left(\frac{7}{13}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-100}{\ln\left(\frac{7}{13}\right)} = 161,5407 \quad \left(\ell''(\theta) = -0.000222722 < 0 \right)$$

$$b) \Gamma_{1a} \quad X \sim U(0, \theta) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x}{\theta}, \quad x \in (0, \theta)$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad L(\theta) &= \left[\frac{100}{\theta} - \frac{0}{\theta} \right]^3 \cdot \left[\frac{200}{\theta} - \frac{100}{\theta} \right]^3 \cdot \left[\frac{\theta}{\theta} - \frac{200}{\theta} \right]^2 = \\ &= \left(\frac{100}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{100}{\theta} \right)^3 \cdot \left(1 - \frac{200}{\theta} \right)^2 = \frac{100^6}{\theta^6} \cdot \frac{(\theta - 200)^2}{\theta^2} = \frac{100^6 (\theta - 200)^2}{\theta^8} \end{aligned}$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = 6 \ln 100 + 2 \ln(\theta - 200) - 8 \ln \theta$$

$$\ell'(\theta) = \frac{2}{\theta - 200} - \frac{8}{\theta}, \quad \ell''(\theta) = -\frac{2}{(\theta - 200)^2} + \frac{8}{\theta^2}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\theta - 200} - \frac{8}{\theta} = 0 \Rightarrow 2\theta = 8(\theta - 200) \Rightarrow 6\theta = 1600$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{800}{3} = 266.667 \quad \left(\ell''\left(\frac{800}{3}\right) = -0.0003375 \right)$$

• Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας με Απαρτίδιο Ποσό

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{f_X(x_i; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)} \quad \text{ή} \quad \prod_{i=1}^n \frac{f_X(y_i + d; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)}$$

Άσκηση 2 (Παραλλαγή παρ. 54 σελ 157)

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαιο δείγμα από κατανομή Weibull με παραμέτρους γ και θ με γ γνωστή και θ άγνωστη. Η ασφαλιστική εταιρία κάνει εφαρμογή απαρτίδιου ποσού d . Να βρεθεί ο ε.μ.ν. της παραμέτρου θ .

Λύση

$$\text{Η σ.π.ν. της } X_i \text{ είναι: } f_{X_i}(x; \theta) = \theta \gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0, \theta > 0, \gamma > 0$$

$$\text{σ.κ. της είναι: } F_{X_i}(x; \theta) = 1 - e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0, \theta > 0, \gamma > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{f_{X_i}(x_i; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)} = \prod_{i=1}^n \frac{\theta \gamma x_i^{\gamma-1} e^{-\theta x_i^\gamma}}{e^{-\theta d^\gamma}} = \theta^n \gamma^n e^{n\theta d^\gamma} \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i^\gamma} \\ &= \theta^n \gamma^n \cdot e^{-\theta \left(\sum_{i=1}^n x_i^\gamma - n d^\gamma \right)} \end{aligned}$$