

$$b) \Gamma_{1a} \quad X \sim U(0, \theta) \Rightarrow F_X(x) = \frac{x}{\theta}, \quad x \in (0, \theta)$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad L(\theta) &= \left[\frac{100}{\theta} - \frac{0}{\theta} \right]^3 \cdot \left[\frac{200}{\theta} - \frac{100}{\theta} \right]^3 \cdot \left[\frac{\theta}{\theta} - \frac{200}{\theta} \right]^2 = \\ &= \left(\frac{100}{\theta} \right)^3 \cdot \left(\frac{100}{\theta} \right)^3 \cdot \left(1 - \frac{200}{\theta} \right)^2 = \frac{100^6}{\theta^6} \cdot \frac{(\theta - 200)^2}{\theta^2} = \frac{100^6 (\theta - 200)^2}{\theta^8} \end{aligned}$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = 6 \ln 100 + 2 \ln(\theta - 200) - 8 \ln \theta$$

$$\ell'(\theta) = \frac{2}{\theta - 200} - \frac{8}{\theta}, \quad \ell''(\theta) = -\frac{2}{(\theta - 200)^2} + \frac{8}{\theta^2}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\theta - 200} - \frac{8}{\theta} = 0 \Rightarrow 2\theta = 8(\theta - 200) \Rightarrow 6\theta = 1600$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{800}{3} = 266.667 \quad \left(\ell''\left(\frac{800}{3}\right) = -0.0003375 \right)$$

• Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας με Ανεπίτρεπτο Ποσό

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{f_X(x_i; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)} \quad \text{ή} \quad \prod_{i=1}^n \frac{f_X(y_i + d; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)}$$

Άσκηση 2 (Παραλλαγή παρ. 54 σελ 157)

Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Weibull με παραμέτρους γ και θ με γ γνωστή και θ άγνωστη. Η ασφαλιστική εταιρία κάνει εφαρμογή ανεπίτρεπτου ποσού d . Να βρεθεί ο ε.μ.ν. της παραμέτρου θ .

Λύση

$$\text{Η σ.π.ν. της } X_i \text{ είναι: } f_{X_i}(x; \theta) = \theta \gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0, \theta > 0, \gamma > 0$$

$$\text{σ.κ. της είναι: } F_{X_i}(x; \theta) = 1 - e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0, \theta > 0, \gamma > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{f_{X_i}(x_i; \theta)}{1 - F_X(d; \theta)} = \prod_{i=1}^n \frac{\theta \gamma x_i^{\gamma-1} e^{-\theta x_i^\gamma}}{e^{-\theta d^\gamma}} = \theta^n \gamma^n e^{n\theta d^\gamma} \cdot e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i^\gamma} \\ &= \theta^n \gamma^n \cdot e^{-\theta \left(\sum_{i=1}^n x_i^\gamma - n d^\gamma \right)} \end{aligned}$$

Άρα $l(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln \theta + n \ln \gamma - \theta \left[\sum_{i=1}^n x_i \gamma - n d \gamma \right]$

$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n x_i \gamma - n d \gamma \right)$. Θέλω $l'(\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i \gamma - n d \gamma}$

$l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$

• Μέθοδος Μεγίστης Πιθανότητας για Λογωπιμένα Δείγματα

$L(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \theta) \right] \cdot \left[1 - F(m; \theta) \right]^{n_2}$ όπου $n_1 = \# \text{ τιμών } x_i < m$
 $n_2 = \# \text{ τιμών } m.$

Άσκηση 3 (Παράλλαξη παρ 56 σελ 160)

Έστω οι τιμές 2, 4, 6, 8, 10, 11 παρατηρούνται από εκθετική κατανομή με παράμετρο $1/\theta$ και ακόμα τρεις τιμές 15, 15, 15 λογωπιμένες (με όριο ίδιας υπάρξης 15). Να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανότητας για την παράμετρο θ .

Λύση

Η σ.π.π. είναι $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$

σ.υ. είναι $F(x; \theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, \theta > 0$

$$L(\theta) = \left[\prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \theta) \right] \left[1 - F(m; \theta) \right]^{n_2} = \left[\prod_{i=1}^6 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} \right] \cdot \left(e^{-\frac{15}{\theta}} \right)^3 =$$

$$= \frac{1}{\theta^6} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} \cdot e^{-\frac{45}{\theta}} = \frac{1}{\theta^6} e^{-\frac{1}{\theta} (\sum x_i + 45)}$$

$l(\theta) = \ln L(\theta) = -6 \ln \theta - \frac{1}{\theta} (\sum x_i + 45)$

$l'(\theta) = \frac{-6}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \cdot 86$ $l''(\theta) = \frac{6}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot 86 = \frac{1}{\theta^2} \left(6 - \frac{172}{\theta} \right)$

$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta} \left(-6 + \frac{1}{\theta} 86 \right) = 0 \Rightarrow -6 + \frac{1}{\theta} 86 = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{86}{6} = \frac{43}{3}$

$l''(\hat{\theta}) = -6 < 0.$

- Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας για Λογωμμένα Δείγματα σε συνδυασμό με Ακαιρεζέο Ποσό.

$$L(\theta) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \theta) \right] \cdot [1 - F(m; \theta)]^{n_2}}{[1 - F(d; \theta)]^{n_1 + n_2}} \quad \begin{array}{l} \text{όπου } n_1 = \# \text{ τιμών } 0 < x_i - d < m - d \\ n_2 = \# \text{ τιμών } m - d \end{array}$$

Άσκηση 4

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαία δείγματα από σημίες που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ . Αν υποθέσουμε ότι n_1 είναι το πλήθος των τ.μ. στις οποίες εφαρμόζεται ακαιρεζέο ποσό d και n_2 είναι το πλήθος των τ.μ. που ξεπερνούν ένα όριο ίδιας κλίτησης m . (Υποθέτουμε ότι n_3 είναι το πλήθος των τ.μ. μικρότερες του d)

Να βρεθεί: α) Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ για το λογωμμένο δείγμα σε συνδυασμό με Ακαιρεζέο Ποσό.

β) Έστω ότι $d=10$, $m=40$ και $n=20$ οι τιμές από τις σημίες:

23,35	1,41	8,51	14,25	50,96	7,83	5,81	7,43
11,47	24,90	28,59	75,43	12,03	2,99	6,31	33,34
0,82	6,87	10,66	11,87				

Να βρεθεί η τιμή του ε.μ.η της παραμέτρου θ .

Λύση

α) Έχουμε ότι $f_{X_1}(x_i; \theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $x_i > 0, \theta > 0$ και $F_{X_1}(x_i; \theta) = 1 - e^{-\theta x_i}$

Άρα είναι:

$$L(\theta) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \theta) \right] \cdot [1 - F(m; \theta)]^{n_2}}{[1 - F(d; \theta)]^{n_1 + n_2}} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n_1} \theta e^{-\theta x_i} \right) (e^{-\theta m})^{n_2}}{(e^{-\theta d})^{n_1 + n_2}} =$$

$$= \theta^{n_1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n_1} x_i} e^{-\theta \cdot m \cdot n_2} e^{\theta \cdot d \cdot (n_1 + n_2)} = \theta^{n_1} e^{-\theta \left[\sum_{i=1}^{n_1} x_i + m \cdot n_2 - d \cdot (n_1 + n_2) \right]}$$

$$\Rightarrow \ell(\theta) = n_1 \cdot \ln \theta - \theta \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_1} x_i + m \cdot n_2 - d(n_1 + n_2) \right]$$

$$\ell'(\theta) = \frac{n_1}{\theta} - A, \quad \ell''(\theta) = -\frac{n_1}{\theta^2} < 0 \quad \overset{A}{\parallel}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{n_1}{\theta} - A = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n_1}{A} = \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + m \cdot n_2 - d(n_1 + n_2)}$$

$$b) \quad n_1 = \# 0 < x_i - d < m - d \Leftrightarrow \# d < x_i < m \Leftrightarrow \# 10 < x_i < 40 = 9$$

$$n_2 = \# x_i > m \Leftrightarrow \# x_i > 40 = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 170,46$$

$$\text{Apoi} \quad \hat{\theta} = \frac{9}{170,46 + 40 \cdot 2 - 10(2+9)} = \frac{9}{140,46} = 0,0640751815$$

Κεφάλαιο 11 Μέθοδος Ποσοστημορίων

11.1 Ομάδος Εμπειρικός Ενζήμητης $\hat{\xi}_P$

• $g = [(n+1) \cdot P] \xrightarrow{\text{αυτάρτο μέρος}}$ • $h = (n+1)P - g$

Ομάδος Εμπειρικός

Ενζήμητης του 100·P
ποσοστημορίου

$$\rightarrow \hat{\xi}_P = (1-h) X_{(g)} + h X_{(g+1)}$$

όπου $X_{(i)}$ η τιμή του διατεταγμένου δείγματος στην θέση i

- Για την ^(εμπειρική) εύρεση των παραμέτρων από τα ποσοστημόρια εφαρμόζουμε την σχέση: $L(\theta | \hat{\xi}_P) = F(\hat{\xi}_P) = P \iff \theta = L^{-1}(P | \hat{\xi}_P)$

11.3 Μέθοδος Ποσοστημορίων για Ομαδοποιημένα Δεδομένα

$X_0 \rightarrow$ Το κατώτερο όριο του κελιού που περιέχει το 100·P

$f_i \rightarrow$ η συχνότητα του κελιού i

$c \rightarrow$ το εύρος του αντιστοιχικού κελιού

$F_{i-1} \rightarrow$ Η αθροιστική συχνότητα του κελιού $i-1$.

$$\hat{\xi}_P = X_0 + \frac{c}{f_i} \left(\frac{P \cdot n}{100} - F_{i-1} \right)$$

Άσκηση 34 / Σελ 172)

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται 100 παρατηρήσεις (πλήθος σημείων) ομαδοποιημένες σε έξι διαστήματα (κελιά), οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή θ . Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου θ με βάση το 80° ποσοστημόριο.

Πίνακας		
Κελιά i	f_i	F_i
$(0, 100]$	31	31
$(100, 200]$	20	51
$(200, 500]$	26	77
$(500, 800]$	16	93
$(800, 1000]$	4	97
$(1000, 1400]$	3	100

Λίστη

Θα βρούμε πρώτα τον εκτιμητή $\hat{\xi}_p$ για τα ομαδοποιημένα δεδομένα (για $p=0,8$) και μετά από την σχέση $F(\hat{\xi}_p) = p$ λύνοντας ως προς την παράμετρο θ θα βρούμε την τιμή που αναζητούμε.

$$\text{Για το } 80^\circ \text{ ποσοστημώριο έχουμε: } \frac{p \cdot n}{100} = \frac{80 \cdot 100}{100} = 80$$

Σύμφωνα με τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων F_i , πρέπει να βρούμε που βρίσκεται η τιμή 80. Το 80 βρίσκεται στο 4^ο κελί $(500, 800]$

Άρα

$$X_0 = 500, \quad C = 800 - 500 = 300, \quad f_4 = 16, \quad F_3 = 77$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{\xi}_{80} &= X_0 + \frac{C}{f_4} \left(\frac{p \cdot n}{100} - F_3 \right) = 500 + \frac{300}{16} \left(\frac{80 \cdot 100}{100} - 77 \right) \\ &= 556,25. \end{aligned}$$

Για την τ.μ. X η ~~σ.κ.~~ (με μέση τιμή θ) είναι:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x}, \quad \theta > 0, \quad x > 0$$

$$\text{Άρα από την σχέση } F_X(\hat{\xi}_{80}) = 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{\theta} \hat{\xi}_{80}} = 0,8 = p \quad e^{-\frac{1}{\theta} \hat{\xi}_{80}} = 0,2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\theta} \cdot \hat{\xi}_{80} = \ln(0,2) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-\hat{\xi}_{80}}{\ln(0,2)} = \frac{-556,25}{\ln(0,2)} = 345,6176.$$