

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Στατιστικής

Ορισμός 1. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων (στοιχειωδών ενδεχομένων) ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος και παριστάνεται με το γράμμα Ω .

Ορισμός 2. Ένας δειγματικός χώρος ονομάζεται διακριτός (*discrete*), αν αποτελείται από πεπερασμένο ή αριθμήσιμο το πολύ πλήθος στοιχειωδών ενδεχομένων (σημείων).

Ορισμός 3. Ένας δειγματικός χώρος ονομάζεται συνεχής (*continuous*), αν αποτελείται από συνεχές πλήθος ενδεχομένων (σημείων).

Ορισμός 4. Αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος με μέτρο πιθανότητας και X είναι μία συνάρτηση με πραγματικές τιμές και πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω , τότε η X ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.

1.1 Συναρτήσεις Πιθανότητας και Αθροιστικής Πιθανότητας

Ορισμός 5. Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, η συνάρτηση $f(x) = P(X = x)$ για κάθε x εντός του πεδίου τιμών της X , ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας της X .

Ορισμός 6. Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η συνάρτηση $f(x) > 0$ για κάθε x εντός του πεδίου τιμών της X , ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας της X , ή απλά πυκνότητα της X εάν και μόνο εάν

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx,$$

για οποιουδήποτε σταθερούς πραγματικούς αριθμούς a και b με $a \leq b$.

Θεώρημα 1.1.1. Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε η $f(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες:

- 1) $f(x) > 0$ για κάθε τιμή εντός του πεδίου ορισμού της,
- 2) $\sum_x f(x) = 1$, όπου το άθροισμα είναι για όλες τις τιμές εντός του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 1.1.2. Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η $f(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες:

- 1) $f(x) \geq 0$ για κάθε τιμή εντός του πεδίου ορισμού της,
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$.

Ορισμός 7. Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, η αθροιστική συνάρτηση (ή συνάρτηση κατανομής) ορίζεται ως

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y), \quad \text{για } -\infty < x < \infty,$$

όπου $f(y)$ είναι η τιμή της κατανομής πιθανότητας της X στο y .

Ορισμός 8. Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η αθροιστική συνάρτηση (ή συνάρτηση κατανομής) ορίζεται ως

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad \text{για } -\infty < x < \infty.$$

1.2 Μέση τιμή και διασπορά

Η μέση τιμή (mean), ή αναμενόμενη τιμή (expected value) μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $E(X) = \mu_X$. Αν X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε ορίζεται ως

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xP(X = x).$$

Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε ορίζεται ως

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Η διασπορά, ή διακύμανση (variance) μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $Var(X) = \sigma^2$ και ορίζεται ως

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X - \mu_X)^2.$$

Η τυπική απόκλιση (standard deviation) ισούται με την τετραγωνική ρίζα της διασποράς.

1.3 Ροπές

Η ροπή (moment) μιας τυχαίας μεταβλητής X τάξης r ($r = 1, 2, 3, \dots$) συμβολίζεται με $E(X^r)$. Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, είναι

$$E(X^r) = \sum_x x^r P(X = x),$$

ενώ αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή ορίζεται ως

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx.$$

1.4 Ροπογεννήτρια

Η ροπογεννήτρια (moment generating function) μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $M_X(t)$ και ορίζεται ως

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, ορίζεται ως

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x),$$

ενώ αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, ορίζεται ως

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

Ιδιότητες: α) Ισχύει πάντοτε ότι $M_X(0) = 1$. Για παράδειγμα, αν η X είναι συνεχής, έχουμε

$$M_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{0x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές του X , αν πάρουμε διαδοχικές παραγώγους της $M_X(t)$, δηλαδή

$$\left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X), \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X^2), \quad \dots \quad \left. \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X^r).$$

1.4.1 Γεννήτρια Συνάρτηση Ημιαναλλοίωτων

Η γεννήτρια συνάρτηση ημιαναλλοίωτων (cumulant generating function) μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $K_X(t)$ και ορίζεται ως

$$K_X(t) = \ln[M_X(t)] = \ln E(e^{tX}) = k_X(1) \frac{t}{1!} + k_X(2) \frac{t^2}{2!} + k_X(3) \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= tE(X) + \frac{t^2}{2!} Var(X) + \dots,$$

όπου η n -στη ημιαναλλοίωτη λαμβάνεται ως

$$k_X(n) = \left. \frac{d^n}{dt^n} K_X(t) \right|_{t=0}.$$

Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$k_X(1) = \left. \frac{d}{dt} \ln[M_X(t)] \right|_{t=0} = \left. \frac{\frac{d}{dt} M_X(t)}{M_X(t)} \right|_{t=0} = E(X)$$

και η διασπορά ως

$$\begin{aligned} k_X(2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \ln[M_X(t)] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{\frac{d}{dt} M_X(t)}{M_X(t)} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) - \frac{d}{dt} M_X(t) \frac{d}{dt} M_X(t)}{[M_X(t)]^2} \right|_{t=0} \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = Var(X). \end{aligned}$$

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί ότι η 3-η κεντρική ροπή ισούται με

$$k_X(3) = \frac{d^3}{dt^3} \ln[M_X(t)] \Big|_{t=0} = E[(X - E(X))^3].$$

Παράδειγμα 1. Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι $f(x) = 3e^{-3x}$, $x > 0$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ και με βάση τη ροπογεννήτρια να βρεθούν η πρώτη και δεύτερη ροπή, καθώς και η διασπορά της X .

Λύση: Η ροπογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} 3e^{-3x} dx \\ &= 3 \int_0^\infty e^{-(3-t)x} dx \\ &= \frac{3}{3-t}, \quad t < 3. \end{aligned}$$

Η πρώτη ροπή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{3}{(3-t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{3(2)(3-t)}{(3-t)^4} \Big|_{t=0} = \frac{2}{9} = E(X^2)$$

και η διασπορά

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{9} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Διαφορετικά,

$$M_X(t) = \frac{3}{3-t} \Rightarrow \ln M_X(t) = \ln 3 - \ln(3-t),$$

$$\frac{d}{dt} \ln[M_X(t)] = \frac{1}{3-t}$$

και

$$\text{Var}(X) = \frac{d^2}{dt^2} \ln[M_X(t)] \Big|_{t=0} = \frac{1}{(3-t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{9}.$$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$, η πρώτη και η δεύτερη ροπή, καθώς και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X , η οποία δηλώνει το αποτέλεσμα ρίψης ενός ζαριού, με

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad \text{για } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Λύση: Η ροπογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_x e^{tx} P(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^6 e^{tx} \frac{1}{6} = \frac{e^t}{6} + \frac{e^{2t}}{6} + \dots + \frac{e^{6t}}{6} \\ &= \frac{e^t}{6} \sum_{x=0}^5 e^{tx} = \frac{e^t}{6} (1 + e^t + \dots + e^{5t}) \\ &= \frac{1}{6} e^t \left(\frac{1 - e^{6t}}{1 - e^t} \right), \end{aligned}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι $\sum_{x=0}^{n-1} a^x = \frac{1-a^n}{1-a}$.

Η πρώτη ροπή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = 1 \frac{e^t}{6} + 2 \frac{e^{2t}}{6} + \dots + 6 \frac{e^{6t}}{6} \Big|_{t=0} \\ &= 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + \dots + 6 \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \end{aligned}$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. 1 \frac{e^t}{6} + (2)(2) \frac{e^{2t}}{6} + \dots + (6)(6) \frac{e^{6t}}{6} \right|_{t=0} \\ &= 1 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

και η διασπορά ως

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

1.5 Κεντρικές Ροπές

Ορισμός 1. Η k -οστή κεντρική ροπή (*central moment*) μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως η μέση τιμή της k -οστής δύναμης της απόκλισης της τυχαίας μεταβλητής από τη μέση τιμή μ της μεταβλητής αυτής, δηλαδή $E(X - \mu)^k$. Η δεύτερη ροπή συνήθως ονομάζεται διασπορά (διακύμανση) και συμβολίζεται με το σ^2 και η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται τυπική απόκλιση.

Ορισμός 2. Ο λόγος της τυπικής απόκλισης σ ως προς τη μέση τιμή μ ονομάζεται συντελεστής μεταβλητότητας και συμβολίζεται με CV (*coefficient of variation*),

Ορισμός 3. Ο λόγος της 3-ης κεντρικής ροπής ως προς την 3-η δύναμη της απόκλισης ονομάζεται λοξότητα ή ασυμμετρία (*skewness*),

$$\gamma_1 = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}.$$

Αν η γ_1 είναι αρνητική τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X έχει ασυμμετρία από τα αριστερά (οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται αριστερά της κορυφής της κατανομής), αν η $f(x)$ είναι συμμετρική

η γ_1 ισούται με το μηδέν (όχι όμως αντίστροφα) και αν η γ_1 είναι θετική τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X έχει ασυμμετρία από τα δεξιά (οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται δεξιά της κορυφής της κατανομής).

Ορισμός 4. Ο λόγος της 4-ης κεντρικής ροπής ως προς την 4-η δύναμη της απόκλισης ονομάζεται κύρτωση (*kurtosis*),

$$\gamma_2 = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4}$$

και αφορά το βαθμό συγκέντρωσης των παρατηρήσεων γύρω από το μέσο και τα άκρα της κατανομής. Η κατανομή, η οποία έχει σχετικά μεγάλη συγκέντρωση τιμών γύρω από το μέσο, λέγεται λεπτόκυρτη, ενώ, αν έχει σχετικά μικρή συγκέντρωση τιμών γύρω από το μέσο, λέγεται πλατύκυρτη.

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ της τυχαίας μεταβλητή X , της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ \frac{3-x}{2}, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Λύση: Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής έχουμε

$$F(x) = \int_0^x \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx + \int_1^x \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2}$$

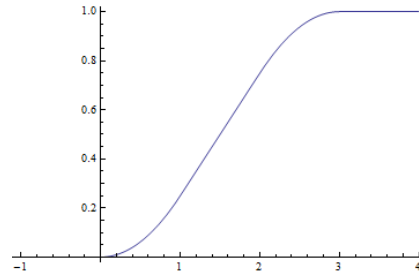
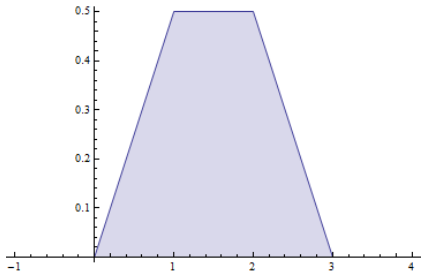
$$= \frac{2x-1}{4}, \quad 1 < x \leq 2$$

και

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^1 \frac{x}{2} dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^x \frac{3-x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(6x - x^2 - 8) \\
 &= \frac{1}{4}(6x - x^2 - 5), \quad 2 < x < 3.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2x - 1), & 1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{4}(6x - x^2 - 5), & 2 < x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases} \quad (1.5.2)$$



Σχήμα 1.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης του Παραδείγματος 3

Παράδειγμα 4. Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$, με μέση τιμή $E(X) = \alpha\beta = 8$ και διασπορά

$Var(X) = \alpha\beta^2$. Αν η ασυμμετρία (skewness), $\gamma_1 = 1$, να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β .

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $E(X) = \alpha\beta = 8$, $Var(X) = \alpha\beta^2$ και $E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = \alpha\beta^2(\alpha + 1)$. Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
 E(X^3) &= \int_0^\infty x^3 f(x) dx = \int_0^\infty x^3 \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+3)\beta^3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{(\alpha+3)-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha+3)\beta^{\alpha+3}} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+3)\beta^3}{\Gamma(\alpha)} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\Gamma(\alpha)\beta^3}{\Gamma(\alpha)} \\
 &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3 \tag{1.5.3}
 \end{aligned}$$

και η ασυμμετρία υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{E[X - E(X)]^3}{E\{[X - E(X)]^2\}^{3/2}} \\
 &= \frac{E(X^3) - [E(X)]^3 - 3E(X^2)E(X) + 3[E(X)]^2 E(X)}{\{E(X^2) - [E(X)]^2\}^{3/2}} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3 - (\alpha\beta)^3 - 3\alpha\beta^2(\alpha+1)\alpha\beta + 3(\alpha\beta)^2\alpha\beta}{[\alpha\beta^2(\alpha+1) - (\alpha\beta)^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{2\alpha\beta^3}{(\alpha\beta^2)^{3/2}} = \frac{2}{\alpha^{1/2}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4. \quad (1.5.4)$$

Δοθέντος ότι $E(X) = \alpha\beta = 8$ λαμβάνουμε $\beta = 2$.

Άσκηση 2. Έστω η τυχαία μεταβλητή X , της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 1, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Να βρεθούν, α) η $P(0.2 < X < 0.5)$ και β) η $P(0.2 < X < 0.5 | X > 0.25)$.

Άσκηση 3. Έστω η τυχαία μεταβλητή X , της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και να δοθεί η γραφική της παράσταση.

Άσκηση 4. Έστω η τυχαία μεταβλητή X , η οποία έχει σύνθετη κατανομή στο διάστημα $[0, 1)$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (1.5.7)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και να δοθεί η γραφική της παράσταση.

Άσκηση 5. Έστω η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{4-2x}{3}, & \frac{1}{2} \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.8)$$

Να βρεθεί η $P(0.25 < X \leq 1.25)$.

Άσκηση 6. Το ποσό ζημιάς είναι μια τυχαία μεταβλητή X , της οποίας η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ ορίζεται ως

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2000}, & 0 \leq x < 1000, \\ \frac{3}{4}, & x = 1000, \\ \frac{x+11000}{16000}, & 1000 < x < 5000, \\ 1, & x \geq 5000. \end{cases} \quad (1.5.9)$$

Να βρεθούν, α) η συνάρτηση πιθανότητας και β) η μέση τιμή και η διασπορά της X .

Άσκηση 7. Έστω ότι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές κάθε μία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Έστω $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Να βρείτε την $P(Y > \frac{1}{2})$.

Άσκηση 8. Να βρεθεί η συμμετρία ή ασυμμετρία, καθώς και η κύρτωση από τις κάτωθι κατανομές

$$(\alpha) \quad f(0) = 0.03, \quad f(1) = 0.17, \quad f(2) = 0.25, \quad f(3) = 0.20, \quad f(4) = 0.20 \\ \text{και } f(5) = 0.15,$$

$$(\beta) \quad f(0) = 0.10, \quad f(1) = 0.15, \quad f(2) = 0.25, \quad f(3) = 0.25, \quad f(4) = 0.15 \\ \text{και } f(5) = 0.10,$$

$$(\gamma) \quad f(x) = \frac{1-x}{2}, \quad -1 < x < 1.$$

Κεφάλαιο 2

Διακριτές Κατανομές

2.1 Διωνυμικό ανάπτυγμα

Έστω $a, b \in R$ και n θετικός ακέραιος, τότε

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

όπου

$$\binom{a}{k} = \frac{a!}{k!(a-k)!} = \frac{a(a-1)\dots(a-k-1)}{k!} = \frac{(a)_k}{k!}.$$

Για $b = 1$, λαμβάνουμε

$$(a + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i.$$

Επίσης, ισχύει

$$(1 + t)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} t^k, \quad \text{για } |t| < 1.$$

Ειδικά για $a = -r$, r θετικός αριθμός ισχύει

$$(1 + t)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} t^k$$

και

$$(1-t)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-t)^k.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \binom{-r}{k} &= \frac{-r(-r-1)\dots(-r-k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k r(r+1)\dots(r+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{r+k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (1-t)^{-r} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} (-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} t^k. \end{aligned}$$

2.2 Διακριτή Ομοιόμορφη Κατανομή

Ορισμός 9. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει διακριτή ομοιόμορφη (*uniform*) κατανομή, αν η συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται ως

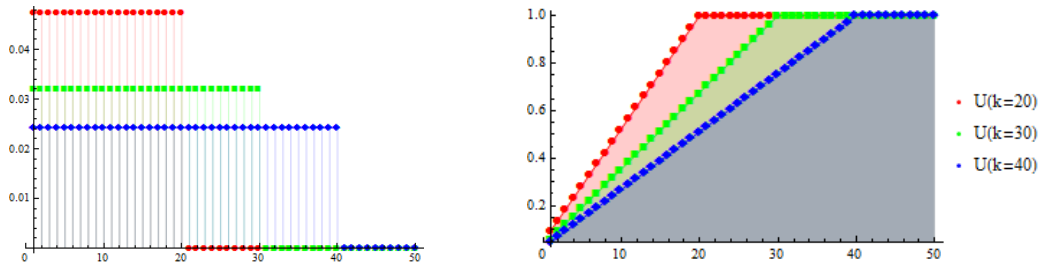
$$f(x) = \frac{1}{k}, \quad \text{για } x = 1, 2, \dots, k. \quad (2.2.1)$$

Θεώρημα 2.2.1. Αν η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, τότε η μέση τιμή, η διασπορά και η ροπογεννήτρια είναι αντίστοιχα,

$$E(X) = \frac{(k+1)}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(k^2-1)}{12} \quad \text{και} \quad M_X(t) = \sum_x e^{tx} \frac{1}{k}. \quad (2.2.2)$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$E(X) = \sum_{x=1}^k x \frac{1}{k} = \frac{1}{k} (1 + 2 + \dots + k)$$



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της ομοιόμορφης κατανομής με $k = (20, 30, 40)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \frac{(k+1)}{2},
 \end{aligned}$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{x=1}^k x^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{k} (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) \\
 &= \frac{1}{k} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(2k+1)}{6}
 \end{aligned}$$

και η διασπορά ως

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)[2(2k+1) - 3(k+1)]}{12} \\
&= \frac{(k+1)(k-1)}{12} \\
&= \frac{(k^2 - 1)}{12}.
\end{aligned}$$

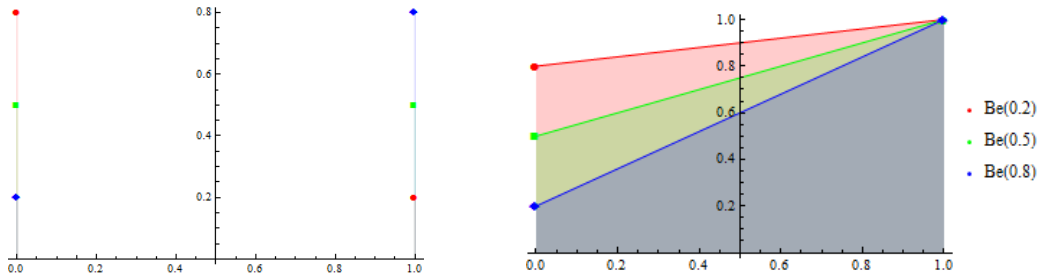
Τέλος, η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} \frac{1}{k}.$$

2.3 Κατανομή Bernoulli

Ορισμός 10. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή *Bernoulli*, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ για } x = 0, 1, \quad 0 < p < 1. \quad (2.3.3)$$



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κατανομής Bernoulli με παράμετρο $p = (0.2, 0.5, 0.8)$.

Θεώρημα 2.3.1. Αν η X ακολουθεί την κατανομή *Bernoulli*, τότε η μέση τιμή και η διασπορά είναι $E(X) = p$ και $Var(X) = p(1-p)$ αντίστοιχα, ενώ η ροπογεννήτρια είναι $M_X(t) = e^t p + (1-p)$.

Απόδειξη: Η μέση τιμή είναι

$$E(X) = (1)p + (0)(1 - p) = p.$$

Η δεύτερη ροπή είναι

$$E(X^2) = 1^2p + 0^2(1 - p) = p$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Η ροπογεννήτρια είναι

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tx}) = e^{t(1)}p + e^{t(0)}(1 - p) \\ &= e^t p + (1 - p). \end{aligned}$$

2.4 Διωνυμική Κατανομή

Ορισμός 11. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει διωνυμική (*binomial*) κατανομή, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

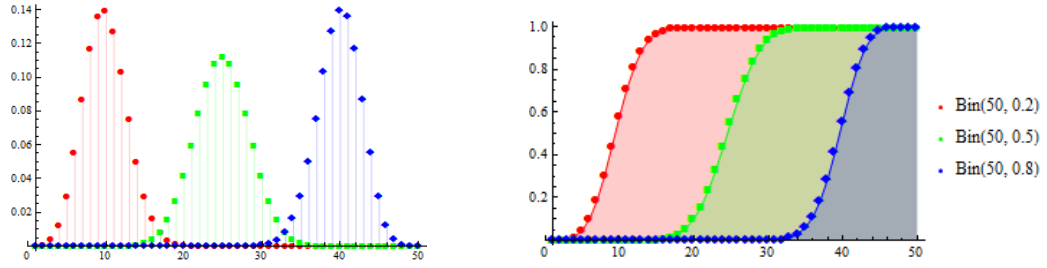
$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.4.4)$$

Θεώρημα 2.4.1. Αν η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, η ροπογεννήτρια ισούται με

$$M_X(t) = [pe^t + (1 - p)]^n \quad (2.4.5)$$

και η μέση τιμή και διασπορά αντίστοιχα με

$$E(X) = np \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p). \quad (2.4.6)$$



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της διωνυμικής κατανομής για $n = 50$ και $p = (0.2, 0.5, 0.8)$.

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} e^{tx} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \quad \left((a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) \\
 &= [pe^t + (1-p)]^n.
 \end{aligned}$$

Η πρώτη ροπή δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-1} \right|_{t=0} \\
 &= np.
 \end{aligned}$$

Η δεύτερη ροπή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-1} + n(n-1)pe^t [pe^t + (1-p)]^{n-2} \right|_{t=0} \\
 &= np + n(n-1)p^2
 \end{aligned}$$

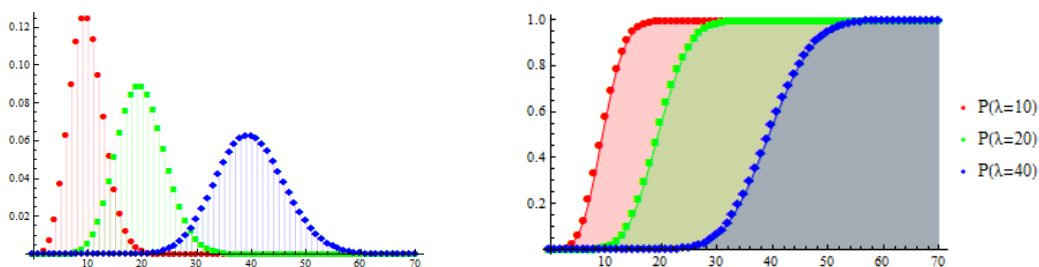
και η διασπορά ως

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\ &= np(1-p).\end{aligned}$$

2.5 Κατανομή Poisson

Ορισμός 12. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή *Poisson*, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \text{ και } \lambda > 0. \quad (2.5.7)$$



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και συνάρτησης κατανομής της κατανομής Poisson με παράμετρο $\lambda = (10, 20, 40)$.

Θεώρημα 2.5.1. Αν η X ακολουθεί την κατανομή *Poisson*, ισχύει ότι

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad E(X) = \lambda \text{ και } \text{Var}(X) = \lambda. \quad (2.5.8)$$

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \quad (\text{γνωρίζουμε ότι } \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a)^x}{x!} = e^a) \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
 &= e^{\lambda(e^t - 1)}.
 \end{aligned}$$

Η πρώτη ροπή είναι

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t \right|_{t=0} = \lambda,$$

η δεύτερη ροπή

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t + e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t \lambda e^t \right|_{t=0} \\
 &= \lambda(\lambda + 1)
 \end{aligned}$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 \\
 &= \lambda.
 \end{aligned}$$

2.6 Γεωμετρική Κατανομή

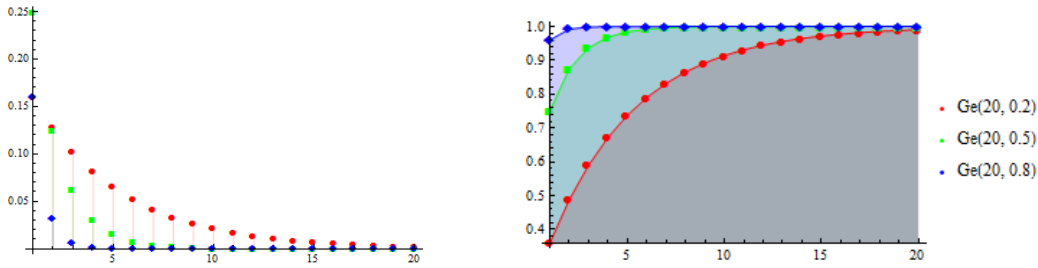
Ορισμός 13. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει γεωμετρική (geometric) κατανομή, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

$$f(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Θεώρημα 2.6.1. Αν X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή, η μέση τιμή, η διασπορά και η ροπογεννήτρια είναι αντίστοιχα,

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{και} \quad M_X(t) = \frac{p}{1 - pe^t}. \quad (2.6.9)$$

Απόδειξη: Να αποδειχθεί ως άσκηση.



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της γεωμετρικής κατανομής με παραμέτρους $n = 20$ και $p = (0.2, 0.5, 0.8)$.

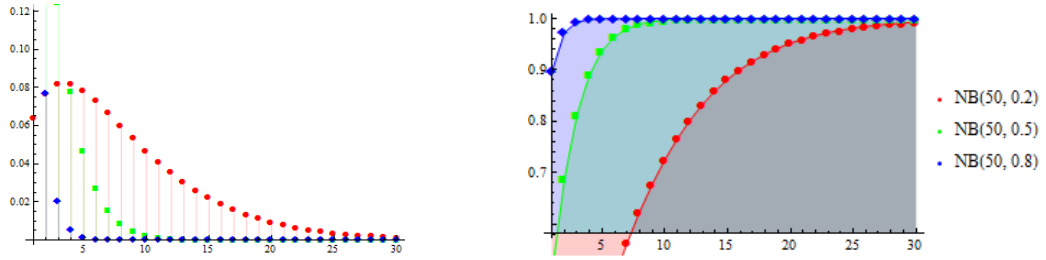
2.7 Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Ορισμός 14. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει αρνητική διωνυμική (negative binomial) κατανομή, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, r+2, \dots \quad (2.7.10)$$

ή διαφορετικά, ως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \quad \text{για} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7.11)$$



Σχήμα 2.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $n = 50$ και $p = (0.2, 0.5, 0.8)$.

Παρατήρηση 1. Αν στη συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής όπως ορίζεται στην (2.7.10), θέσουμε $r = 1$, λαμβάνουμε τη γεωμετρική κατανομή.

Θεώρημα 2.7.1. Έστω ότι η X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή της μορφής (2.7.10), η μέση της τιμή είναι

$$E(X) = \frac{r}{p}. \quad (2.7.12)$$

Απόδειξη: Με βάση τη σχέση (2.7.10) και κάνοντας χρήση του διωνυμικού θεωρήματος $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$, η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} x \frac{(x-1)!}{(x-r)!(r-1)!} p^r q^{x-r} \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} \frac{r}{r} \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!} p^r q^{x-r} \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} r p^r q^{x-r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} q^{x-r} \\
&\stackrel{x-r=y}{=} r p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y}{r} q^y \\
&= r p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{(r+1)+y-1}{(r+1)-1} q^y \\
&= r p^r (1-q)^{-(r+1)} \\
&= \frac{r}{p}. \tag{2.7.13}
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.7.2. Με βάση την αρνητική διωνυμική κατανομή, όπως ορίζεται στην (2.7.11), η ροπογεννήτρια ισούται με $\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$, η μέση τιμή $E(X) = \frac{rq}{p}$ και η διασπορά $Var(X) = \frac{rq}{p^2}$.

Απόδειξη: Η ροπογεννήτρια της αρνητικής διωνυμικής κατανομής είναι

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \\
&= p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-qe^t)^x \\
&= p^r \frac{1}{(1-qe^t)^r}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^r.$$

Η πρώτη ροπή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)^r \Big|_{t=0} \\ &= p^r (-r)(1 - qe^t)^{-(r+1)} (-qe^t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{rq}{p}, \end{aligned}$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} = p^r rq [q(r+1)e^{2t}(1 - qe^t)^{-(r+2)} + e^t(1 - qe^t)^{-(r+1)}] \Big|_{t=0} \\ &= p^r rq [q(r+1)p^{-(r+2)}p^{-(r+2)}] \\ &= (r+1)r \frac{q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} \end{aligned}$$

και η διασπορά

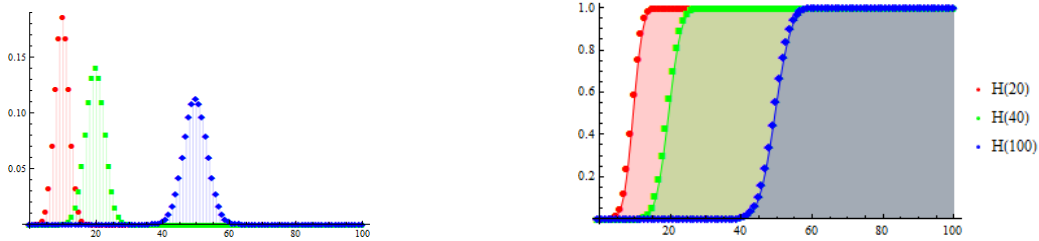
$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = (r+1)r \frac{q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \left(\frac{rq}{p} \right)^2 \\ &= \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p} \\ &= \frac{rq}{p^2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 9. Με βάση την αρνητική διωνυμική κατανομή, όπως ορίζεται στη (2.7.10), να βρεθεί η ροπογεννήτρια και με βάση τη ροπογεννήτρια να βρεθεί η διασπορά ($Var(X) = \frac{rq}{p^2}$).

2.8 Υπεργεωμετρική Κατανομή

Ορισμός 15. Μία τυχαία μεταβλητή X έχει υπεργεωμετρική (*hypergeometric*) κατανομή, αν η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{ για } x = 0, 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq N.$$



Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της υπεργεωμετρικής κατανομής για $n = (20, 40, 100)$ και $k = 0, 100$.

Θεώρημα 2.8.1. Αν X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή, η μέση τιμή είναι

$$E(X) = n \frac{k}{N}. \quad (2.8.14)$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= n \frac{k}{N} \sum_{x=0}^n \frac{\binom{k-1}{x-1} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= n \frac{k}{N} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{k-1}{y} \binom{N-1-k-1}{n-1-y}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= n \frac{k}{N}.
\end{aligned}$$

Έχουμε κάνει χρήση της σχέσης

$$\sum_{j=0}^n \binom{a}{j} \binom{b}{n-j} = \binom{a+b}{n}.$$

Άσκηση 10. Να δείξετε ότι η διασπορά της υπεργεωμετρικής κατανομής είναι

$$\text{Var}(X) = n \frac{k}{N} \frac{N-k}{N} \frac{N-n}{N-1},$$

αφού προηγουμένως βρείτε τη $E[X(X-1)]$.

Κεφάλαιο 3

Συνεχείς Κατανομές

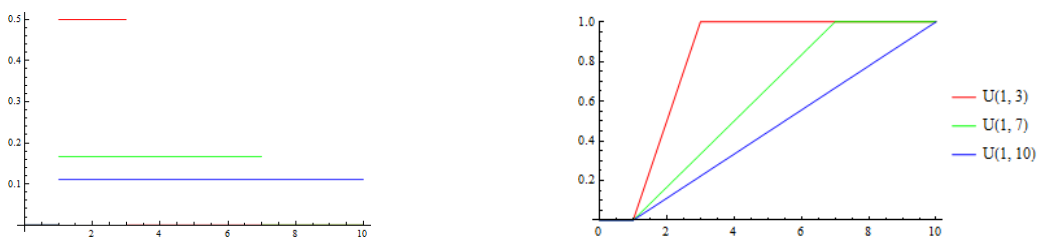
3.1 Ομοιόμορφη Κατανομή

Ορισμός 16. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη (*uniform*) κατανομή με παραμέτρους a και b αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b \quad (3.1.1)$$

και η αθροιστική συνάρτηση ισούται με

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της ομοιόμορφης κατανομής με $a = 1$ και $b = (3, 7, 10)$.

Θεώρημα 3.1.1. Αν η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, τότε η μέση τιμή είναι $E(X) = \frac{a+b}{2}$, η διασπορά, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ και η ροπογεννήτρια, $M_X(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$.

Απόδειξη: Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b dx \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b dx \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}, \end{aligned}$$

η διασπορά ως

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

και η ροπογεννήτρια ως

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}. \end{aligned}$$

3.2 Κανονική Κατανομή

Ορισμός 17. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική (normal) κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 , αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως

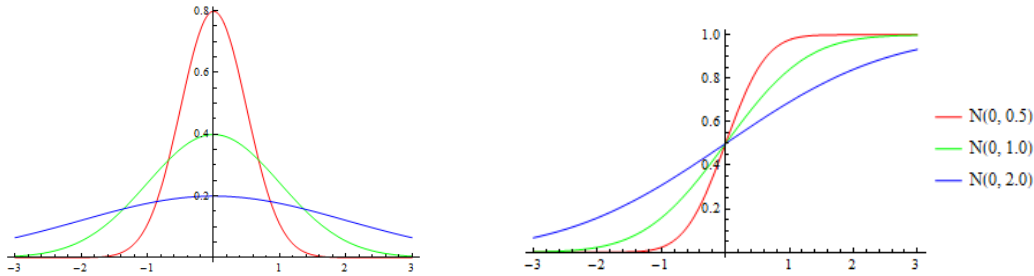
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \quad (3.2.2)$$

Αν στη σχέση (3.2.2) θέσουμε $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, λαμβάνουμε την τυπική κανονική (standard normal) κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία συμβολίζεται με $\phi(x)$ και ισούται με

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.2.3)$$

Η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής συμβολίζεται με $\Phi(x)$ και ισούται με

$$F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.2.4)$$



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma^2 = (0.5, 1.0, 2.0)$.

Θεώρημα 3.2.1. Αν η X ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε η μέση τιμή είναι $E(X) = \mu$, η διασπορά $\text{Var}(X) = \sigma^2$ και η ροπογεννήτρια $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα τη ροπογεννήτρια

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mu} e^{t(x-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1/2\sigma^2)[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)]} dx.
 \end{aligned}$$

Αν συμπληρώσουμε το τετράγωνο μέσα στην παρένθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}
 (x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) &= (x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) + \sigma^4 t^2 - \sigma^4 t^2 \\
 &= (x - \mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2} \\
 &= e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2/2\sigma^2} \\
 &= e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2}. \tag{3.2.5}
 \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη μονάδα (1), επειδή η σχέση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $\mu + \sigma^2 t$ και διασπορά σ^2 . Η μέση τιμή ισούται με

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left(e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2} \right) \right|_{t=0} \\
 &= e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2} \left. \frac{d}{dt} (t\mu + \sigma^2 t^2/2) \right|_{t=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2} (\mu + \sigma^2 t) \Big|_{t=0} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ροπή είναι

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0} &= e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2} (\mu + \sigma^2 t)^2 + e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2} (\sigma^2) \Big|_{t=0} \\
&= \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

3.3 Λογαριθμοκανονική Κατανομή

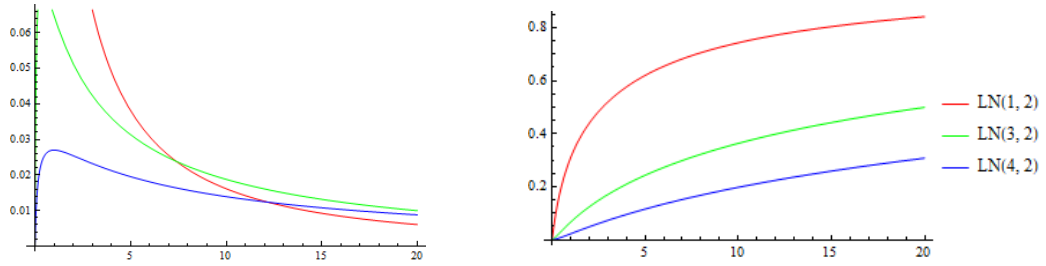
Ορισμός 18. Αν η X είναι κανονική, τότε η $Y = e^X > 0$ ορίζει την λογαριθμοκανονική (*lognormal*) τυχαία μεταβλητή Y . Αν στη σχέση (3.2.2) θέσουμε όπου $x = \ln y$ και $dx = \frac{1}{y} dy$, έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής κατανομής

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}, \quad 0 < y < \infty. \quad (3.3.6)$$

Η αθροιστική συνάρτηση ισούται με

$$F_X(y) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \quad 0 < y < \infty, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad (3.3.7)$$

με την Φ όπως έχει οριστεί στη σχέση (3.2.4).



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της λογαριθμοκανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu = (1, 3, 4)$ και $\sigma = 2$.

Διαφορετικά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογαριθμοκανονικής κατανομής υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} P(e^X \leq y) = \frac{\partial}{\partial y} P(X \leq \ln y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} F_X(\ln y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y}, \quad 0 < y < \infty.
 \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.3.1. Αν η Y ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε η μέση τιμή, η διασπορά και η ροπή k -τάξης είναι αντίστοιχα,

$$E(Y) = e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}, \quad E(Y^2) = e^{2\mu_x + 2\sigma_x^2}, \quad V(Y) = [E(Y)]^2(e^{\sigma_x^2} - 1)$$

$$\text{και } E(Y^k) = e^{k\mu_x + \frac{k^2\sigma_x^2}{2}}.$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή της λογαριθμοκανονικής κατανομής ισούται με την ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής, αν θέσουμε $t = 1$,

$$E(Y) = E(e^X) = M_X(1) = e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}},$$

η δεύτερη ροπή αν θέσουμε $t = 2$,

$$E(Y^2) = E(e^{2X}) = M_X(2) = e^{2\mu_x + 2\sigma_x^2},$$

η διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= e^{2\mu_x + 2\sigma_x^2} - \left(e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}} \right)^2 \\ &= e^{2\mu_x + 2\sigma_x^2} - e^{2\mu_x + \sigma_x^2} \\ &= e^{2\mu_x + \sigma_x^2} \left(e^{\sigma_x^2} - 1 \right) \\ &= [E(Y)]^2 \left(e^{\sigma_x^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

και η ροπή k -τάξης, αν θέσουμε στην ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής, $t = k$,

$$E(Y^k) = E(e^{kX}) = M_X(k) = e^{k\mu_x + \frac{k^2\sigma_x^2}{2}}.$$

Παρατήρηση 2. Η λογαριθμοκανονική κατανομή έχει βαριά δεξιά ουρά και δεν έχει ροπογεννήτρια. Γενικά, όλες οι τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν κατανομές με μακριές (βαριές) ουρές, δεν έχουν ροπογεννήτριες.

3.4 Εκθετική Κατανομή

Ορισμός 19. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής (*exponential*) κατανομής ορίζεται ως

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad (3.4.8)$$

ή *εναλλακτικά*

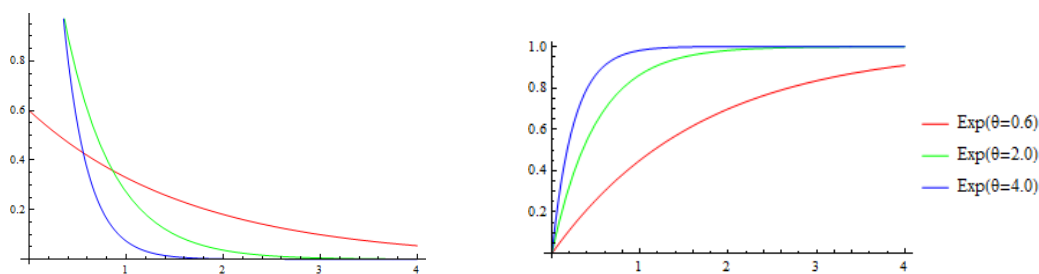
$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0. \quad (3.4.9)$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_0^x \theta e^{-\theta x} dx \\
 &= -\theta \frac{1}{\theta} e^{-\theta x} \Big|_0^x \\
 &= 1 - e^{-\theta x},
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

ή εναλλακτικά

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}. \tag{3.4.11}$$



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\theta = (0.6, 2.0, 4.0)$.

Θεώρημα 3.4.1. Έστω ότι η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή, όπως ορίζεται στη σχέση (3.4.8). Ισχύει ότι

$$E(X) = \frac{1}{\theta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2} \quad \text{και} \quad M_X(t) = \frac{\theta}{(\theta - t)}.$$

Απόδειξη: Έστω $u = x \Rightarrow du = dx$ και $dv = e^{-\theta x} dx \Rightarrow v = -e^{-\theta x}$. Η

πρώτη ροπή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \theta e^{-\theta x} dx \\
 &= -x e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\theta x} dx \quad \left(\int u dv = uv - \int v du \right) \\
 &= 0 - \frac{1}{\theta} e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\theta}.
 \end{aligned}$$

Η δεύτερη ροπή υπολογίζεται ως

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \theta e^{-\theta x} dx.$$

Έστω $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ και $dv = \theta e^{-\theta x} dx \Rightarrow v = -e^{-\theta x}$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη ($\int u dv = uv - \int v du$), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} x^2 \theta e^{-\theta x} dx &= -x^2 e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx.
 \end{aligned}$$

Έστω $u = x \Rightarrow du = dx$ και $dv = e^{-\theta x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx &= 2 \frac{1}{\theta} x e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\theta x} dx \\
 &= 0 - 2 \frac{1}{\theta^2} e^{-\theta x} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\theta^2}.
 \end{aligned}$$

Οπότε η διασπορά γίνεται

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2} \end{aligned}$$

και η ροπογεννήτρια

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \theta e^{-x(\theta-t)} dx \\ &= -\frac{\theta}{(\theta-t)} e^{-x(\theta-t)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\theta}{(\theta-t)}. \end{aligned}$$

3.5 Γάμμα Κατανομή

Ορισμός 20. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα (Gamma) κατανομής με παραμέτρους α και β ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \text{ όπου } \alpha, \beta > 0, \quad (3.5.12)$$

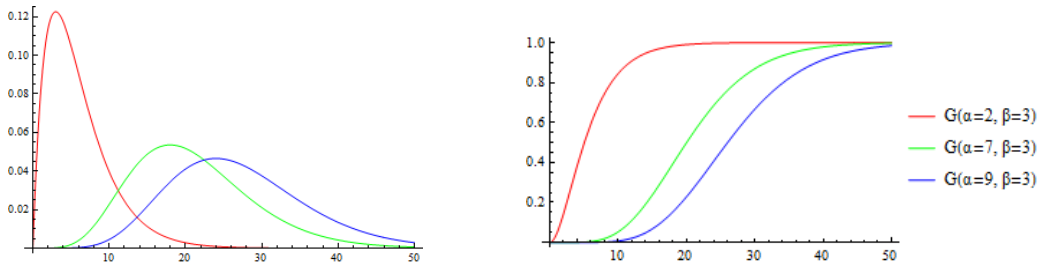
ή εναλλακτικά

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \text{ όπου } \alpha, \beta > 0, \quad (3.5.13)$$

όπου $\Gamma(\alpha)$ είναι η γνωστή συνάρτηση Γάμμα, η οποία ορίζεται ως

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.5.14)$$

και ικανοποιεί τη σχέση $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. Αν ο α είναι θετικός ακέραιος αριθμός $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$. Επίσης, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $a = (2, 7, 9)$ και $\beta = 3$.

Η αθροιστική συνάρτηση με βάση τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως ορίζεται στη σχέση (3.5.12) υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \int_0^{x\beta} \frac{\beta^\alpha (\frac{y}{\beta})^{\alpha-1} e^{-y\frac{1}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)} dy \quad \left(x\beta = y \Rightarrow \beta dx = dy \right) \\ &= \frac{\Gamma(x\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

ή εναλλακτικά με βάση τη (3.5.13)

$$F(x) = \frac{\Gamma(x/\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.5.16)$$

όπου $\Gamma(x, \alpha)$ είναι η μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα (*incomplete Gamma function*), η οποία ορίζεται ως

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad x > 0, \quad \alpha > 0. \quad (3.5.17)$$

Αν στις παραπάνω σχέσεις θέσουμε $\alpha = 1$ και $\beta = \theta$, παίρνουμε την εκθετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Θεώρημα 3.5.1. Έστω ότι η X ακολουθεί την Γάμμα κατανομή ορισμένη ως (3.5.13). Να δείχθεί ότι

$$E(X) = \alpha\beta, \quad Var(X) = \alpha\beta^2 \quad \text{και} \quad M_X(t) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}. \quad (3.5.18)$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{(\alpha+1)-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)\beta}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha\beta, \end{aligned}$$

η ροπή δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{(\alpha+2)-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \alpha(\alpha+1)\beta^2,
\end{aligned}$$

η διασπορά

$$Var(X) = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$$

και η ροπογεννήτρια

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/(\frac{\beta}{1-t\beta})}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\
&= \frac{(\frac{\beta}{1-t\beta})^\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/(\frac{\beta}{1-t\beta})}}{(\frac{\beta}{1-t\beta})^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\
&= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}.
\end{aligned}$$

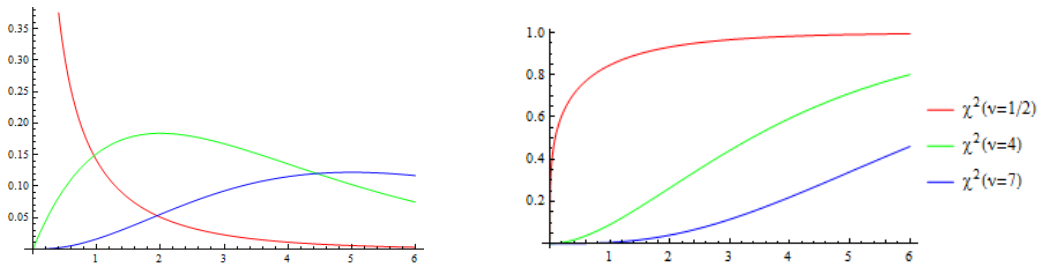
Παρατήρηση 3. Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Γάμμα ορίζεται όπως στη σχέση (3.5.12), έχουμε

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \text{και} \quad M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha. \quad (3.5.19)$$

3.6 Κατανομή χ^2

Ορισμός 21. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{x^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}, \quad x > 0. \quad (3.6.20)$$



Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της χ^2 κατανομής με βαθμούς ελευθερίας $\nu = (1/2, 4, 7)$.

Παρατήρηση 4. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής χ^2 με ν βαθμούς ελευθερίας είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $\alpha = \frac{\nu}{2}$ και $\beta = 2$.

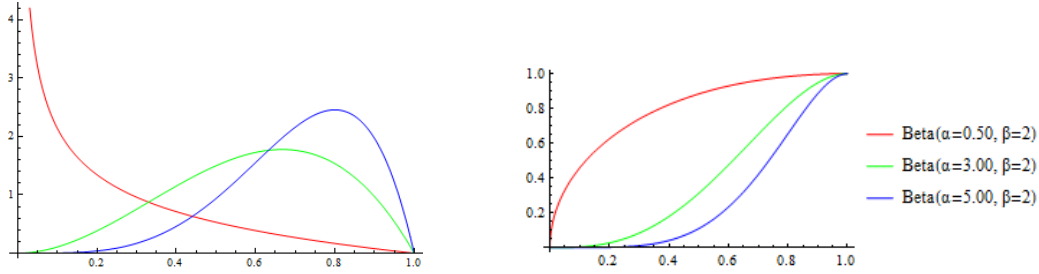
3.7 Κατανομή Βήτα

Ορισμός 22. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Βήτα (Beta) με παραμέτρους α και β ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (3.7.21)$$

Θεώρημα 3.7.1. Έστω ότι η X ακολουθεί την κατανομή Βήτα, όπως ορίζεται στην (3.7.21), τότε η μέση τιμή και η διασπορά είναι αντίστοιχα

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (3.7.22)$$



Σχήμα 3.7: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κατανομής Βήτα με παραμέτρους $\alpha = (0.5, 3.0, 5.0)$ και $\beta = 2$.

Απόδειξη: Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^1 x \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{(\alpha+1)-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha+1, \beta)} x^{(\alpha+1)-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\
 &= \frac{\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \tag{3.7.23}
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της σχέσης (3.7.23) έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα, ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής

Βήτα με παραμέτρους $\alpha + 1$ και β , στο διάστημα $(0, 1)$ ισούται με τη μονάδα. Με τον ίδιο τρόπο λαμβάνουμε την $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+2, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{(\alpha+2)-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+2, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha+2, \beta)} x^{(\alpha+2)-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{B(\alpha+2, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\
 &= \frac{\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}
 \end{aligned}$$

και τη διασπορά ως

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.
 \end{aligned}$$

3.8 Κατανομή Weibull

Ορισμός 23. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ και συνάρτηση κατανομής

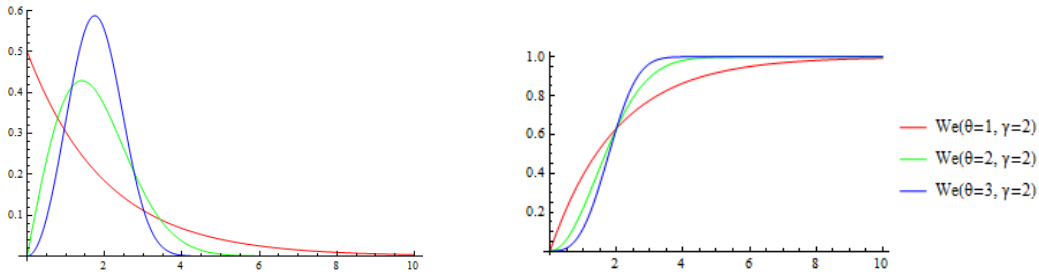
$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = 1 - e^{-\theta y}, \quad x > 0, \quad (3.8.24)$$

τότε η τυχαία μεταβλητή $X = Y^{\frac{1}{\gamma}}$ ακολουθεί την κατανομή Weibull με συνάρτηση κατανομής

$$P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0, \quad \gamma > 0. \quad (3.8.25)$$

Ορισμός 24. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull είναι η παράγωγος της $F_X(x)$, όπως ορίζεται στην (3.8.25), δηλαδή

$$f(x) = \theta \gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^\gamma}, \quad x > 0. \quad (3.8.26)$$



Σχήμα 3.8: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κατανομής Weibull με παραμέτρους $\theta = (1, 2, 3)$ και $\gamma = 2$.

Θεώρημα 3.8.1. Αν η X ακολουθεί την Weibull κατανομή, τότε η μέση τιμή είναι

$$E(X) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (3.8.27)$$

και η ροπή k -τάξης

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{k}{\gamma}}}. \quad (3.8.28)$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \theta \gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^{\gamma}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \theta \gamma x^{\gamma} e^{-\theta x^{\gamma}} dx. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x^{\gamma} = y$, το οποίο συνεπάγεται $x = y^{\frac{1}{\gamma}}$ και $dx = \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} dy$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} \theta \gamma y e^{-\theta y} \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} dy \\ &= \int_0^{\infty} \theta y^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\theta y} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\frac{1}{\gamma}+1} y^{(\frac{1}{\gamma}+1)-1} e^{-\theta y}}{\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση εντός του ολοκληρώματος είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $(\frac{1}{\gamma} + 1, \theta)$. Η ροπή k τάξης υπολογίζεται ως

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k \theta \gamma x^{\gamma-1} e^{-\theta x^{\gamma}} dx. \quad (3.8.29)$$

α) **1ος τρόπος:** Θέτουμε $\theta x^{\gamma} = y$, το οποίο συνεπάγεται $x = \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ και $dx = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\gamma}}} y^{(\frac{1}{\gamma})-1} dy$ και η (3.8.29) γίνεται

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \theta \gamma \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-y} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} y^{(\frac{1}{\gamma})-1} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty y^{\frac{k+\gamma-1+1-\gamma}{\gamma}} \theta \left(\frac{1}{\theta} \right)^{\frac{k+\gamma-1+1}{\gamma}} e^{-y} dy \\
&= \theta^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}} e^{-y} dy.
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (3.8.30)$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \theta^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}+1-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{k}{\gamma}}}. \quad (3.8.31)
\end{aligned}$$

β) **2ος τρόπος:** Θέτουμε $x^\gamma = y$, το οποίο συνεπάγεται $x = y^{\frac{1}{\gamma}}$ και $dx = \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} dy$ και η (3.8.29) γίνεται

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}} \theta e^{-\theta y} dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{k}{\gamma}}} \int_0^\infty \frac{y^{(\frac{k}{\gamma}+1)-1} \theta^{\frac{k}{\gamma}+1} e^{-\theta y}}{\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)} dy \\
&= \frac{\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\theta^{\frac{k}{\gamma}}}. \quad (3.8.32)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 5. Στη βιβλιογραφία (και στο λογισμικό R) η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Weibull εμφανίζεται και με τη μορφή

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\gamma-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\gamma}, \quad x > 0, \quad (3.8.33)$$

με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^\gamma}, \quad x > 0 \quad (3.8.34)$$

και ροπή k -τάξης

$$E(X^k) = \theta^k \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right). \quad (3.8.35)$$

Άσκηση 11. Να αποδειχθεί η (3.8.35), αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση (3.8.33).

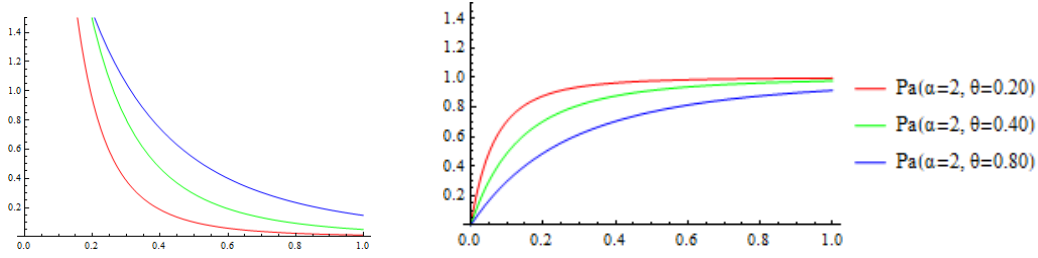
3.9 Κατανομή Pareto με Παραμέτρους (a, θ)

Ορισμός 25. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto με παραμέτρους a και θ ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{a\theta^a}{(x + \theta)^{a+1}}, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad \theta > 0. \quad (3.9.36)$$

Η συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{a\theta^a}{(x + \theta)^{a+1}} dx \\ &= a\theta^a \int_0^x (x + \theta)^{-a-1} dx \\ &= a\theta^a \left[\frac{(x + \theta)^{-a}}{-a} \right] \Big|_0^x \\ &= 1 - \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a. \end{aligned} \quad (3.9.37)$$



Σχήμα 3.9: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κατανομής Pareto με παραμέτρους $a = 2$ και $\theta = (0.20, 0.40, 0.80)$.

Θεώρημα 3.9.1. Αν η X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους a και θ , όπως ορίζεται στη σχέση (3.9.36), τότε η μέση της τιμή είναι

$$E(X) = \frac{\theta}{a-1} \quad (3.9.38)$$

και η διασπορά

$$Var(X) = \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}. \quad (3.9.39)$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή της κατανομής Pareto είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx \\ &= - \int_0^\infty x d(1 - F(x)) \\ &= - \int_0^\infty x d \left[\left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a \right] \quad \left(\int u dv = uv - \int v du \right) \\ &= -x \left[\left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a \right] \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a dx \end{aligned} \quad (3.9.40)$$

$$= 0 + \frac{\theta}{a-1} \int_0^\infty \frac{(a-1)\theta^{a-1}}{(x+\theta)^{a-1+1}} dx \quad (3.9.41)$$

$$= \frac{\theta}{a-1}, \quad a > 1. \quad (3.9.42)$$

Σημείωση: 1) Το πρώτο μέρος της (3.9.40) ισούται με μηδέν (0), διότι,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\left(\frac{\theta}{x+\theta} \right)^a \right] = \theta^a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x+\theta)^a}.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του De L' Hopital (παραγωγίζουμε αριθμητή και παρονομαστή χωριστά), έχουμε (επειδή $a-1 > 0$)

$$\theta^a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a(x+\theta)^{a-1}} = 0, \quad a > 1.$$

2) Η σχέση εντός του ολοκληρώματος στη σχέση (3.9.41) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto με παραμέτρους $(a-1, \theta)$.

Η ροπή δεύτερης τάξης υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx \\ &= - \int_0^\infty x^2 d(1-F(x)) \\ &= -x^2[1-F(x)] \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x[1-F(x)] dx \\ &= -x^2 \left(\frac{\theta}{x+\theta} \right)^a \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x \left(\frac{\theta}{x+\theta} \right)^a dx \\ &= 0 + 2 \int_0^\infty x \left(\frac{\theta}{x+\theta} \right)^a dx, \quad a > 2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\theta}{a-1} \right) \int_0^\infty x \frac{(a-1)\theta^{a-1}}{(x+\theta)^{(a-1)+1}} dx.$$

Γνωρίζουμε ότι, αν $X \sim Pa(a, \theta)$, τότε $E(X) = \frac{\theta}{a-1}$ και αν $X \sim Pa(a-1, \theta)$, τότε

$$E(X) = \frac{\theta}{(a-1)-1}.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left(\frac{2\theta}{a-1} \right) \left(\frac{\theta}{(a-1)-1} \right) \\ &= \left(\frac{2\theta}{a-1} \right) \left(\frac{\theta}{a-2} \right). \end{aligned} \quad (3.9.43)$$

Έτσι, η διασπορά γίνεται

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \left(\frac{2\theta}{a-1} \right) \left(\frac{\theta}{a-2} \right) - \left(\frac{\theta}{a-1} \right)^2 \\ &= \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}. \end{aligned} \quad (3.9.44)$$

Παράδειγμα 5. Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή Pareto με παραμέτρους a και θ , όπως ορίζεται στη σχέση (3.9.36). Να αποδείξετε ότι

$$E(X^3) = \frac{6\theta^3}{(a-1)(a-2)(a-3)}$$

και να υπολογίσετε την ασυμμετρία.

Λύση: Η ροπή τρίτης τάξης υπολογίζεται ως

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^\infty x^3 d(1 - F(x)) \\
&= -x^3[1 - F(x)] \Big|_0^\infty + 3 \int_0^\infty x^2[1 - F(x)] dx \\
&= -x^3 \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a \Big|_0^\infty + 3 \int_0^\infty x^2 \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a dx \\
&= 0 + 3 \int_0^\infty x^2 \left(\frac{\theta}{x + \theta} \right)^a dx, \quad a > 3 \\
&= \left(\frac{3\theta}{a-1} \right) \int_0^\infty x^2 \frac{(a-1)\theta^{a-1}}{(x+\theta)^{(a-1)+1}} dx. \tag{3.9.45}
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $X \sim Pa(a, \theta)$, τότε $E(X) = \frac{\theta}{a-1}$ και αν $X \sim Pa(a-1, \theta)$, τότε $E(X^2) = \frac{2\theta^2}{(a-1)(a-2)}$. Εντός του ολοκληρώματος στη σχέση (3.9.45) έχουμε τη δεύτερη ροπή της κατανομής Pareto με παραμέτρους $(a-1, \theta)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= \left(\frac{3\theta}{a-1} \right) \left(\frac{2\theta}{(a-1)-1} \right) \left(\frac{\theta}{(a-2)-1} \right) \\
&= \frac{6\theta^3}{(a-1)(a-2)(a-3)}
\end{aligned}$$

και η ασυμμετρία υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{E[X - E(X)]^3}{E\{[X - E(X)]^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{E(X^3) - [E(X)]^3 - 3E(X^2)E(X) + 3[E(X)]^2E(X)}{\{E(X^2) - [E(X)]^2\}^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(X^3) + 2[E(X)]^3 - 3E(X^2)E(X)}{\{E(X^2) - [E(X)]^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{6\theta^3}{(a-1)(a-2)(a-3)} + 2\frac{\theta^3}{(a-1)^3} - 3\frac{2\theta^2}{(a-1)(a-2)}\frac{\theta}{(a-1)}}{\left(\frac{2\theta^2}{(a-1)(a-2)} - \frac{\theta^2}{(a-1)^2}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{2\theta^3 a(a+1)}{(a-1)^3(a-2)(a-3)}}{\left(\frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{2(a+1)(a-2)^{(1/2)}}{a^{(1/2)}(a-3)}.
\end{aligned}$$

3.10 Απλή Κατανομή Pareto

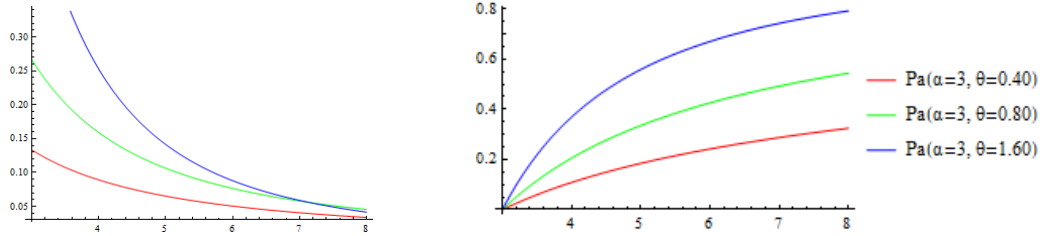
Ορισμός 26. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της απλής κατανομής Pareto ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}, \quad x > \theta, \quad a > 0. \quad (3.10.46)$$

Η αθροιστική συνάρτηση υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\theta}^x \frac{a\theta^a}{x^{a+1}} dx \\
&= a\theta^a \int_{\theta}^x x^{-a-1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a\theta^a \left(\frac{x^{-a}}{-a} \right) \Big|_{\theta}^x \\
&= 1 - \left(\frac{\theta}{x} \right)^a, \quad x > \theta.
\end{aligned} \tag{3.10.47}$$



Σχήμα 3.10: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της απλής κατανομής Pareto με παραμέτρους $a = 3$ και $\theta = (0.40, 0.80, 1.60)$.

Θεώρημα 3.10.1. Αν X ακολουθεί την απλή κατανομή Pareto με παραμέτρους a και θ , όπως ορίζεται στη σχέση (3.10.46), τότε η μέση της τιμή είναι

$$E(X) = \frac{a\theta}{a-1}, \quad a > 1.$$

Απόδειξη: Η μέση τιμή της κατανομής Pareto υπολογίζεται ως

$$E(X) = \int_{\theta}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} x \frac{a\theta^a}{x^{a+1}} dx$$

$$= a\theta^a \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \Big|_{\theta}^{\infty}$$

$$= \frac{a\theta}{a-1}, \quad a > 1, \quad (3.10.48)$$

η δεύτερη ροπή ως

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\theta}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{\theta}^{\infty} x^2 \frac{a\theta^a}{x^{a+1}} dx \\ &= -a\theta^a \frac{x^{-a+2}}{-a+2} \Big|_{\theta}^{\infty} \\ &= \frac{a\theta^2}{a-2}, \quad a > 2 \end{aligned} \quad (3.10.49)$$

και η ροπή k -τάξης ως

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_{\theta}^{\infty} x^k f(x) dx \\ &= \int_{\theta}^{\infty} x^k \frac{a\theta^a}{x^{a+1}} dx \\ &= -a\theta^a \frac{x^{k-a}}{k-a} \Big|_{\theta}^{\infty} \\ &= \frac{a\theta^k}{a-k}, \quad a > k. \end{aligned} \quad (3.10.50)$$

Άσκηση 12. Έστω η τυχαία μεταβλητή Y , ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 9$ και $\sigma^2 = 3$. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της Y .

3.11 Κατανομή Burr

Ορισμός 27. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή *Pareto* με παραμέτρους $a > 0$ και $\theta > 0$, και αθροιστική συνάρτηση όπως ορίστηκε στη σχέση (3.9.37), δηλαδή

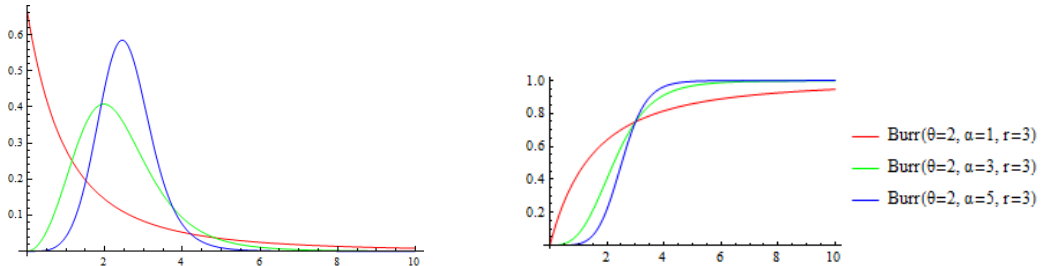
$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = 1 - \left(\frac{\theta}{y + \theta} \right)^a, \quad (3.11.51)$$

τότε η τυχαία μεταβλητή $X = Y^{\frac{1}{r}}$ ακολουθεί την κατανομή *Burr* με αθροιστική συνάρτηση

$$P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x^r + \theta} \right)^a, \quad x > 0. \quad (3.11.52)$$

Ορισμός 28. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομή *Burr* λαμβάνεται, αν πάρουμε την παράγωγο της $F_X(x)$, όπως ορίζεται στην (3.11.52), δηλαδή,

$$f(x) = ar\theta^a x^{r-1} (x^r + \theta)^{-a-1}, \quad x > 0. \quad (3.11.53)$$



Σχήμα 3.11: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της κατανομή *Burr* με παραμέτρους $\theta = 2$, $a = (1, 3, 5)$ και $r = 3$.

Παρατήρηση 6. Συνήθως, όταν εμφανίζονται (εκθετικά) μεγάλες ζημιές, η κατανομή *Pareto* θεωρείται ως μία κατάλληλη κατανομή. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, που χρειαζόμαστε μία κατανομή με βαριά ουρά και καλύτερη προσαρμοστικότητα της κατανομή *Pareto*, η οποία περιλαμβάνει και μη-μόντονες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε την κατανομή *Burr*.

Θεώρημα 3.11.1. Η ροπή k -τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κατανομή Burr, δίνεται από τη σχέση

$$E(X^k) = \frac{1}{\Gamma(a)} \theta^{k/r} \Gamma\left(1 + \frac{k}{r}\right) \Gamma\left(a - \frac{k}{r}\right), \quad k < ar. \quad (3.11.54)$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Burr στη σχέση (3.11.53) γράφεται και ως

$$f(x) = \frac{ar}{\theta} x^{r-1} \left(1 + \frac{x^r}{\theta}\right)^{-a-1}, \quad x > 0.$$

Θέτοντας $\frac{x^r}{\theta} = y$, το οποίο συνεπάγεται $x = (\theta y)^{1/r}$ και $\frac{1}{\theta} r x^{r-1} dx = dy$, η ροπή k -τάξης υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k \frac{ar}{\theta} x^{r-1} \left(1 + \frac{x^r}{\theta}\right)^{-a-1} dx \\ &= a\theta^{k/r} \int_0^\infty y^{k/r} (1+y)^{-a-1} dy \\ &= a\theta^{k/r} \int_0^\infty y^{k/r} \frac{1}{(1+y)^{a+1}} dy \\ &= a\theta^{k/r} \int_0^\infty y^{(k/r+1)-1} \frac{1}{(1+y)^{(k/r+1)+(a-k/r)}} dy \\ &= a\theta^{k/r} B\left(\frac{k}{r} + 1, a - \frac{k}{r}\right) \\ &= a\theta^{k/r} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right) \Gamma\left(a - \frac{k}{r}\right)}{\Gamma(a+1)} \end{aligned} \quad (3.11.55)$$

από όπου προκύπτει η (3.11.54).

Παρατήρηση 7. Για τον υπολογισμό της (3.11.55), έχουμε κάνει χρήση της συνάρτησης

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx \quad \text{και} \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

~~3.12 Κατανομές Ακραίων Τιμών~~

~~Η θεωρία ακραίων τιμών (extreme value) προήλθε κυρίως από τις ανάγκες των αστρονόμων να δεχθούν ή να απορρίψουν απομακρυσμένες παρατηρήσεις. Έχει σαν στόχο την εκτίμηση της πιθανότητας ακραίων (σπάνιων) γεγονότων τα οποία εμφανίζονται στις ουρές κατανομών. Η θεωρία ακραίων τιμών έχει μια τεράστια ποικιλία εφαρμογών που αφορούν φυσικά φαινόμενα, όπως βροχοπτώσεις, πλημμύρες, ατμοσφαιρική ρύπανση, κλ.π.~~

~~3.12.1 Κατανομή Τύπου Gumbel~~

~~**Ορισμός 29.** Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή τύπου Gumbel με παραμέτρους $s > 0$ και $m \in \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως~~

$$~~f(x) = \frac{1}{s} e^{-\frac{x-m}{s}} e^{-e^{-\frac{x-m}{s}}}, \quad x \geq m~~ \quad (3.12.56)$$

~~και η αθροιστική συνάρτηση ως~~

$$~~F(x) = e^{-e^{-\frac{x-m}{s}}}. \quad (3.12.57)~~$$

~~**Θεώρημα 3.12.1.** Η ροπογεννήτρια της κατανομής τύπου Gumbel, όπως εμφανίζεται στη σχέση (3.12.56) ισούται με~~

$$~~M_X(t) = e^{tm} \Gamma(1-ts), \quad ts < 1.~~$$

~~**Αύση:** Έστω $Z = e^{-\frac{X-m}{s}} \Rightarrow X = m - s \ln Z$ και $dx = -\frac{s}{z} dz$. Συνεπώς, η Z έχει εκθετική κατανομή της μορφής~~

$$~~f(z) = e^{-z}, \quad z \geq 0.~~$$