

Άσκηση 5. Έστω η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ως

σελ 10

Άσκηση 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{4-2x}{3}, & \frac{1}{2} \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.8)$$

Να βρεθεί η $P(0.25 < X \leq 1.25)$.

Λύση

$$\begin{aligned} P(0.25 < X \leq 1.25) &= \int_{0.25}^{1.25} f_X(x) dx = \\ &= \int_{0.25}^{0.5} f_X(x) dx + \int_{0.5}^{1.25} f_X(x) dx = \int_{0.25}^{0.5} 2x dx + \int_{0.5}^{1.25} \underbrace{\frac{4-2x}{3}}_{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x} dx = \\ &= \left[x^2 \right]_{0.25}^{0.5} + \left[\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \right]_{0.5}^{1.25} = (0.5^2 - 0.25^2) + \\ &\quad \frac{4}{3} \cdot 1.25 - \frac{1}{3} \cdot 1.25^2 - \left(\frac{4}{3} \cdot 0.5 - \frac{1}{3} \cdot 0.5^2 \right) = 0.75 \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έστω ότι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές κάθε μία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Άσκηση 6
σελ 11.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Έστω $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Να βρείτε την $P(Y > \frac{1}{2})$.

Λύση

$$\begin{aligned} P(Y > \tfrac{1}{2}) &= P(\max\{X_1, X_2, X_3\} > \tfrac{1}{2}) = 1 - P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq \tfrac{1}{2}) \\ &= 1 - P(X_1 \leq \tfrac{1}{2}, X_2 \leq \tfrac{1}{2}, X_3 \leq \tfrac{1}{2}) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} \\ &= 1 - \underbrace{P(X_1 \leq \tfrac{1}{2}) \cdot P(X_2 \leq \tfrac{1}{2}) \cdot P(X_3 \leq \tfrac{1}{2})}_{\text{ισοκ.}} = 1 - \left[P(X_1 \leq \tfrac{1}{2}) \right]^3 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^3 = \frac{511}{512} \end{aligned}$$

$$\bullet P(X_1 \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = 3 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 3 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$x^\alpha \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$= \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = [x^3]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3 = \frac{1}{8}$$

$$\max \{X_1, \dots, X_3\} > \frac{1}{2} \rightarrow \max \{X_1, \dots, X_3\} \leq \frac{1}{2}$$

$$\min \{X_1, \dots, X_3\} > \frac{1}{2} \rightarrow X_1 > \frac{1}{2}, X_2 > \frac{1}{2}, X_3 > \frac{1}{2}$$

Άσκηση 16. Να συγκριθούν οι κατανομές της κατανομής Pareto με παραμέτρους $a = 1$ και $\theta = 40$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\rightarrow f(x) = \frac{a\theta^a}{(x+\theta)^{a+1}}, \quad x > 0,$$

Ανν. 13 σελ 58

και της κατανομής Burr με παραμέτρους $\gamma = 0.5$, $r = 2.5$ και $\lambda = 1600$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{r\gamma \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\gamma-1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\gamma\right]^{r+1}} = \gamma r \lambda^\gamma x^{\gamma-1} (\lambda + x^\gamma)^{-\gamma-1}, \quad x > 0.$$

Burr(8, 1, 1) =
Pareto

Λύση

$$X_1 \sim S_1(x) \quad \text{και} \quad X_2 \sim S_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_2(x)}{S_1(x)} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-f_1(x)}{-f_2(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$\alpha = 1, \theta = 40$$

$$f_1(x) = \frac{1 \cdot 40^1}{(x+40)^{1+1}} = \frac{40}{(x+40)^2}, \quad S_1(x) = \frac{40}{40+x}$$

$$\delta = 0.5 \quad r = 2.5 \quad l = 1600$$

$$f_2(x) = \frac{(0.5)(2.5) \left(\frac{x}{1600}\right)^{2.5}}{x \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{1600}\right)^{0.5}\right]^{2.5+1}}, \quad S_2(x) = \left(\frac{1600}{x^{2.5} + 1600}\right)^{0.5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{40}{40+x}}{\sqrt{\frac{1600}{x^{2.5} + 1600}}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{x^{2.5} + 1600}} = \frac{40}{\sqrt{x^{2.5} + 1600}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{40 \cdot \sqrt{x^{2.5} + 1600}}{40 \cdot (40+x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^{2.5} + 1600}}{x+40} = +\infty$$

$$\frac{\sqrt{x^{2.5} + 1600}}{x+40} = \frac{\sqrt{x^{2.5} \left(1 + \frac{1600}{x^{2.5}}\right)}}{x \left(1 + \frac{40}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^{2.5}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1600}{x^{2.5}}}}{x \left(1 + \frac{40}{x}\right)}$$

$$= \frac{x^{\frac{2.5}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1600}{x^{2.5}}}}{x \cdot \left(1 + \frac{40}{x}\right)} = \frac{x^{0.25} \cdot \sqrt{1 + \frac{1600}{x^{2.5}}}}{1 + \frac{40}{x}}$$

$\rightarrow 0$
 $\rightarrow 0$
 $= +\infty \cdot \frac{\sqrt{1+0}}{1+0}$
 $= +\infty \cdot 1$
 $= +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{x^a} = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty \quad a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{0.25} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1600}{x^{2.5}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40}{x} = 0$$

$$S_1(x) \rightarrow +\infty$$

Pareto

$$(a=1, \theta=40)$$

$$S_2(x)$$

Burr

$$(\gamma=0.5, r=2.5, \lambda=1600)$$

Άσκηση Extra

Να συζητηθούν οι κατανομές της Ενθετικής με παράμετρο

$\theta=2$ και συνάρτηση π.π. $f_1(x) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$

και της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu=0, \sigma^2=4$

και συνάρτηση π.π. $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$

Λύση

~~$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$$~~

$$S(x) = \int_x^{+\infty} f(x) dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$\theta=2$$

$$\mu=0, \sigma^2=4$$

$$f_1(x) = 2e^{-2x}, x > 0,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}, x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{2\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-2x + \frac{x^2}{8}}$$

$$\begin{array}{l} h(x) = C \cdot g(x) \\ \pi \cdot x \cdot \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2e^{-2x} = 2 \cdot e^{-2x} \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\frac{\rightarrow a^x}{\rightarrow a^y} = a^{x-y}$$

$$= 2\sqrt{8\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x + \frac{x^2}{8}} = +\infty$$

$$\frac{x^2}{8} - 2x = x^2 \left(\underbrace{\frac{1}{8}}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{\left(\frac{2}{x} \right)}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$\cdot \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

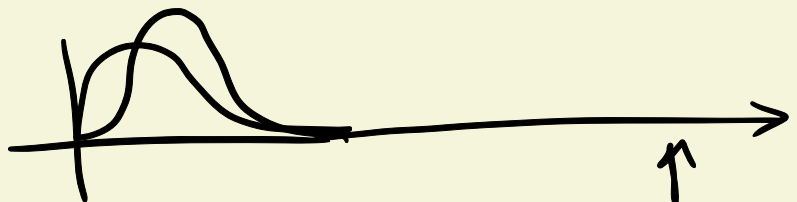
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{8} - 2x = +\infty \quad \leftarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{x^2}{8} - 2x \right)} = +\infty$$

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = C \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} C \end{array}$$

Αρα n $f_1(x)$ έχει βαθμό ουσιαστικό $2n$
 $f_2(x)$



Άσκηση 18. Έστω X το πλήθος από κεφαλές που επιτυγχάνεται αν ρίξουμε ένα νόμισμα τέσσερις φορές. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας α) της $Y = \frac{1}{1+X}$ και β) της $Y = (X-2)^2$.

Απάντηση 15 σελ 65.

Λύση

$P = \pi\theta$. το νόμισμα να φέρει κεφαλή $= \frac{1}{2}$

$$X \sim B(n, p) = B(4, \frac{1}{2})$$

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \stackrel{n=4}{\underset{p=\frac{1}{2}}{=}} \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

$$= \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$0! = 1$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

x	0	1	2	3	4
$P(X=x) = f_X(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

α) $y = \frac{1}{1+X}$

x	0	1	2	3	4
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P\left(\frac{1}{1+X} = y\right) =$$

$$= P\left(X = \frac{1}{y} - 1\right) = f_X\left(\frac{1}{y} - 1\right) =$$

$$= \binom{4}{\frac{1}{y}-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad y \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

81a $y = \frac{1}{3}$ $\binom{4}{\frac{1}{1/3} - 1} = \binom{4}{3-1} = \binom{4}{2}$

$$h(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$h(x) \rightarrow$$

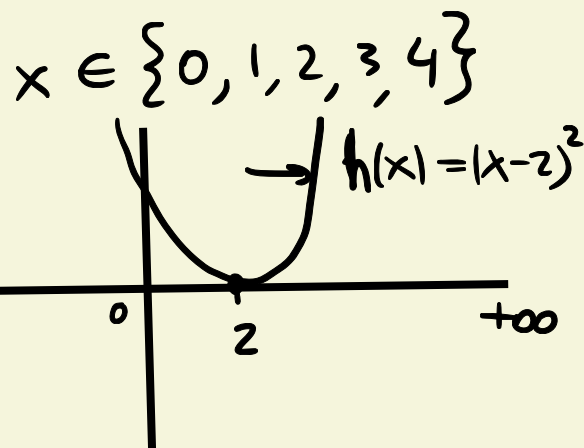
b) $y = (x-2)^2$

X	0	1	2	3	4
Y	4	1	0	1	4

$$x=0 \rightarrow y = (-2)^2 = 4$$

$$x=1 \rightarrow y = (-1)^2 = 1$$

$$Y \in \{0, 1, 4\}$$



$$f_Y(y) = P(Y=y)$$

• $y=0$ $P(Y=0) = P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6/16$

• $y=1$ $P(Y=1) = P(\{X=3\} \cup \{X=1\}) =$

$$P(X=x) = P(\{X=x\})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(X=3, X=1) = 0$$

$$= P(X=3) + P(X=1) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{4}{16} = \frac{8}{16}$$

• $y=4$ $P(Y=4) = P(\{X=0\} \cup \{X=4\}) = P(X=0) + P(X=4)$
 $= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$

y	0	1	4
$P(Y=y) = f_Y(y)$	6/16	8/16	2/16

Άσκηση 19. Έστω X τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί την κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^3$.

Άσκηση 16
σελ 65

Λύση

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq y^{1/3}) \\ &= \int_0^{y^{1/3}} f_X(x) dx = \int_0^{y^{1/3}} 6 \cdot x(1-x) dx = \\ &= 6 \cdot \int_0^{y^{1/3}} (x - x^2) dx = 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{y^{1/3}} = \\ &= 6 \cdot \left[\left(\frac{y^{2/3}}{2} - \frac{y}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \\ &= 6 \cdot \frac{y^{2/3}}{2} - 6 \cdot \frac{y}{3} = 3 \cdot y^{2/3} - 2y \end{aligned}$$

Άρα

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot 1 = 2y^{-\frac{1}{3}} - 2$$