

'Όριο ιδίας κλάσης m

$$Y = \min \{X, m\} = X \wedge m = \begin{cases} X & , X \leq m \\ m & , X > m \end{cases}$$

π.χ. $m=30$, $X \sim N(30, 1)$ $X=32,1721$

$$y = \min \{x, m\} = \min \{32,1721, 30\} = 30.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y) & , y < m \\ 1 & , y \geq m \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & , y < m \\ 1 - F_X(m) & , y = m \\ 0 & , y > m \end{cases}$$

$$\bullet E(X \wedge m) = \int_0^m x f_X(x) dx + m \cdot [1 - F_X(m)]$$

$$\bullet E(X \wedge m) = \int_0^m [1 - F_X(x)] dx$$

$$\bullet E(X \wedge m) = E(X) - \int_0^\infty x f_X(x+m) dx$$

Άσκηση 1 (Παραλλαγή του παρ. 24 σελ 87)

Αν η X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους α και θ και σ.π.ν. την :

$$f_X(x) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \theta > 0.$$

Να βρεθούν: Η σ.π.ν., η σ.κ. και η μέση τιμή του κόστους ανά ζημιά, αν το όριο ιδίας υπέρβασης είναι " m ".

Λύση

Η σ.π.ν. είναι :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < m \\ 1 - F_X(m), & y = m \\ 0, & y > m \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta^\alpha}{(y+\theta)^{\alpha+1}}, & y < m \\ \left(\frac{\theta}{\theta+m}\right)^\alpha, & y = m \\ 0, & y > m \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y \leq m \\ 1, & y > m \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{\theta+y}\right)^\alpha, & y \leq m \\ 1, & y > m \end{cases}$$

Για την μέση τιμή του κόστους ανά ζημιά με όριο ιδίας υπέρβασης m έχουμε:

$$E(X \wedge m) = E(X) - \int_0^\infty x \cdot f(x+m) dx =$$

$$\text{Για } X \sim Pa(\alpha, \theta) \Rightarrow E(X) = \frac{\theta}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1$$

$$= \frac{\theta}{\alpha-1} - \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\alpha \theta^{\alpha}}{(\underbrace{x+m+\theta}_{\theta+m})^{\alpha+1}} dx =$$

Θέτουμε $y = x+m \Rightarrow dy = dx$

$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow m$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$(y-m) \cdot \frac{\alpha \theta^{\alpha}}{(y+\theta)^{\alpha+1}} dy$

$$= \frac{\theta}{\alpha-1} - \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\alpha \theta^{\alpha}}{[x+(m+\theta)]^{\alpha+1}} dx =$$

$$= \frac{\theta}{\alpha-1} - \underbrace{\frac{\theta^{\alpha}}{(\theta+m)^{\alpha}}}_{E(L) \text{ όπου } L \sim \text{Pa}(\alpha, \theta+m)} \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\alpha \cdot (\theta+m)^{\alpha}}{[x+(m+\theta)]^{\alpha+1}} dx =$$

$E(L)$ όπου $L \sim \text{Pa}(\alpha, \theta+m)$

$$= \frac{\theta}{\alpha-1} - \left(\frac{\theta}{\theta+m}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\theta+m}{\alpha-1}$$

Άσκηση 2 (Παράλλαξι παρ. 24 σελ 87).

Αν η X ακολουθεί κανονική Γαμμα με παραμέτρους z και θ (δηλαδή $X \sim \text{Gamma}(z, \theta)$). Να

βρεθεί η μέση τιμή για το νόστος ανα ζήτριά, αν το όριο ίδιας υπάρσης είναι " m "=3.

Λύση

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > 0$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\theta}$$

$$E(X+m) = E(X) - \int_0^{\infty} x f_X(x+m) dx =$$

$$\Gamma(n) \stackrel{\text{new}}{=} (n-1)!$$

$$= \frac{2}{\theta} - \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} (x+m)^{2-1} \cdot e^{-\theta(x+m)} dx =$$

$$= \frac{2}{\theta} - \theta^2 e^{-\theta m} \int_0^{\infty} x \cdot (x+m) e^{-\theta x} dx =$$

$$= \frac{2}{\theta} - \theta^2 e^{-\theta m} \cdot \left[\underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-\theta x} dx}_{I_1} + m \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-\theta x} dx}_{I_2} \right]$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\theta x} dx = \int_0^{\infty} x^{3-1} e^{-\theta x} dx = \frac{\Gamma(3)}{\theta^3} = \frac{2}{\theta^3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-\theta x} dx = \frac{\Gamma(a)}{\theta^a}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} x \cdot \theta e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\text{Ara } E(X+m) = \frac{2}{\theta} - \theta^2 e^{-\theta m} \cdot \left[\frac{2}{\theta^3} + m \cdot \frac{1}{\theta^2} \right] =$$

$$= \frac{2}{\theta} - \frac{2e^{-\theta m}}{\theta} - m e^{-\theta m}$$

$$\text{da } m=3 \Rightarrow E(X+3) = \frac{2}{\theta} - \frac{2e^{-3\theta}}{\theta} - 3e^{-3\theta}$$

Αφαίρεξιο Ποσό

$$Y_L = (X-d)_+ = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases}, \quad Y_P = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases}$$

Προσχεματικό Αφαίρεξιο Ποσό

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X & , X > d \end{cases}, \quad Y_P = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & , X \leq d \\ X & , X > d \end{cases}$$

Κεφάλαιο 8 Όριο ίδιας πράξης και αφαιρ. ποσό. ($d < m$)

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , d < X \leq m \\ m-d & , X > m \end{cases}, \quad Y_P = \begin{cases} X-d & , d < X \leq m \\ m-d & , X > m \end{cases}$$

$$E(Y_L) = \int_d^m [1 - F_X(x)] dx$$

$$E(Y_L) = \int_d^m (x-d) f_X(x) dx + (m-d) [1 - F_X(m)]$$

Προνομιανό Αφαιρετικό ποσό και Όριο Ιδία πράξης ($d < m$)

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X & , d \leq X \leq m \\ m & , X > m \end{cases} \quad Y_P = \begin{cases} X & , d \leq X \leq m \\ m & , X > m \end{cases}$$

$$E(Y_L) = \int_d^m x f_X(x) dx + m \cdot [1 - F_X(m)]$$

$$E(Y_L) = E[X \wedge m] - E[X \wedge d] + d \cdot [1 - F_X(d)]$$

Άσκηση 24 / Σελ 112

Έστω ότι οι ζημιές ακολουθούν Λογαριθμικοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu=5$ και $\sigma^2=1$. Η ασφαλιστρια για ζημιές μικρότερες των 40.000 δεν πληρώνει τίποτα και για κάθε ζημιά μεγαλύτερη των 40.000 πληρώνει όλο το ποσό (προνομιανό αφαιρετικό ποσό) μέχρι το μέγιστο ποσό των 80.000. Να υπολογιστεί το αναμενόμενο ποσό που πληρώθηκε ανά ζημιά.

Λύση

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq 40.000 \\ X & , 40.000 < X \leq 80.000 \\ 80.000 & , X > 80.000 \end{cases}$$

Gib zu $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ $Y = e^X$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad E(X) = \mu$$

$$\left. \begin{aligned} E(Y) = 5 &\Rightarrow e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = 5 \\ \text{Var}(Y) = 1 &\Rightarrow (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu + \sigma^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mu, \sigma^2) = (\dots)$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = \\ &= P\left(\underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

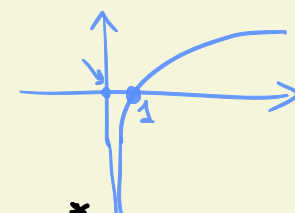
$$E(Y_L) = E[X_{nm}] - E[X_{nd}] + d \cdot [1 - F_X(d)]$$

$$E[X_{nm}] = \underbrace{\int_0^m x \cdot f_X(x) dx}_{I_1} + m [1 - F_X(m)] =$$

$$I_1 = \int_0^m x \cdot f_X(x) dx = \int_0^m x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Setze $\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = u \Rightarrow x = e^{\mu + \sigma u} \Rightarrow dx = \sigma \cdot e^{\mu + \sigma u} du$

$x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow m \Rightarrow u \rightarrow \frac{\ln m - \mu}{\sigma} = m^*$



$$\int_{-\infty}^{m^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma e^{\mu + \sigma u} du = \int_{-\infty}^{m^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu} \cdot e^{-\frac{u^2}{2} + \sigma u} du$$

$$= e^{\mu} \cdot \int_{-\infty}^{m^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} du =$$

$$\begin{aligned} -\frac{u^2}{2} + \sigma u &= \\ &= -\frac{(u-\sigma)^2 - \sigma^2}{2} \\ &= -\frac{(u-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

$$= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{m^*} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}}}_{L \sim N(\sigma, 1)} du$$

$$= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot P(L \leq m^*) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot P(\underbrace{L - \sigma}_{\sim N(0,1)} \leq m^* - \sigma)$$

$$= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \Phi(m^* - \sigma) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln m - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)$$

Apá $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

$$E(X_{\wedge m}) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln m - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) + m \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln m - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$E(X_{\wedge 80000}) = 244,6919$$

$$E(X_{\wedge 40000}) = 244,6923$$

Apá $E(Y_L) = 0.0005230498$

0.0005230498

Άσκηση 25/Σελ 112

Έστω ότι το μέγεθος ζημιάς X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1400. Μια ασφαλιστική εταιρία προσφέρει δύο τύπους ασφαλιστικής κάλυψης. Ο πρώτος τύπος υποκείται σε αφαιρετικό ποσό $d=200$ χωρίς όριο ίδιας κλάτης και συντελεστή μεταβλητότητας για το κόστος ανα πληρωμή είναι κ_1 . Ο δεύτερος τύπος υποκείται σε αφαιρετικό ποσό $d=200$, όριο ίδιας κλάτης $m=1000$ και συντελεστή μεταβλητότητας για το κόστος ανα πληρωμή είναι κ_2 . Να βρεθεί κατά πόσο ο κ_1 είναι μεγαλύτερος του κ_2 .

Λύση

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases} \Rightarrow Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq 200 \\ X-200 & , X > 200 \end{cases}$$

• Συντελεστής Μεταβλ.

$$CV_Y = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{E(X)}$$

$$CV_{Y_P} = \kappa_1 = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_P)}}{E(Y_P)}$$

$$Y_P = Y_L | Y_L > 0 = X-d | X-d > 0 = X-d | \underline{X > d}$$

$$E(Y_P) = \frac{E(Y_L)}{1-F_X(d)} \quad \text{και} \quad \text{Var}(Y_P) = \frac{\text{Var}(Y_L)}{(1-F_X(d))^2}$$

$$CV_{Y_P} = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_P)}}{E(Y_P)} = \frac{\sqrt{\frac{\text{Var}(Y_L)}{(1-F_X(d))^2}}}{\frac{E(Y_L)}{1-F_X(d)}} = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_L)} \cdot \cancel{(1-F_X(d))}}{\cancel{\sqrt{(1-F_X(d))^2}} \cdot E(Y_L)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_L)}}{E(Y_L)} =: CV_{Y_L}$$