

Άσκηση 28. Έστω ότι το μέγεθος ζημιάς X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1400. Μία ασφαλιστική εταιρία προσφέρει δύο τύπους ασφαλιστικής κάλυψης. Ο πρώτος τύπος υπόκειται σε αφαιρετέο ποσό $d = 200$ χωρίς όριο ιδίας κράτησης και ο συντελεστής μεταβλητότητας για το κόστος ανά πληρωμή είναι k_1 . Ο δεύτερος τύπος υπόκειται σε αφαιρετέο ποσό $d = 200$, όριο ιδίας κράτησης $m = 1000$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας για το κόστος ανά πληρωμή είναι k_2 . Να βρεθεί κατά πόσο ο k_1 είναι μεγαλύτερος του k_2 .

σελ 112
Άσκηση
25

Λύση

Για τον πρώτο τύπο κάλυψης έχουμε:

$$Y_{L_1} = \begin{cases} 0 & , X \leq 200 \\ X - 200 & , X > 200 \end{cases}$$

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

$$k_1 = CV(Y_{P_1}) = CV(Y_{L_1})$$

Άρα $X \sim \text{Exp}(\theta)$ να, $E(X) = 1400 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\theta} = 1400 \Rightarrow \theta = \frac{1}{1400}$$

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$$

$$\theta = \frac{1}{1400}$$

$$\begin{aligned} E[Y_{L_1}] &= \int_0^{+\infty} (x-d) f_X(x) dx \quad \begin{matrix} \xrightarrow{x=y+d} \\ x-d=y \\ dx=dy \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow -d \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{matrix} \quad \int_0^{+\infty} y \cdot f_X(y+d) dy \\ &= \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}(y+d)} dy = e^{-\frac{d}{1400}} \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}y} dy \\ &= e^{-\frac{200}{1400}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1400}} = 1400 \cdot e^{-\frac{1}{7}} = 1213,63 \end{aligned}$$

σ.η.η. $\text{Exp}(\frac{1}{1400})$
 $E[L]$

$$\begin{aligned}
 \bullet E[Y_{L_1}^2] &= \int_d^{+\infty} (x-d)^2 f_X(x) dx \stackrel{y=x-d}{=} \int_0^{+\infty} y^2 f_X(y+d) dy \\
 &= \int_0^{+\infty} y^2 \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}(y+d)} dy = e^{-\frac{d}{1400}} \int_0^{+\infty} y^2 \frac{1}{1400} e^{-\frac{y}{1400}} dy \\
 &= \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{7}} \cdot \int_0^{+\infty} y^{3-1} e^{-\frac{1}{1400}y} dy = \frac{e^{-\frac{1}{7}}}{1400} \cdot \frac{\Gamma(3)}{\left(\frac{1}{1400}\right)^3} = \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{7}}}{1400} \cdot 2! \cdot (1400)^3 = 2 \cdot 1400^2 e^{-\frac{1}{7}} = 3.398.161,36703
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_{L_1}) &= E(Y_{L_1}^2) - [E(Y_{L_1})]^2 = \\
 &= 1.925.263,5901207
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } CV(Y_{L_1}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_{L_1})}}{E(Y_{L_1})} = 1,1433.$$

Για το δεύτερο ζήτημα ασφαλιστικής κάλυψης έχουμε ότι:

$$Y_{L_2} = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , d < X \leq m \\ m-d & , X > m \end{cases} \Rightarrow Y_{L_2} = \begin{cases} 0 & , X \leq 200 \\ X-200 & , 200 < X \leq 1000 \\ 800 & , X > 1000 \end{cases}$$

$$E(Y_{L2}) = \int_d^m (x-d) f_x(x) dx + (m-d) \cdot [1 - F_x(m)] =$$

$$\begin{array}{l} y=x-d \Rightarrow x=y+d \\ dy=dx \\ \hline x \rightarrow d \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow m \Rightarrow y \rightarrow m-d \end{array} \int_0^{m-d} y \cdot f_x(y+d) dy + (m-d) [1 - F_x(m)] =$$

$$= \int_0^{800} y \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}(y+200)} dy + 800 \cdot \left[e^{-\frac{1}{1400} \cdot 1000} \right] =$$

$$= e^{-\frac{5}{7}} \cdot \underbrace{\int_0^{800} y \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400} y} dy}_{I_1} + 800 e^{-\frac{5}{7}}$$

$$I_1 = \int_0^{800} y \underbrace{\frac{1}{1400} \cdot e^{-\frac{1}{1400} y}}_{(-e^{-\frac{1}{1400} y})'} dy = \left[y \cdot (-e^{-\frac{1}{1400} y}) \right]_0^{800} - \int_0^{800} -e^{-\frac{1}{1400} y} dy$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x)g(x) \Rightarrow$$

$$\int_A f(x) g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{x \in A} - \int_A f'(x) g(x) dx$$

$$= -800 e^{-\frac{800}{1400}} + 0 + \int_0^{800} e^{-\frac{1}{1400} y} dy =$$

$$= 1400 \cdot \underbrace{\int_0^{800} \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400} y} dy}_{\text{f.k.}} - 800 e^{-\frac{4}{7}} = 1400 \cdot \left(1 - e^{-\frac{800}{1400}} \right) - 800 e^{-\frac{4}{7}} = \dots$$

$$\int_0^x \theta e^{-\theta y} dy \stackrel{\text{f.k.}}{=} F_x(x) = \underline{1 - e^{-\theta \cdot x}}$$

$$E(Y_{L_2}) = 528,2707$$

$$E(Y_{L_2}^2) = \int_d^m (x-d)^2 f_x(x) dx + (m-d)^2 \cdot [1 - F_x(m)]$$

$$= \int_0^{m-d} y^2 f_x(y+d) dy + (m-d)^2 [1 - F_x(m)]$$

$$= \int_0^{800} y^2 \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}(y+200)} dy + 800^2 \cdot \left[e^{-\frac{5}{7}} \right]$$

$$= e^{-\frac{1}{7}} \int_0^{800} y^2 \cdot \frac{1}{1400} e^{-\frac{1}{1400}y} dy + 800^2 e^{-\frac{5}{7}} =$$

$$= 382584,7621645$$

$$\text{Var}(Y_{L_2}) = E(Y_{L_2}^2) - [E(Y_{L_2})]^2 = 103.514,82963796$$

$$CV(Y_{L_2}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_{L_2})}}{E(Y_{L_2})} = 0,609039$$

$$\text{Var}_i \quad CV(Y_P) = CV(Y_L)$$

$$E(Y_P) = \frac{E(Y_L)}{1 - F_x(d)} \Rightarrow \text{Var}(Y_P) = \frac{\text{Var}(Y_L)}{(1 - F_x(d))^2}$$

$$\text{Apa} \quad CV(Y_P) = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_P)}}{E(Y_P)} = \frac{\sqrt{\frac{\text{Var}(Y_L)}{[1 - F_x(d)]^2}}}{\frac{E(Y_L)}{1 - F_x(d)}} =$$

$$= \frac{[1 - F_X(d)] \cdot \sqrt{\text{Var}(Y_L)}}{\sqrt{[1 - F_X(d)]^2} \cdot E(Y_L)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y_L)}}{E(Y_L)} =: CV(Y_L)$$

Ενοπίσμως

$$K_1 = CV(Y_{L1}) = 1,1433$$

$$K_2 = CV(Y_{L2}) = 0,609039$$

- $K_1 - K_2 = 1,1433 - 0,609039 = 0,534261$
h

- $K_1 = (1+r)K_2 \Rightarrow r = \frac{K_1}{K_2} - 1 = 0.8772196854$

Ο K_1 είναι μεγαλύτερος 87,73% μεγαλύτερος του K_2

Κεφ 9 Πληθωρισμός $d \rightarrow \left(\frac{d}{1+r}\right)$

$$Z = (1+r) \cdot X \Rightarrow F_Z(x) = F_X\left(\frac{x}{1+r}\right)$$

$$f_Z(x) = \frac{1}{1+r} \cdot f_X\left(\frac{x}{1+r}\right)$$

$$E(Z) = (1+r) \cdot E(X) \quad , \quad \text{Var}(Z) = (1+r)^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Αν

$$Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq d \\ X-d & , X > d \end{cases} \quad Y_L = (X-d)_+$$

$$Y_{Lr} = \begin{cases} 0 & , Z \leq d \\ Z-d & , Z > d \end{cases} = \begin{cases} 0 & , (1+r)X \leq d \\ (1+r)X-d & , (1+r)X > d \end{cases}$$

$$E(Y_{Lr}) = E\left[\left((1+r)X - d\right)_+\right] = (1+r) \cdot \left\{ E(X) - E\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right) \right\}$$

Ενικά

$$E((X-d)_+) = E(X) - E(X \wedge d) = d$$

$$E(X) = E((X-d)_+) + E(X \wedge d)$$

$$Y_{Pr} = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & , (1+r)X \leq d \\ (1+r)X - d & , (1+r)X > d \end{cases}$$

$$E(Y_{Pr}) = \frac{E(Y_{Lr})}{1 - F_Z(d)} = \frac{E(Y_{Lr})}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \xrightarrow{\text{από πάνω}}$$

Άσκηση 1 (Παραλλαγή παρ. 34 σελ 119)

Μια ασφαλιστική εταιρία θέτει $m=170$ ως όριο για υπέρπλησης και διαπιστώνει ότι το 70% των ζημιών είναι κάτω του ορίου ίδιας υπέρπλησης. Το μέγεθος των ζημιών ακολουθεί κατανομή Weibull με παραμέτρους $\gamma=2$ και θ άγνωστο. Αν εφαρμόσει πληθωρισμός 4% σε όλα τα μέγεθη ζημιών, να υπολογιστεί το ποσοστό των ζημιών που είναι κάτω του ορίου ίδιας υπέρπλησης.

Λύση

$$P(Z < m) \quad \text{όπου} \quad Z = (1+r)X$$

$$X \sim \text{Weibull}(\delta, \theta) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\theta x^\delta}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0$$

$$P(X < m) = 0.7 \Rightarrow P(X < \underline{170}) = 0.7 \Rightarrow$$

$$1 - e^{-\theta \cdot 170^2} = 0.7 \Rightarrow e^{-\theta \cdot 289000} = 0.3 \Rightarrow$$

$$-\theta \cdot 289000 = \ln(0.3) \Rightarrow \theta = 0.00004166 =$$

Για την $Z = (1+r)X$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= F_X\left(\frac{x}{1+r}\right) = F_X\left(\frac{x}{1.04}\right) \\ &= 1 - e^{-\theta \cdot \left(\frac{x}{1.04}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(Z < 170) &= F_Z(170) = 1 - e^{-0.00004166 \cdot \frac{170^2}{1.04^2}} = \\ &= 1 - 0.3285252 = 0.6714748. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Μια ασφαλιστική εταιρία εφαρμόζει αφαιρέσιο ποσό $d=30$ και το μέγεθος ζημιών του χαρτοφυλακίου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 25. Το επόμενο έτος εφαρμόζεται πληρωσιμότητα 6% στα ύψη των ζημιών. Να υπολογίσετε το αναμενόμενο κόστος ανά ζημία για το επόμενο έτος καθώς και το αναμενόμενο κόστος ανά πληρωμή.

Λύση

$$\text{Είναι } Y_L = \begin{cases} 0 & , X \leq 30 \\ X - 30 & , X > 30 \end{cases} \Rightarrow Y_P = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & , X \leq 30 \\ X - 30 & , X > 30 \end{cases}$$

Με την εφαρμογή ηλθωρισμός $r=6\%=0.06$ έχουμε ότι:

$$Y_{Lr} = \begin{cases} 0 & , 1.06X \leq 30 \\ 1.06X - 30 & , 1.06X > 30 \end{cases} \quad Y_{Pr} = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & , 1.06X \leq 30 \\ 1.06X - 30 & , 1.06X > 30 \end{cases}$$

Για την $X \sim \text{Exp}(\theta) \Rightarrow E(X) = 25 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\theta} = 25 \Rightarrow \theta = \frac{1}{25} = 0.04$$

$$E(Y_{Lr}) = E[(1.06X - 30)_+] = 1.06 \cdot \left\{ E(X) - E\left(X \wedge \frac{30}{1.06}\right) \right\}$$

$$E(X \wedge \alpha) = \int_0^{\alpha} x f_x(x) dx + \alpha \cdot [1 - F_x(\alpha)] =$$
$$\stackrel{h}{=} \int_0^{\alpha} (1 - F_x(x)) dx = \int_0^{\alpha} e^{-\frac{1}{25}x} dx = \frac{1 - e^{-\frac{1}{25}\alpha}}{1/25}$$

$$\int_0^x \theta e^{-\theta y} dy = 1 - e^{-\theta x} \Rightarrow \int_0^x e^{-\theta y} dy = \frac{1 - e^{-\theta x}}{\theta}$$

$$= 25 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{25}\alpha})$$

Άρα $E(Y_{Lr}) = 1.06 \cdot \left\{ 25 - 25 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{25} \cdot \frac{30}{1.06}}) \right\}$

$$= 1.06 \cdot 25 \cdot e^{-1.1320754717} = 0.3417053156 \cdot 25$$
$$= 0.6834106312$$

$$E(Y_{Pr}) = \frac{E(Y_{Lr})}{1 - F_x(\frac{30}{1+r})} = \frac{0.3417053156}{e^{-\frac{1}{25} \cdot \frac{30}{1.06}}} = \frac{0.6834106312}{0.6776365}$$

$$= 1,0085209861.$$