

ΘΕΜΑΤΑ ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

1) Ένα τυχαίο δείγμα από 100 παρατηρήσεις ομαδοποιείται σε 5 ομάδες (διαστήματα) ως ακολούθως

Διάστημα	Αριθ. Παρατηρήσεων
(0-100]	25
(100-200]	20
(200-500]	20
(500-1000]	20
(1000- ∞]	15

α) Με βάση τα παραπάνω δεδομένα να βρείτε τις εξισώσεις (χωρίς να τις λύσετε) που μας οδηγούν στις εκτιμήσεις των παραμέτρους, αφού πρώτα βρείτε την τιμή του 60^{ου} ποσοστημορίου χρησιμοποιώντας την κατανομή Pareto και δοθέντος ότι η τιμή του 40^{ου} ποσοστημορίου ισούται με εκατόν εβδομήντα πέντε.

β) Να βρείτε την τιμή του στατιστικού ελέγχου καλής προσαρμογής για να ελέγξετε αν τα δεδομένα για $\alpha=0.05$ (δες βοήθημα) ακολουθούν την κατανομή Pareto των οποίων οι παράμετροι έχουν εκτιμηθεί και είναι $\hat{\theta}=800$ και $\hat{\alpha}=2$. Δίνονται $E_3=26.13$, $E_1=20.29$ και $E_4=18.12$.

γ) Με βάση τα παραπάνω δεδομένα και δοθέντος ότι το όριο του τελευταίου διαστήματος αντί για ∞ είναι 2000, δηλαδή (1000-2000] να δείξετε την μαθηματική σχέση (χωρίς να κάνετε τις τελικές πράξεις) που μας οδηγούν στην περιορισμένη μέση τιμή για όριο ιδίας κράτησης $m=1200$.

2) Έστω η ζημιά X ακολουθεί την εκθετική κατανομή, $f(x)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, και έχουμε αφαιρετέο ποσό (deductible, $d=5$), δηλαδή, ο ασφαλισμένος αποζημιώνεται με το ποσό $X-d$, αν η ζημιά υπερβαίνει το αφαιρετέο ποσό ($X>d$). Έστω 7, 9, 12, 12, 14, 16, είναι τα πραγματικά ποσά ζημιών συμπεριλαμβανομένου του αφαιρετέου ποσού $d=5$. Να υπολογιστούν: α) η συνάρτηση κατανομής β) η συνάρτηση πιθανότητας και γ) ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ .

3) Ο αριθμός ζημιών X_i , $i=1,2,\dots,m$ κατά τη διάρκεια του έτους i ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο θ . Έστω επίσης ότι η θ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους $\alpha=0$ και $\beta=1$ (ορίζεται στο διάστημα $(0,1)$). Η εμπειρία ζημιών παρατηρείται για m έτη. Να βρεθούν α) η περιθώρια κατανομή των $X_1, X_2, \dots, X_m$ και β) η εκ των υστέρων μέση τιμή της θ δοθέντων των $X_1, X_2, \dots, X_m$.

4) Ένας ασφαλιστής λαμβάνει μέρισμα (Bonus) με βάση τις ζημιές X . Οι ζημιές X ακολουθούν την κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha=3$ και $\theta=600000$. Το μέρισμα του υπολογίζεται ως $(650000-X)/3$ αν η ποσότητα αυτή είναι θετική, διαφορετικά είναι 0 αν η ποσότητα αυτή είναι αρνητική. Να υπολογιστεί το αναμενόμενο του μερίσματος του.

5) Δίνεται το τυχαίο δείγμα 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 1.3. Αφού βρείτε την $F(x)$, να υπολογίσετε το στατιστικό έλεγχο του Kolmogorov-Smirnov και να ελέγξετε την υπόθεση ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.01$ (δες βοήθημα) προέρχεται από την $f(x)=4(1+x)^{-5}$, $x > 0$. Δίνονται $F(0.5)=0.80$, $F(0.2)=0.52$, $F(1.3)=0.96$.

6) Σε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών γνωρίζουμε, ότι το εξήντα τις εκατό των ζημιών είναι μικρότερες του αφαιρετέου ποσού $d=1000$. Οι ζημιές (πριν την καταβολή του αφαιρετέου ποσού $d=1000$) ακολουθούν μία κατανομή με μέση τιμή 2000. Με αφαιρετέο ποσό $d=1000$, ο όρος απαλοιφής ζημιάς είναι 0.3 Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του μεγέθους των ζημιών που είναι μικρότερες του αφαιρετέου ποσού.

7) Να συγκρίνετε τις ουρές των κατανομών $f_1(x)=4e^{-4x}$, $x > 0$ και

$$f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2}}{2(4^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8) Έστω η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $f(x)=3x^2$, $0 < x < 1$. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^3$.