

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΕΚΘΕΤΙΚΑ- ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Γ. ΤΖΑΒΕΛΑΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Αν $a \neq 0$ και n ένας φυσικός αριθμός ($n = 1, 2, \dots$) τότε

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

και διαβάζουμε άλφα εις την n ή ο άλφα είναι υψωμένος εις την n δύναμη.

Π.χ.

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000.$$

Για $n = 2$ το a^2 διαβάζεται σαν άλφα στο τετράγωνο

Για $n = 3$ το a^3 διαβάζεται σαν άλφα στον κύβο.

Για την ειδική περίπτωση $n = 0$ ορίζουμε

$$a^0 = 1.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Αν ν ένας φυσικός αριθμός ($\nu = 1, 2, \dots$) ορίζουμε

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}} \quad (A.1)$$

Π.χ

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πολλαπλασιασμός δυνάμεων με την ίδια βάση

$$\alpha^{\nu} \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu} \quad (A.2)$$

Γιατί

$$\alpha^{\nu} \alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ φορές}} \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\mu \text{ φορές}} = \alpha^{\nu+\mu}$$

Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu-\nu}} \quad (A.3)$$

Γιατί

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\nu \text{ φορές}}}{\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\mu \text{ φορές}}} = \alpha^{\nu-\mu}$$

Γινόμενο στη ν-στη δύναμη

$$(a\beta)^\nu = a^\nu \beta^\nu \quad (A.4)$$

Γιατί

$$\begin{aligned} (a\beta)^\nu &= \underbrace{a\beta \cdot a\beta \cdot \dots \cdot a\beta}_{\nu \text{ φορές}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\nu \text{ φορές}} \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_{\nu \text{ φορές}} \\ &= a^\nu \beta^\nu \end{aligned}$$

Αν για β θέσουμε $\frac{1}{\beta}$ έχουμε το

Πηλίκο στη ν-στη δύναμη

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu = \frac{a^\nu}{\beta^\nu} \quad (A.5)$$

Προφανώς ο τύπος του γινομένου (A.4) μπορεί να γενικευθεί

$$(a_1 a_2 \cdots a_\kappa)^\nu = a_1^\nu a_2^\nu \cdots a_\kappa^\nu \quad (A.6)$$

Σημαντικός συμβολισμός

$$\prod_{i=1}^k a_i = a_1 a_2 \cdots a_k$$

Έτσι η (Α.6) γράφεται

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^v = \prod_{i=1}^k a_i^v$$

Δύναμη υψωμένη σε δύναμη

$$(\alpha^k)^v = \alpha^{k \cdot v}$$

Προκύπτει από την (Α.6) για

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = \alpha$$

$$\left(\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{k \text{ φορές}} \right)^v = (\alpha^k)^v$$

και

$$\underbrace{\alpha^\nu \cdot \alpha^\nu \cdot \dots \cdot \alpha^\nu}_{\kappa \text{ φορές}} = \alpha^{\nu+\nu+\nu+\dots+\nu} = \alpha^{\kappa \cdot \nu}$$

Η ρίζα σαν δύναμη: Γράφουμε

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha} \quad (A.7)$$

Από εδώ έχουμε

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa \quad (A.8)$$

Παραδείγματα

$$\begin{aligned}\frac{2^3 8^{\frac{2}{3}}}{16} &= \frac{2^3 (\sqrt[3]{8})^2}{2^4} \\ &= \frac{2^3 2^2}{2^4} \\ &= \frac{2^5}{2^4} \\ &= 2^{5-4} \\ &= 2^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(x^2 y^{-\frac{1}{2}} z^{-2}\right)^{-2} &= \frac{1}{\left(x^2 y^{-\frac{1}{2}} z^{-2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{x^4 y^{-1} z^{-4}} \\
 &= \frac{yz^4}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{4^3} \sqrt[3]{8} &= \sqrt{(2^2)^3} \sqrt[3]{2^3} \\
 &= \sqrt{2^6} \sqrt[3]{2^3} \\
 &= 2^{\frac{6}{2}} 2^{\frac{3}{3}} \\
 &= 2^3 2^1 \\
 &= 2^4 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

ΣΥΝΗΘΗΣΜΕΝΑ ΛΑΘΗ

$$\cancel{(x+3)^n = x^n + 3^n}$$

$$\cancel{(x+3)^2 = x^2 + 3^2}$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x$$

$$\cancel{(3x+1)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}x^{\frac{2}{5}} + 3^{\frac{2}{5}}}$$

Δυνάμεις με βάση τον Νεπέριο αριθμό $e = 2.71828$ (Napier)

Ο αριθμός αυτός ορίζεται σαν το όριο

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Είναι γνωστός από τον 18^ο αιώνα και δίνει το κεφάλαιο μετά από ένα χρόνο όταν ένα ευρώ ανατοκίζεται μέσα στον χρόνο πολλές φορές.

n	$(1+1/n)^n$
1(annually)	2
2(biannually)	2.25
4(quarterly)	2.4414
12(monthly)	2.6130
52(weekly)	2.6925
365(daily)	2.7145
8760(hourly)	2.7181
525600(minutely)	2.7182
31,536,000(every second)	2.7182

Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και υπερβατικός, δηλαδή δεν είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές.

Ο $\sqrt{2}$ υπερβατικός αριθμός . Δεν είναι υπερβατικός αριθμός γιατί είναι ρίζα του

$$x^2 - 2$$

Θα γράφουμε

$$e^a \equiv \text{Exp}(a)$$

Και προφανώς όλες οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν .

Ερώτημα

Αν b είναι ένας αριθμός και $a \neq 1$, υπάρχει αριθμός c τέτοιος ώστε

$$b = a^c;$$

Π.χ.

$$b=100, a=10, c=2.$$

Αν ναι τότε ο αριθμός αυτός λέγεται λογάριθμος του b με βάση το a και θα γράφουμε

$$c = \log_a b$$

Δηλαδή

$$b = a^{\log_a b}$$

Εμάς θα μας απασχολήσουν τα εκθετικά e^x

καθώς και οι λογάριθμοι με βάση το e .

$$\log_e(x) \equiv \log(x)$$

Ή αλλιώς

$$\ln(x)$$

Ιδιότητες λογαρίθμων

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \quad (\text{B.1})$$

Και γενικότερα

$$\log(a_1 \cdot a_2 \cdots a_v) = \log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_v) \quad (\text{B.2})$$

$$\log\left(\prod_{i=1}^v \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^v \log(\alpha_i)$$

Για $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_v = \alpha$ έχουμε

$$\log(a^v) = v \log(a) \quad (\text{B. 3})$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad (\text{B. 4})$$

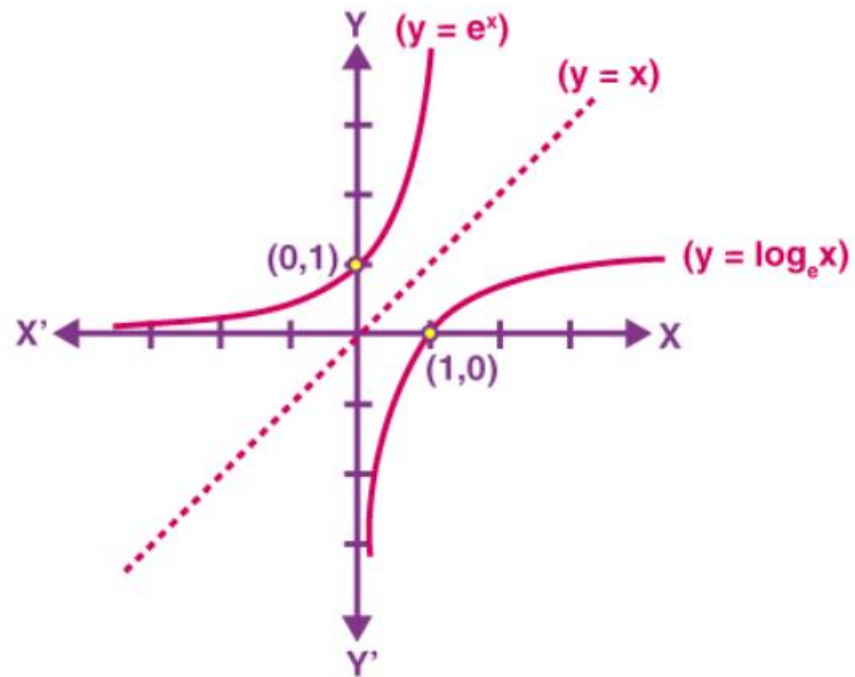
$$\log(1) = 0 \quad (\text{B. 5})$$

$$(e^0 = 1)$$

$$\log(0) = -\infty \quad (\text{B. 6})$$

$$\log(a) \begin{cases} < 0 & \alpha < 1 \\ = 0 & \alpha = 1 \\ > 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Πως θα τα θυμάμαι;



Παραδείγματα

$$\log(e) = 1$$

$$\log\left(\frac{1}{e}\right) = \log(1) - \log(e) = 0 - 1 = -1$$

Σημαντικό

$$\alpha = e^{\log(a)}$$

(B.7)

Παραδείγματα από τη Στατιστική

Παράδειγμα 1

Δίδονται τρεις συναρτήσεις

$$f(x_1; \theta) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta}$$

$$f(x_2; \theta) = \frac{(3\theta)^{x_2}}{x_2!} e^{-3\theta}$$

$$f(x_3; \theta) = \frac{(4\theta)^{x_3}}{x_3!} e^{-4\theta}$$

1. Να γραφεί ο λογάριθμος του γινομένου

$$f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta)$$

2. Να γραφεί το παραπάνω γινόμενο στη μορφή

$$f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta) = \exp(A)$$

$$5! = 1.2.3.4.5$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$$

Έχουμε

1.

$$\begin{aligned}
 f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta) &= \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta} \frac{(3\theta)^{x_2}}{x_2!} e^{-3\theta} \frac{(4\theta)^{x_3}}{x_3!} e^{-4\theta} \\
 &= \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta} \frac{3^{x_2} \theta^{x_2}}{x_2!} e^{-3\theta} \frac{4^{x_3} \theta^{x_3}}{x_3!} e^{-4\theta} \\
 &= 3^{x_2} 4^{x_3} \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} e^{-\theta} \frac{\theta^{x_2}}{x_2!} e^{-3\theta} \frac{\theta^{x_3}}{x_3!} e^{-4\theta} \\
 &= 3^{x_2} 4^{x_3} \frac{\theta^{x_1} \theta^{x_2} \theta^{x_3}}{x_1! x_2! x_3!} e^{-\theta} e^{-3\theta} e^{-4\theta} \\
 &= 3^{x_2} 4^{x_3} \frac{\theta^{x_1+x_2+x_3}}{x_1! x_2! x_3!} e^{-\theta-3\theta-4\theta} \\
 &= 3^{x_2} 4^{x_3} \frac{\theta^{x_1+x_2+x_3}}{x_1! x_2! x_3!} e^{-8\theta}.
 \end{aligned}$$

Ετσι

$$\begin{aligned} \text{Log}(f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta)) &= \text{Log}\left(3^{x_2}4^{x_3}\frac{\theta^{x_1+x_2+x_3}}{x_1!x_2!x_3!}e^{-8\theta}\right) \\ &= \text{Log}(3^{x_2}4^{x_3}) + \text{Log}(\theta^{x_1+x_2+x_3}) - \text{Log}(x_1!x_2!x_3!) + \text{Log}(e^{-8\theta}) \\ &= \text{Log}(3^{x_2}) + \text{Log}(4^{x_3}) + \text{Log}(\theta^{x_1+x_2+x_3}) - \text{Log}(x_1!x_2!x_3!) + \text{Log}(e^{-8\theta}) \\ &= x_2\text{Log}(3) + x_3\text{Log}(4) + (x_1 + x_2 + x_3)\text{Log}(\theta) - \text{Log}(x_1!x_2!x_3!) - 8\theta. \end{aligned}$$

$$2. f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta) = \text{Exp}\left(\text{Log}(f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta))\right)$$

$$f(x_1; \theta)f(x_2; \theta)f(x_3; \theta) = \text{Exp}(x_2\text{Log}(3) + x_3\text{Log}(4) + (x_1 + x_2 + x_3)\text{Log}(\theta) - \text{Log}(x_1!x_2!x_3!) - 8\theta)$$

Η μορφή του εκθέτη έχει πολύ μεγάλη σημασία στη Στατιστική.

Παράδειγμα 2

Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^x$$

Να βρεθεί ο λογάριθμος της παρακάτω ποσότητας στην απλούστερή του μορφή

$$\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$$

Λύση

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) &= f_1(x_1; \theta) f_2(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= \theta(1 - \theta)^{x_1} \theta(1 - \theta)^{x_2} \dots \theta(1 - \theta)^{x_n} \\ &= \theta^n (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log} \left(\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \right) &= \text{Log}(\theta^n (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}) \\ &= \text{Log}(\theta^n) + \text{Log}((1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}) \\ &= n \text{Log}(\theta) + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \text{Log}(1 - \theta). \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \exp \left\{ n \log \theta + \log(1 - \theta) \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

$$A = \text{Exp} (\text{Log}(A))$$

Παράδειγμα 3

Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x) = C x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \text{ όπου } C, \alpha, \beta \text{ σταθερές}$$

Να βρεθεί ο λογάριθμος του γινομένου των τιμών $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$

Εχουμε

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f(x_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{C x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1}} \cdot \underbrace{C x_2^{\alpha-1} (1-x_2)^{\beta-1}} \cdots \underbrace{C x_n^{\alpha-1} (1-x_n)^{\beta-1}} \\
&= C^n \underbrace{x_1^{\alpha-1} x_2^{\alpha-1} \cdots x_n^{\alpha-1}} \underbrace{(1-x_1)^{\beta-1} (1-x_2)^{\beta-1} \cdots (1-x_n)^{\beta-1}} \\
&= C^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{a-1} ((1-x_1)(1-x_2) \cdots (1-x_n))^{\beta-1} \\
&= C^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{a-1} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{\beta-1}
\end{aligned}$$

Για τον λογάριθμο

$$\begin{aligned}
\text{Log} \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right) &= \text{Log} \left(C^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{a-1} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{\beta-1} \right) \\
&= \text{Log}(C^n) + \text{Log} \left(\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{a-1} \right) + \text{Log} \left(\left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{\beta-1} \right) \\
&= n \text{Log } C + (a-1) \text{Log} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) + (\beta-1) \text{Log} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)
\end{aligned}$$

$$= n \log C + (a - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 - x_i)$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = \text{Exp}(\text{Log} \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right))$$

$$= \text{Exp} \left(n \log C + (a - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 - x_i) \right)$$