

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα - Η έννοια του διακριτού και του συνεχούς

Προπαρασκευαστικά μαθήματα

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Κ. Πολίτης
Αναπλ. Καθηγητής

Περιγραφή της παρουσίασης

- ▶ 1. Η έννοια του συνόλου
- ▶ 2. Το πλήθος στοιχείων ενός συνόλου - Πληθικός αριθμός
- ▶ 3. 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων δύο συνόλων
- ▶ 4. Πληθικός αριθμός για σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων – έχουν όλα αυτά τα σύνολα «το ίδιο πλήθος στοιχείων»;
- ▶ 5. Εφαρμογές στις πιθανότητες και τη στατιστική

Η έννοια του συνόλου

- Μία πολύ βασική έννοια στα μαθηματικά είναι η έννοια του συνόλου

(τη χρησιμοποιούμε π.χ. για το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης)

Κάποια πολύ γνωστά σύνολα είναι

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Επίσης, τα διαστήματα, π.χ.

$(0, 1), [0, 1], [2, 5], (3, 10], (2, \infty),$

αλλά και τα σύνολα

$A=\{1, 2\}, B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \Gamma=\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

Η έννοια του συνόλου

Ένα σύνολο δεν αποτελείται απαραίτητα από αριθμούς. Έτσι, έχουμε π.χ.,

- ▶ το σύνολο των **γραμμάτων του αλφαβήτου**,
- ▶ το σύνολο των **μαθητών μιας τάξης**,
- ▶ το σύνολο {**άσπρο, κόκκινο, μαύρο**}, κοκ.

Δύο βασικά χαρακτηριστικά ενός συνόλου είναι:

- ❑ Ένα σύνολο δεν μπορεί να περιέχει το ίδιο στοιχείο περισσότερες από μία φορές
- ❑ Δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα στοιχεία σε ένα σύνολο. Συνεπώς, για παράδειγμα τα σύνολα

$$A = \{1,2,3,4\} \text{ και } B = \{2,3,4,1\}$$

ταυτίζονται, δηλαδή $A = B$.

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου

- ❑ Υπάρχει ακόμη το **κενό σύνολο**, αλλά και οι **ενώσεις** ή οι **τομές** των συνόλων που είδαμε νωρίτερα, κοκ.
- ❑ Κάποια από αυτά τα σύνολα έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, κάποια όχι.
- ❑ Για ένα σύνολο A με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, το **πλήθος** αυτό συμβολίζεται με **$|A|$** και ονομάζεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου A .

Ένα απλό παράδειγμα

- ▶ Έστω τα σύνολα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{4,6,8,10,12\}$
- ▶ Έχουμε $|A| = 3$, $|B| = 5$ και επομένως
 $|A| < |B|$

Το A έχει μικρότερο πλήθος στοιχείων από το B.

Δύο σύνολα που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων ονομάζονται **ισοπληθή** ή **ισοδύναμα**.

Π.χ. τα σύνολα

$$A=\{1,2,3\} \text{ και } B=\{4,8,12\}$$

είναι ισοπληθή.

Ισοπληθή σύνολα

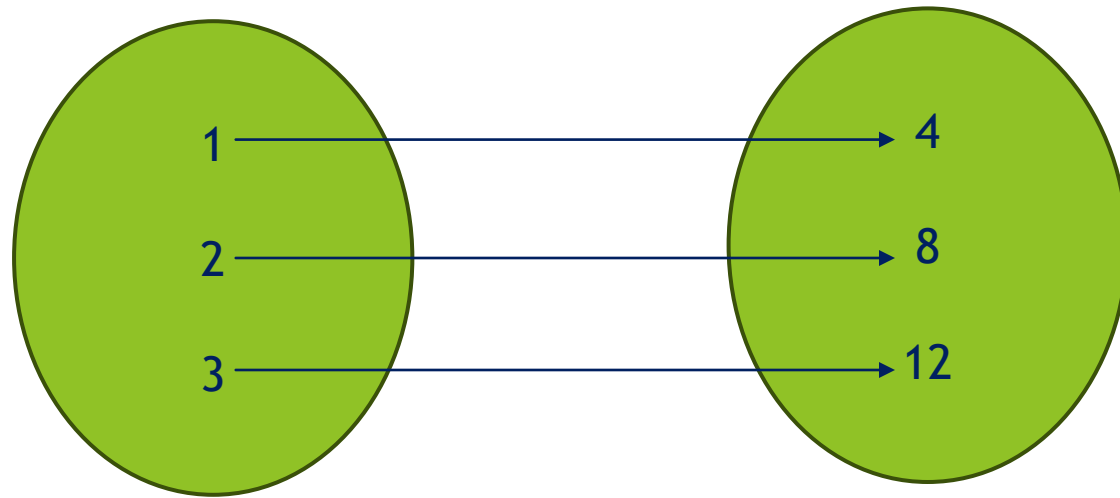
- Μία απλή αλλά πολύ σημαντική παρατήρηση:

Αν δύο σύνολα A και B είναι ισοπληθή, τότε υπάρχει μία συνάρτηση

$$f: A \rightarrow B$$

η οποία είναι **1-1 και επί** (αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση).

Ισοπληθή σύνολα



- ▶ Σε κάποιες περιπτώσεις είναι εύκολο να βρούμε και την αλγεβρική μορφή αυτής της συνάρτησης. Π.χ. στο παράδειγμα έχουμε $f(x) = 4x$, $x \in \{1,2,3\}$
- ▶ Γενικά όμως αυτό δεν μας χρειάζεται

Τι γίνεται με το άπειρο;



- Αν τώρα έχουμε ένα σύνολο A με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, έστω m ,
- και ένα σύνολο B με άπειρο πλήθος στοιχείων, είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι

$$|A| < |B|$$

εφόσον $m < \infty$.

(Αν και **δεν έχουμε ορίσει** τον πληθικό αριθμό για σύνολα, όπως το B , με άπειρο πλήθος στοιχείων).

Τι γίνεται με το άπειρο;



□ Αν τώρα έχουμε ένα σύνολο A με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, έστω m ,

και ένα σύνολο B με άπειρο πλήθος στοιχείων, είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι

$$|A| < |B|$$

εφόσον $m < \infty$

(Αν και **δεν έχουμε ορίσει** τον πληθικό αριθμό για σύνολα, όπως το B , με άπειρο πλήθος στοιχείων).

Γιατί δεν ορίζουμε απλώς
 $|B| = \infty$
να τελειώνουμε;

Είναι όλα τα απειροσύνολα ισοπληθή;

- Για πεπερασμένα σύνολα, είδαμε ότι

Αν δύο σύνολα A και B είναι ισοπληθή, τότε υπάρχει μία συνάρτηση

$$f: A \rightarrow B$$

η οποία είναι **1-1 και επί** (αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση).

- Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό για σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων;

Είναι όλα τα απειροσύνολα ισοπληθή;

Ας θεωρήσουμε δύο πολύ γνωστά σύνολα, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών (χωρίς το μηδέν) και το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών.

Διαισθητικά, το $\mathbb{Z}$ έχει πολύ περισσότερα στοιχεία (αφού περιέχει και τους αρνητικούς αριθμούς).

Και όμως, υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επί από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$ (ή αντίστροφα).



$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbb{Z}$	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	...

Είναι όλα τα απειροσύνολα ισοπληθή;

- ▶ Ένα πρόβλημα που απασχόλησε τους μαθηματικούς για πολλά χρόνια είναι το εξής:

Υπάρχει κάποια αντιστοιχία 1-1 και επί ανάμεσα στο $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{Z}$) και κάποιο **διάστημα** της πραγματικής ευθείας, π.χ. το $[0,1]$;

- ▶ Η απάντηση δόθηκε το 1874 από τον Georg Cantor



Είναι όλα τα απειροσύνολα ισοπληθή;

- ▶ Ο Cantor απέδειξε ότι **δεν υπάρχει τέτοια αντιστοιχία**
- ▶ Υπάρχουν πολλές συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά όχι **επί**
- ▶ **Οποιοδήποτε διάστημα** περιέχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο των φυσικών (ή ακεραίων) αριθμών

Επομένως, ο Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν «δύο είδη απείρου»!!

Υπάρχει κάποια αντιστοιχία 1-1 και επί ανάμεσα στο $\mathbb{N}$ (ή το $\mathbb{Z}$) και κάποιο **διάστημα** της πραγματικής ευθείας, π.χ. το $[0,1]$;

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

- ▶ Με βάση τα παραπάνω, δίνουμε τον εξής ορισμό:
- ▶ Ένα σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο** (countable set) όταν υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί ανάμεσα σε αυτό το σύνολο και **το σύνολο των ακεραίων αριθμών ή κάποιο υποσύνολό του**.
- ▶ Όταν **δεν υπάρχει τέτοια αντιστοιχία**, το σύνολο λέγεται **μη αριθμήσιμο** (uncountable set)

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα: κάποιες απλές ιδιότητες

- ▶ Αν $A \subseteq B$ και το A είναι μη αριθμήσιμο, τότε και το B είναι μη αριθμήσιμο
- ▶ Η ένωση και η τομή δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο
- ▶ Η ένωση δύο μη αριθμήσιμων συνόλων είναι μη αριθμήσιμο σύνολο
- ▶ Για την τομή προφανώς δεν ισχύει το ίδιο.

Π.χ.

- τα σύνολα $(1,2)$ και $(4,5)$ είναι μη αριθμήσιμα, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο
- τα σύνολα $(-\infty, 0]$ και $[0, \infty)$ είναι μη αριθμήσιμα, και η τομή τους είναι το (αριθμήσιμο) σύνολο $\{0\}$.
- ▶ Η ένωση ενός αριθμήσιμου και ενός μη αριθμήσιμου συνόλου είναι πάντα μη αριθμήσιμο σύνολο. Π.χ. το σύνολο $(0,1) \cup \{3\}$ είναι μη αριθμήσιμο.

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Αριθμήσιμα σύνολα

- ▶ Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών
- ▶ Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων
- ▶ Το σύνολο των άρτιων φυσικών $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- ▶ Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Το κενό σύνολο
- ▶ Το σύνολο όλων των φυσικών που είναι πολλαπλάσια του 5, δηλαδή το σύνολο $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$

Μη Αριθμήσιμα σύνολα

- ▶ Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- ▶ Οποιοδήποτε διάστημα, π.χ. $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$

κ.ο.κ.

- ▶ Ένωση δύο ή περισσότερων διαστημάτων, π.χ.
- ▶ $(1,2) \cup (3,4) \cup (3,4)$
- ▶ $(-1,0) \cup (0, \infty)$

κλπ

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του μπορούν να **παρασταθούν από μία ακολουθία, μπορούν να απαριθμηθούν**

Επίσης, τα στοιχεία του μπορούν να μπουν σε μία διάταξη (πχ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο), έτσι ώστε όταν **μας δίνεται ένα στοιχείο αυτού του συνόλου, να γνωρίζουμε αμέσως ποιο είναι το επόμενο.**

Πχ στο σύνολο των ακεραίων

$$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

γνωρίζουμε ότι μετά τον αριθμό 3 υπάρχει το 4, μετά τον αριθμό 157 υπάρχει το 158, κοκ.

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Διασθητικά μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του **μπορούν να παρασταθούν από μία ακολουθία, μπορούν να απαριθμηθούν.**

Επίσης, τα στοιχεία του μπορούν να μπουν σε μία διάταξη (πχ από το μικρότερο στο μεγαλύτερο), έτσι ώστε **όταν μας δίνεται ένα στοιχείο αυτού του συνόλου, να γνωρίζουμε αμέσως ποιο είναι το επόμενο.**

Πχ στο σύνολο των ακεραίων

$$\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

γνωρίζουμε ότι μετά τον αριθμό 3 υπάρχει το 4, μετά τον αριθμό 157 υπάρχει το 158, κοκ.

Αν μας δοθεί πχ το διάστημα $[0,1]$, γνωρίζουμε ποιος αριθμός σε αυτό το διάστημα βρίσκεται αμέσως μετά το $1/3$;

Τι γίνεται με το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών;

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του μπορούν να παρασταθούν από μία ακολουθία, μπορούν να απαριθμηθούν

► Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

και είδαμε ότι το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, ενώ το $\mathbb{R}$ είναι μη αριθμήσιμο.

Το να εξετάσουμε αν το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο ή όχι είναι αρκετά δύσκολο.

Είναι πιο εύκολο να δούμε τι γίνεται με το σύνολο των **ρητών που βρίσκονται στο διάστημα $(0,1)$** .

Τι γίνεται με το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών;

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του μπορούν να παρασταθούν από μία ακολουθία, μπορούν να απαριθμηθούν

Είναι πιο εύκολο να δούμε τι γίνεται με το σύνολο των ρητών που βρίσκονται στο διάστημα $(0,1)$

- ▶ Ας ονομάσουμε A το σύνολο όλων των ρητών στο διάστημα $(0, 1)$
- ▶ Κάθε ρητός αριθμός γράφεται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.
- ▶ Εφόσον μιλάμε για ρητούς στο διάστημα $(0,1)$, θα έχουμε $\alpha < \beta$.
- ▶ Για κάθε παρονομαστή (ξεκινώντας από το 2) γράφουμε διαδοχικά όλους τους ρητούς με μικρότερο αριθμητή κατ' αύξουσα σειρά.
- ▶ Μετά συνεχίζουμε με τον επόμενο παρονομαστή, κοκ.
- ▶ Παραλείπουμε τα στοιχεία (κλάσματα) τα οποία έχουν συμπεριληφθεί ήδη.

Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμήσιμο;

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας.

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του μπορούν να παρασταθούν από μία ακολουθία, μπορούν να απαριθμηθούν

Παραλείπουμε τα στοιχεία (κλάσματα) τα οποία έχουν συμπεριληφθεί ήδη.

Π.χ. δεν βάζουμε στην αντιστοιχία το $\frac{2}{4}$ ή το $\frac{3}{6}$, γιατί έχουμε συμπεριλάβει το $\frac{1}{2}$

Βλέπουμε ότι υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επί από το $\mathbb{N}$ στο A - τα στοιχεία του A μπορούν να απαριθμηθούν

□ Άρα το σύνολο A είναι αριθμήσιμο

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	...

Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμήσιμο;

- Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Είναι όλα τα διαστήματα μη αριθμήσιμα; Έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό;

Είδαμε ότι ένα σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο** (countable set) όταν υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί ανάμεσα σε αυτό το σύνολο και το σύνολο των ακεραίων αριθμών ή κάποιο υποσύνολό του.

Επεκτείνουμε αυτό τον ορισμό και λέμε ότι δύο σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων έχουν τον ίδιο **πληθικό αριθμό** (ή ότι είναι **ισοπληθή**) όταν υπάρχει μία αντιστοίχιση που είναι 1-1 και επί μεταξύ των δύο συνόλων.

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής:

► **Είναι όλα τα διαστήματα ισοπληθή;**

Ας θεωρήσουμε π.χ. τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(0, 1000)$

Είναι όλα τα διαστήματα μη αριθμήσιμα; Έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό;

► Είναι όλα τα διαστήματα ισοπληθή;

Ας θεωρήσουμε π.χ. τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(0, 1000)$

Η συνάρτηση

$$f: (0,1) \rightarrow (0,1000)$$

με

$$f(x) = 1000x$$

είναι 1-1 και επί, επομένως τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

Τι γίνεται με τα διαστήματα $(0,1)$ και $(0, \infty)$;

Είναι όλα τα διαστήματα ισοπληθή;

Τι γίνεται με τα διαστήματα $(0,1)$ και $(0, \infty)$;

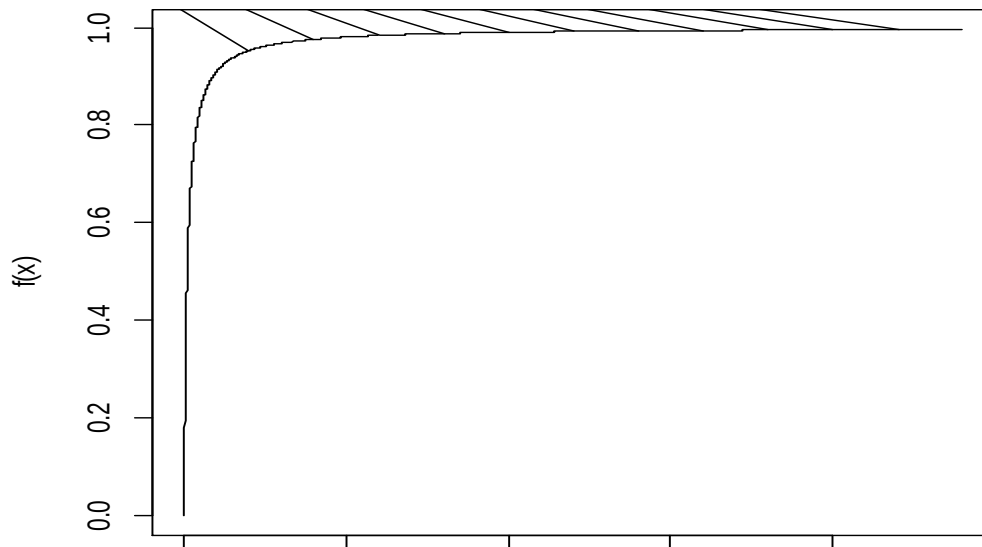
Η συνάρτηση

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0,1)$$

με

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

είναι 1-1 και επί, επομένως και πάλι τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.



Είναι όλα τα διαστήματα μη αριθμήσιμα; Έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό;

- Γενικότερα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

Όλα τα διαστήματα είναι μη αριθμήσιμα και όλα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό

- Επομένως, αν μας δοθούν δύο διαστήματα, μπορούμε να βρούμε μία αντιστοιχία μεταξύ τους που να είναι 1-1 και επί.

Είδη συνόλων με βάση τον πληθικό τους αριθμό

- Με βάση όλα τα παραπάνω, υπάρχουν τρία είδη συνόλων για τους πραγματικούς αριθμούς:

- Σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, πχ $\{1, 2, 3, 4\}$
- Σύνολα με **άπειρο πλήθος** στοιχείων τα οποία είναι **αριθμήσιμα**, πχ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$
- Σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων τα οποία είναι **μη αριθμήσιμα** (όλα τα διαστήματα και οι ενώσεις τους)

Πού μας χρειάζονται τα παραπάνω στις πιθανότητες και τη στατιστική;

Ένα σύνολο ονομάζεται **αριθμήσιμο** (countable set) όταν υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί ανάμεσα σε αυτό το σύνολο το σύνολο των ακεραίων αριθμών ή κάποιο υποσύνολό του.

- ❑ Στις πιθανότητες και τη στατιστική χρησιμοποιούμε **τυχαίες μεταβλητές** - αριθμητικές ποσότητες που συνδέονται με το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος.
- ❑ Ονομάζεται **τυχαία** γιατί η τιμή που παίρνει κάθε φορά εξαρτάται από το αποτέλεσμα που πήραμε στο **πείραμα τύχης**.

Παραδείγματα

- ▶ Ο αριθμός φορών που θα φέρουμε «Γράμματα» σε 5 ρίψεις ενός νομίσματος.
- ▶ Ο αριθμός ρίψεων ενός ζαριού έως ότου φέρουμε για πρώτη φορά 6
- ▶ Το μέσο ύψος 25 φοιτητών του Πα. Πει.
- ▶ Το συνολικό βάρος 10 ατόμων που έχουν επιλεγεί τυχαία από έναν πληθυσμό

Είδη τυχαίων μεταβλητών

Μία τ.μ. X λέγεται

- ❑ **Διακριτή**, όταν το πλήθος των δυνατών τιμών της είναι **αριθμήσιμο** (π.χ. το σύνολο των ακεραίων ή των ρητών, ή κάποιο υποσύνολό τους)
- ❑ **Συνεχής**, όταν το πλήθος των δυνατών τιμών της είναι **μη αριθμήσιμο** (π.χ. ένα, πεπερασμένο ή μη, διάστημα της πραγματικής ευθείας, ή ένωση διαστημάτων)

Παραδείγματα διακριτών τ.μ.

- ✓ Ο αριθμός παιδιών μιας οικογένειας
- ✓ Το άθροισμα των ρίψεων δύο ζαριών
- ✓ Ο αριθμός ατόμων που επισκέπτονται ένα πολυκατάστημα (ή μια ιστοσελίδα) σε μία μέρα
- ✓ Βαθμολογία σε ένα μάθημα του πρώτου εξαμήνου

Είδη τυχαίων μεταβλητών

Παραδείγματα συνεχών τ.μ.

- ✓ Το **βάρος** ενός ατόμου (ή ο μέσος όρος του βάρους 10 ατόμων)
- ✓ Ο **χρόνος** που θα περιμένω στη στάση έως ότου έρθει το λεωφορείο
- ✓ Η **θερμοκρασία** ενός δωματίου
- ✓ Η **απόσταση** που διανύω σε μια μέρα

Είδη τυχαιών μεταβλητών

Παραδείγματα συνεχών τ.μ.

- ✓ Το **βάρος** ενός ατόμου (ή ο μέσος όρος του βάρους 10 ατόμων)
- ✓ Ο **χρόνος** που θα περιμένω στη στάση έως ότου έρθει το λεωφορείο
- ✓ Η **θερμοκρασία** ενός δωματίου
- ✓ Η **απόσταση** που διανύω σε μια μέρα

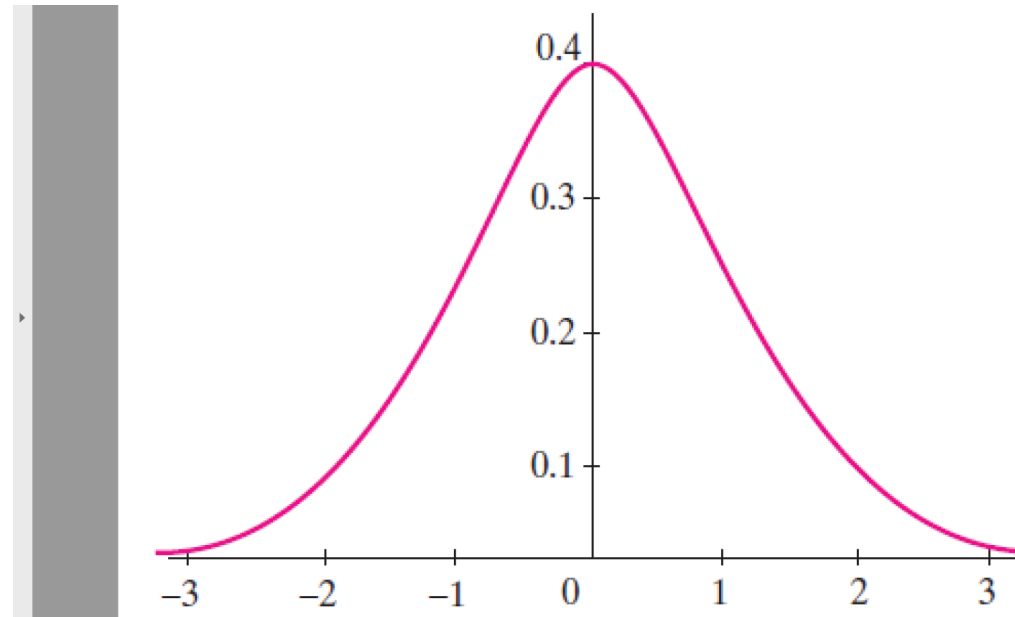
- Ωστόσο, αν και τα περισσότερα **φυσικά μεγέθη** είναι συνεχείς ποσότητες, πολλές φορές στην πράξη τα χρησιμοποιούμε σαν να είναι διακριτές τ.μ. (χρησιμοποιώντας μία μονάδα μέτρησης)

Έτσι, πχ

- Το βάρος ενός ατόμου σε κιλά
 - Ο χρόνος, σε λεπτά, έως ότου έρθει το λεωφορείο
 - Η θερμοκρασία ενός δωματίου σε βαθμούς Κελσίου
- είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Είδη τυχαίων μεταβλητών

- Αντίστροφα, σε κάποιες περιπτώσεις, όταν μία διακριτή μεταβλητή παίρνει πάρα πολλές τιμές, είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι (κατά προσέγγιση) ακολουθεί κάποια συνεχή κατανομή, π.χ. την κανονική κατανομή, γιατί έτσι μπορούμε να την μελετήσουμε πιο εύκολα



Ένα μικρό quiz

Ποιες από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι διακριτές και ποιες συνεχείς;

- ▶ Το βάρος ενός ατόμου
- ▶ Το άθροισμα των βαρών 30 ατόμων
- ▶ Ο αριθμός των ασφαλισμένων σε μια ασφαλιστική εταιρεία
- ▶ Το πλήθος των φοιτητών του Παπει που έρχονται στο Πανεπιστήμιο με το μετρό
- ▶ Η διάμετρος ενός σωλήνα που παράγεται σε ένα εργοστάσιο
- ▶ Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής κλήσης
- ▶ Το πλήθος των κλήσεων που δέχεται κάποιος στο κινητό του σε μια μέρα

Απάντηση στο quiz

Διακριτές μεταβλητές

- ▶ Ο αριθμός των ασφαλισμένων σε μια ασφαλιστική εταιρεία
- ▶ Το πλήθος των φοιτητών του Παπει που έρχονται στο Πανεπιστήμιο με το μετρό
- ▶ Το πλήθος των κλήσεων που δέχεται κάποιος στο κινητό του σε μια μέρα

Συνεχείς μεταβλητές

- ▶ Το βάρος ενός ατόμου
- ▶ Το άθροισμα των βαρών 30 ατόμων
- ▶ Η διάμετρος ενός σωλήνα που παράγεται σε ένα εργοστάσιο
- ▶ Η διάρκεια μιας τηλεφωνικής κλήσης

Πού μας χρειάζονται τα παραπάνω στις πιθανότητες και τη στατιστική; Αθροίσματα και ολοκληρώματα

Μία άλλη σημαντική διαφορά ανάμεσα σε διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι ότι, για να υπολογίσουμε **αθροιστικές πιθανότητες**,

- ▶ με τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιούμε **αθροίσματα**, ενώ
- ▶ με τις συνεχείς χρησιμοποιούμε **ολοκληρώματα**

Π.χ. έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού. Για να βρούμε την πιθανότητα $P(X \leq 3)$ γράφουμε

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

ή, για συντομία,

$$P(X \leq 3) = \sum_{i=1}^3 P(X = i) = \frac{3}{6}$$

Πού μας χρειάζονται τα παραπάνω στις πιθανότητες και τη στατιστική; Αθροίσματα και ολοκληρώματα

Γενικά, **το σύμβολο Σ** το οποίο δηλώνει άθροισμα πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους αριθμών, **μπορεί να χρησιμοποιηθεί** όταν το πλήθος αυτό είναι **αριθμήσιμο**.

Μπορούμε δηλαδή να γράφουμε

$$\sum_{k=1}^3 a_k, \quad \sum_{k=10}^{100} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

όταν (a_k) είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, **δεν μπορούμε** όμως να μιλάμε για αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k \in A} a_k$$

όταν το A είναι ένα διάστημα.

Πού μας χρειάζονται τα παραπάνω στις πιθανότητες
και τη στατιστική;
Αθροίσματα και ολοκληρώματα

Ως έναν γενικό κανόνα μπορούμε να πούμε το εξής:

Όπου χρησιμοποιούμε **αθροίσματα** για διακριτές
τυχαίες μεταβλητές, στην αντίστοιχη περίπτωση
χρησιμοποιούμε **ολοκληρώματα** για συνεχείς
τυχαίες μεταβλητές.

Καλή αρχή και καλή ακαδημαϊκή χρονιά!

