

Πολυώνυμα

ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Απόστολος Μποζίκας
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

Περιεχόμενα

- Βασικοί ορισμοί
- Ισότητα και πράξεις πολυωνύμων
- Αριθμητική τιμή πολυωνύμου
 - Ρίζες πολυωνύμου 1ου και 2ου βαθμού
 - Σχήμα Horner
- Διαίρεση πολυωνύμων
- Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις
- Βασικές ιδιότητες πολυωνυμικών ανισώσεων
- Μιγαδικοί αριθμοί και ρίζες πολυωνύμων



Στόχοι του μαθήματος

- Να κατανοήσουμε τι είναι τα πολυώνυμα.
- Να μάθουμε τους βασικούς ορισμούς και τους κανόνες των πράξεων στα πολυώνυμα.
- Να εφαρμόσουμε τις γνώσεις μας σε ασκήσεις και προβλήματα.

Βασικοί ορισμοί

Μονώνυμο

- **Μονώνυμο** του x ονομάζεται κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.
- Μονώνυμο του x καλείται επίσης και κάθε πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα

Οι παραστάσεις: $2x^3$, $-\frac{3}{5}x$, $19x$ και οι αριθμοί: 2 , -3 , 0 είναι μονώνυμα του x .

Βασικοί ορισμοί

Πολυώνυμο

- Πολυώνυμο ονομάζεται κάθε παράσταση της μορφής
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- **Πολυώνυμο:** Άθροισμα μονωνύμων με διάφορους βαθμούς.
- **Συντελεστές ενός πολυωνύμου:** Οι συντελεστές του κάθε μονωνύμου.
- **Βαθμός ενός πολυωνύμου:** Ο μεγαλύτερος εκθέτης στον οποίο υψώνεται η μεταβλητή x . Για το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με $a_n \neq 0$ ο βαθμός του είναι n .

Ένα πολυώνυμο βαθμού $n = 2$ καλείται τριώνυμο.

Βασικοί ορισμοί

Άσκηση

- Να βρεθεί ο βαθμός και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου των παρακάτω πολυωνύμων:
 - $3x^2 - 1$
 - $x^5 - 2x^3 + 1$
 - 4
 - $8x^3 - 2x^2 + x - 1$

Λύση

- Βαθμός πολυωνύμου: 2, συντελεστής μεγιστοβάθμιου: 3
- Βαθμός πολυωνύμου: 5, συντελεστής μεγιστοβάθμιου: 1
- Βαθμός πολυωνύμου: 0, συντελεστής μεγιστοβάθμιου: 4
- Βαθμός πολυωνύμου: 3, συντελεστής μεγιστοβάθμιου: 8

Ισότητα και πράξεις πολυωνύμων

Ισότητα μεταξύ δυο πολυωνύμων

- Έστω δύο πολυώνυμα $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$. Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα ανν
- $n = m$,
- $a_i = \beta_i$, με $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ισότητα και πράξεις πολυωνύμων

Άσκηση

- Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο
$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση: Πρέπει

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \end{array} \right\} \lambda = 1$$

Ισότητα και πράξεις πολυωνύμων

Άσκηση

- Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα

$$Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3 \quad \text{και} \quad P(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1$$

είναι ίσα.

Λύση: Πρέπει οι συντελεστές των αντίστοιχων όρων να είναι ίσοι

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 = 5\lambda - 6 \\ \lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \\ 3 = \lambda + 1 \end{array} \right\} \lambda = 2$$

Ισότητα και πράξεις πολυωνύμων

Πράξεις πολυωνύμων

- Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

- **Πρόσθεση/Αφαίρεση:** Πρόσθεση ή αφαίρεση των αντίστοιχων όρων των πολυωνύμων.
 - Παράδειγμα
$$(2x^3 + 4x - 1) + (2x^3 - 2x^2 + 5) = 4x^3 - 2x^2 + 4x + 4$$
- **Πολλαπλασιασμός:** Κάθε όρος του πρώτου πολυωνύμου πολλαπλασιάζεται με κάθε όρο του δεύτερου.
 - Παράδειγμα
$$(2x + 3)(x^2 - x + 4) = 2x^3 - 2x^2 + 8x + 3x^2 - 3x + 12 = 2x^3 + x^2 + 5x + 12$$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

- Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με ένα πραγματικό αριθμό $\rho \in \mathbb{R}$ τότε ο πραγματικός αριθμός

$$P(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0$$

που προκύπτει ονομάζεται **αριθμητική τιμή** ή **τιμή** του πολυωνύμου για $x = \rho$.

Σημείωση

- Αν είναι $P(\rho) = 0$, τότε το ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} βαθμού $P(x) = ax + \beta$, $x = -\frac{\beta}{a}$, $a \neq 0$

Ρίζες πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

○ 2 Ρίζες: $x_1 = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta})}{2a}$ και $x_2 = \frac{(-\beta - \sqrt{\Delta})}{2a}$ αν $\Delta > 0$

○ 1 Ρίζα (διπλή): $x = \frac{-\beta}{2a}$, αν $\Delta = 0$

○ Καμία (πραγματική) ρίζα αν $\Delta < 0$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} βαθμού $P(x) = ax + \beta$, $x = -\frac{\beta}{a}$, $a \neq 0$

Ρίζες πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

○ 2 Ρίζες: $x_1 = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta})}{2a}$ και $x_2 = \frac{(-\beta - \sqrt{\Delta})}{2a}$ αν $\Delta > 0$

○ 1 Ρίζα (διπλή): $x = \frac{-\beta}{2a}$, αν $\Delta = 0$

○ Καμία (πραγματική) ρίζα αν $\Delta < 0$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

Τύποι του Vieta

- $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Άσκηση

- Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Λύση

- Υπολογισμός διακρίνουσας: $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$.
- Εφόσον $\Delta > 0$, το πολυώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες:
 - $x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = 3$
 - $x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = 2$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Άσκηση

- Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 5x + 6$

Λύση

- Υπολογισμός διακρίνουσας: $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$.
- Εφόσον $\Delta > 0$, το πολυώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες:
 - $x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = 3$
 - $x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = 2$

Παρατήρηση

- $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

(τύποι του Vieta)



Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Άσκηση

- Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 3x + 4$.

Λύση

- Υπολογισμός διακρίνουσας: $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = -7$.
- Εφόσον $\Delta < 0$, το πολυώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Ρίζες πολυωνύμου 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

Άσκηση

- Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 2x + 1$.

Λύση

- Υπολογισμός διακρίνουσας: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$.
- Εφόσον $\Delta = 0$, το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα $x = -\frac{-2}{2(1)} = 1$.

2^{ος} τρόπος: $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, άρα η $x = 1$ αποτελεί διπλή ρίζα.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Σχήμα Horner

Το **σχήμα Horner** (ή μέθοδος Horner) είναι ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου σε μια δεδομένη τιμή της μεταβλητής.

Σχήμα Horner για τον Υπολογισμό Τιμής Πολυωνύμου

- Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

για να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου στο $x = r$, χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner, σύμφωνα με το οποίο το πολυώνυμο αναδιατάσσεται ως εξής:

$$P(x) = (\dots ((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \dots + a_1) x + a_0 .$$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Σχήμα Horner

Άσκηση

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1$.
Να υπολογίσετε την τιμή του $P(x)$ για $x = 3$.

Λύση

2	-6	2	-1	3
-				
2				

Βήματα:

1. Γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου: $[2, -6, 2, -1]$.
2. Ξεκινάμε με τον πρώτο συντελεστή: 2.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Σχήμα Horner

2	-6	2	-1	3
-	6	0	6	
2	0	2	5	

3. Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο συντελεστή με το $x = 3$ και προσθέτουμε τον επόμενο συντελεστή:

- $2 \cdot 3 = 6$
- $6 + (-6) = 0$

4. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το $x = 3$ και προσθέτουμε τον επόμενο συντελεστή:

- $0 \cdot 3 = 0$
- $0 + 2 = 2$

5. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το $x = 3$ και προσθέτουμε τον τελευταίο συντελεστή:

- $2 \cdot 3 = 6$
- $6 + (-1) = 5$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Σχήμα Horner

Άσκηση

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 1$.
Να υπολογίσετε την τιμή του $P(x)$ για $x = 2$.

Λύση

1	0	-1	1	2
-	2	4	6	
1	2	3	7	

1. Γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου: Το πολυώνυμο είναι $P(x) = x^3 - x + 1$, οπότε οι συντελεστές του είναι: $[1, 0, -1, 1]$
2. Ξεκινάμε με τον πρώτο συντελεστή: 1.
3. Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο συντελεστή με το $x = 2$ και προσθέτουμε τον επόμενο συντελεστή:
4. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το $x = 2$ και προσθέτουμε τον επόμενο συντελεστή:
5. Πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το $x = 2$ και προσθέτουμε τον τελευταίο συντελεστή:

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Σχήμα Horner

Άσκηση

- Να δείξετε ότι το 2 αποτελεί ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Λύση

1	-3	2	2
-	2	-2	
1	-1	0	

Συμπέρασμα: Εφόσον $P(2) = 0$,
το 2 αποτελεί ρίζα του πολυωνύμου.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Πλεονεκτήματα του Σχήματος Horner

- Απλοποιεί τους υπολογισμούς με πολυώνυμα.
- Αποφεύγει πολλούς περιττούς υπολογισμούς δυνάμεων του x .
- Είναι πιο αποδοτικός τρόπος για την υπολογιστική επεξεργασία πολυωνύμων.

Διαίρεση πολυωνύμων

Διαίρεση πολυωνύμων / Ταυτότητα της διαίρεσης

- Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια ώστε
$$\Delta(x) = \delta(x) \pi(x) + \nu(x)$$
όπου $\nu(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του $\delta(x)$ ή το μηδενικό πολυώνυμο.

Σημείωση

- Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών, το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\nu(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Αν $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\Delta(x)$, τότε $\Delta(x) = (x - \rho) \pi(x)$.
- Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x - \rho$ αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ (δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$).

Διαίρεση πολυωνύμων

Άσκηση

- Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ με το $x + \lambda$ είναι μηδέν;

Λύση

Επειδή $x + \lambda = x - (-\lambda)$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + \lambda$ είναι $v = P(-\lambda)$. Έχουμε

$$P(-\lambda) = (-\lambda)^3 - 3(-\lambda)^2 + 3(-\lambda) - 1 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3$$

Το υπόλοιπο είναι μηδέν αν και μόνο αν $P(-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

Διαίρεση πολυωνύμων

Άσκηση

- Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x) = \lambda^2 x^4 + 3\lambda x^2 - 3$ με το $x - 1$ είναι το 1;

Λύση

Ο διαιρέτης είναι το $x - 1$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x - 1$ είναι $v = Q(1)$.

Έχουμε

$$Q(1) = \lambda^2(1)^4 + 3\lambda(1)^2 - 3 = \lambda^2 + 3\lambda - 3$$

Το υπόλοιπο είναι 1 αν και μόνο αν $Q(1) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 3 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -4$.

Διαίρεση πολυωνύμων

Γενική Διατύπωση Σχήματος Horner

Η μέθοδος του Horner μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ με το $x-r$, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ο στόχος είναι να βρούμε το πηλίκο $π(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Για να διαιρέσουμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

με το $x-r$, χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner με τους ίδιους συντελεστές και r .

Διαίρεση πολυωνύμων

Γενική Διατύπωση Σχήματος Horner

Βήματα της διαίρεσης

1. **Έναρξη:** Ξεκινάμε με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, δηλαδή το a_n .
2. **Πολλαπλασιασμός και πρόσθεση:** Πολλαπλασιάζουμε κάθε αποτέλεσμα με το r και προσθέτουμε τον επόμενο συντελεστή, όπως ακριβώς στον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου.
3. **Αποτέλεσμα:** Ο τελευταίος αριθμός της τελευταίας γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, ενώ οι υπόλοιποι αριθμοί της είναι, κατά σειρά, οι συντελεστές του πηλίκου $\pi(x)$.

Διαίρεση πολυωνύμων

Άσκηση

- Να κάνετε τη διαίρεση των πολυωνύμων $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ και $Q(x) = x - 1$.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, έχουμε

2	-6	2	-1	1
-	2	-4	-2	
2	-4	-2	-3	

Συμπέρασμα: Υπόλοιπο της διαίρεσης $v(x) = -3$.

Συμπέρασμα: Συντελεστές του πηλίκου $\pi(x) = 2x^2 - 4x - 2$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n

- Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ με } a_n \neq 0.$$

Λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης

- Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ τέτοιο ώστε $P(\rho) = 0$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Θεώρημα

- **(Ακέραιων Ριζών)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

με $a_n \neq 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι λύση της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Συμπέρασμα

- Συνδυάζοντας το παραπάνω θεώρημα με το σχήμα Horner, μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο ως γινόμενο παραγόντων μικρότερου βαθμού.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Άσκηση

- Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

Λύση

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ του σταθερού όρου.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, εξετάζω αν η τιμή 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

1	-3	1	2	1
-	1	-2	-1	
1	-2	-1	1	

Συμπέρασμα: Άρα δεν αποτελεί ρίζα.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, εξετάζω αν η τιμή 2 είναι λύση της εξίσωσης:

1	-3	1	2		2
-	2	-2	-2		
1	-1	-1	0		

Συμπέρασμα: Άρα η $x = 2$ αποτελεί λύση.

Επομένως, το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, οπότε

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 1)$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $x^2 - x - 1$.

Παρατηρούμε ότι $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$, άρα το πολυώνυμο έχει ρίζες:

$$x_1 = \frac{(+1) + \sqrt{5}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{(+1) - \sqrt{5}}{2}$$

Βασικές ιδιότητες πολυωνυμικών ανισώσεων

Ρίζες και Σημεία Αλλαγής Προσήμου

- Ένα πολυώνυμο $P(x)$ μπορεί να αλλάζει πρόσημο μόνο στις ρίζες του. Δεν αλλάζει όμως πρόσημο σε κάθε ρίζα: π.χ. το $(x - 1)^2$ μηδενίζεται στο 1, αλλά είναι θετικό εκατέρωθεν.
- Οι ρίζες διασπούν τον άξονα των πραγματικών αριθμών σε διαστήματα, και σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα το πολυώνυμο έχει σταθερό πρόσημο.

Παράδειγμα

- Αν $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$, οι ρίζες είναι $x = -1$, $x = 2$ και $x = 3$. Το πολυώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$ και αλλάζει πρόσημο σε καθεμία από τις ρίζες του.

Βασικές ιδιότητες πολυωνυμικών ανισώσεων

Πρόσημο Πολυωνύμων σε Διαστήματα

- Αφού βρούμε τις ρίζες, μπορούμε να χωρίσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών σε διαστήματα που ορίζονται από αυτές τις ρίζες. Σε κάθε διάστημα, το πολυώνυμο έχει είτε θετικό, είτε αρνητικό πρόσημο.
- Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο σε κάθε διάστημα, μπορούμε να πάρουμε μια δοκιμαστική τιμή μέσα στο κάθε διάστημα και να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου.

Βασικές ιδιότητες πολυωνυμικών ανισώσεων

Στρατηγική Επίλυσης Πολυωνυμικών Ανισώσεων

1. Βρες τις ρίζες του πολυωνύμου λύνοντας την εξίσωση $P(x) = 0$.
2. Χώρισε τον άξονα των πραγματικών αριθμών σε διαστήματα με βάση τις ρίζες.
3. Έλεγξε το πρόσημο του πολυωνύμου σε κάθε διάστημα, παίρνοντας δοκιμαστικές τιμές από κάθε διάστημα.
4. Επίλεξε τα διαστήματα όπου το πολυώνυμο ικανοποιεί την ανίσωση $P(x) > 0$ ή $P(x) < 0$ (ή $\geq, \leq$).
5. Γράψε την τελική λύση ως ένωση των κατάλληλων διαστημάτων.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Άσκηση

- Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το πρόσημο του πολυωνύμου
$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1).$$

Λύση: Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

- $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$
το $x - 1$ είναι θετικό για $x > 1$, μηδέν για $x = 1$ και αρνητικό για $x < 1$.
- $x^2 + x - 6 \geq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0$
το $x^2 + x - 6$ είναι θετικό για $x < -3$ και για $x > 2$, μηδέν για $x = -3$ και για $x = 2$ και αρνητικό για $-3 < x < 2$.
- Επειδή το $2x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$ και $\alpha = 2 > 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x-1$	-		0	+	+
x^2+x-6	+	0	-		+
$2x^2+x+1$	+		+	+	+
P(x)	-	0	+	0	+

Μιγαδικοί αριθμοί

- Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι υπερσύνολο του συνόλου των πραγματικών, τους οποίους και περιλαμβάνει ως «ειδικές περιπτώσεις».
- Όλα ξεκινούν από την εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ που όπως ξέρουμε δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Εν τούτοις, ορίζοντας $i = \sqrt{-1}$, η εξίσωση αυτή αποκτά δύο λύσεις: $x = -i$ και $x = i$ αφού εξ ορισμού $i^2 = (-i)^2 = -1$.
- Το i , που στην ελληνική ορολογία προφέρεται «γιοτ», καλείται φανταστική μονάδα και τα πολλαπλάσιά του καλούνται φανταστικοί αριθμοί.
- Μέσω των φανταστικών αριθμών ορίζεται και η τετραγωνική ρίζα κάθε αρνητικού πραγματικού αριθμού, π.χ. $\sqrt{-9} = 3i$, αφού $(3i)^2 = (3i)(3i) = 9i^2 = 9(-1) = -9$.
- Οι μιγαδικοί αριθμοί προκύπτουν προσθέτοντας έναν πραγματικό και έναν φανταστικό αριθμό. Το σύνολο $\mathbb{C} = \{z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ καλείται σύνολο μιγαδικών αριθμών.

Μιγαδικές ρίζες

- Αν $z = a + bi$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε το a καλείται πραγματικό μέρος του και το b φανταστικό μέρος του. Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ειδικές περιπτώσεις μιγαδικών που έχουν φανταστικό μέρος ίσο με 0.
- Μέσω των μιγαδικών αριθμών μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις που «κανονικά» δε θα είχαν λύση.
- Είδαμε ότι όταν ένα τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα τότε δεν έχει ρίζες. Στην πραγματικότητα δεν έχει πραγματικές ρίζες, αλλά έχει μιγαδικές.
- Για παράδειγμα, το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $1^2 - 4(1)(1) = -3$ επομένως δεν έχει πραγματικές ρίζες. Έχει όμως μιγαδικές, τις $(-1 \pm \sqrt{-3})/2 = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ ($x_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$).

Πολλαπλότητα ρίζας πολυωνύμου

- Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας λέει ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$, δηλαδή κάθε συνάρτηση της γνωστής μορφής $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και μιγαδικούς συντελεστές (στους οποίους συμπεριλαμβάνονται και οι πραγματικοί ως ειδική περίπτωση) έχει ακριβώς n (γενικά μιγαδικές) ρίζες, δηλαδή τιμές x που το μηδενίζουν, αν καθεμία μετρηθεί τόσες φορές όση είναι η πολλαπλότητά της.
- Κάποιες από τις ρίζες ενδέχεται να επαναλαμβάνονται. Το πλήθος επαναλήψεων μίας ρίζας καλείται **πολλαπλότητα** αυτής της ρίζας. Η πολλαπλότητα κάθε ρίζας σχετίζεται με το πόσες παραγώγους του πολυωνύμου μηδενίζει.
- Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα ένα αν μηδενίζει το πολυώνυμο, αλλά όχι την παράγωγό του. Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα δύο αν μηδενίζει το πολυώνυμο, την πρώτη παράγωγό του αλλά όχι την δεύτερη. Μία ρίζα έχει πολλαπλότητα k αν μηδενίζει το πολυώνυμο, τις $k - 1$ πρώτες παραγώγους του αλλά όχι την k -οστή.

Πολλαπλότητα ρίζας πολυωνύμου

Παράδειγμα

Το πολυώνυμο $2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$ έχει ρίζες -3 και 2 (το 2 είναι «διπλή» ρίζα, δηλαδή με πολλαπλότητα δύο) και γράφεται $2(x + 3)(x - 2)(x - 2) = 2(x + 3)(x - 2)^2$, δηλαδή **μηδενίζεται** για $x = 2$.

Κάνοντας πράξεις, η πρώτη παράγωγος ισούται με $2(3x^2 - 2x - 8)$ που επίσης **μηδενίζεται** για $x = 2$, ενώ η δεύτερη παράγωγος ισούται με $12x - 4$ που **δεν μηδενίζεται** για $x = 2$.