



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Προπαρασκευαστικά μαθήματα

Πρόοδοι

Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου

Επ. Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τρόποι επικοινωνίας

1. Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο

email: itriantafyllou@unipi.gr



2. Ηλεκτρονική τάξη

«Προπαρασκευαστικά μαθήματα»

(eclass.unipi.gr)

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Ορισμός 1. Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$.

Συμβολίζοντας με $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση πραγματικών αριθμών, έχουμε τα εξής:

► Ο φυσικός αριθμός 1 θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(1)$ ή συντομότερα α_1 .

► Ο φυσικός αριθμός 2 θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(2)$ ή συντομότερα α_2 .

⋮

► Ο φυσικός αριθμός n θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(n)$ ή συντομότερα α_n .

⋮

Συμβολισμός : $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 1. Γνωρίζουμε ότι ο n -οστός της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ δίνεται από τον επόμενο τύπο: $\alpha_n = 5n + 3$. Τότε οι τέσσερις πρώτοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- 1^{ος} όρος: $n = 1$: $\alpha_1 = 5 \cdot 1 + 3 = 8$
- 2^{ος} όρος: $n = 2$: $\alpha_2 = 5 \cdot 2 + 3 = 13$
- 3^{ος} όρος: $n = 3$: $\alpha_3 = 5 \cdot 3 + 3 = 18$
- 4^{ος} όρος: $n = 4$: $\alpha_4 = 5 \cdot 4 + 3 = 23$.

Παράδειγμα 2. Γνωρίζουμε ότι ο n -οστός της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ δίνεται από τον επόμενο τύπο: $\alpha_n = (-1)^n$. Τότε οι τέσσερις πρώτοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- 1^{ος} όρος: $n = 1$: $\alpha_1 = (-1)^1 = -1$
- 2^{ος} όρος: $n = 2$: $\alpha_2 = (-1)^2 = 1$
- 3^{ος} όρος: $n = 3$: $\alpha_3 = (-1)^3 = -1$
- 4^{ος} όρος: $n = 4$: $\alpha_4 = (-1)^4 = 1$.

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Ορισμός 2. Αναδρομική ακολουθία 1^{ης} τάξης $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ονομάζεται μία ακολουθία για την οποία:

- είναι γνωστός ο 1^{ος} όρος της (α_1)
- ο όρος α_{n+1} είναι συνάρτηση του όρου α_n , δηλαδή ο $(n+1)$ -οστός όρος υπολογίζεται με τη βοήθεια του αμέσως προηγούμενου όρου της (του n -οστού όρου).

Παράδειγμα 3. Για μία αναδρομική ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 10$ και $\alpha_1 = 50$. Τότε οι επόμενοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- 2^{ος} όρος: $n = 1$: $\alpha_2 = \alpha_1 - 10 = 40$
- 3^{ος} όρος: $n = 2$: $\alpha_3 = \alpha_2 - 10 = 30$
- 4^{ος} όρος: $n = 3$: $\alpha_4 = \alpha_3 - 10 = 20$
- 5^{ος} όρος: $n = 4$: $\alpha_5 = \alpha_4 - 10 = 10$
- 6^{ος} όρος: $n = 5$: $\alpha_6 = \alpha_5 - 10 = 0$
- 7^{ος} όρος: $n = 6$: $\alpha_7 = \alpha_6 - 10 = -10$.
- 8^{ος} όρος: $n = 7$: $\alpha_8 = \alpha_7 - 10 = -20$.

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παρατήρηση. Παρουσιάζει συχνά ενδιαφέρον η εύρεση της αναδρομικής σχέσης μίας ακολουθίας βάσει του γενικού τύπου της, δηλαδή του τύπου υπολογισμού του n -οστού όρου της (ή και το αντίστροφο).

Παράδειγμα 4. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \beta \cdot n + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να προσδιορισθεί η αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον όρο α_{n+1} συναρτήσει του όρου α_n . Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

- $\alpha_1 = \beta + \gamma$
- $\alpha_{n+1} = \beta \cdot (n + 1) + \gamma = \beta \cdot n + \beta + \gamma = \alpha_n + \beta.$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 5. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \beta \cdot \gamma^n + \delta$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να προσδιορισθεί η αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον όρο α_{n+1} συναρτήσει του όρου α_n . Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

- $\alpha_1 = \beta \cdot \gamma + \delta$
- $$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \beta \cdot \gamma^{n+1} + \delta = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^n + \delta = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^n + \delta + (\gamma - 1) \cdot \delta - (\gamma - 1) \cdot \delta \\ &= \gamma \cdot \alpha_n - (\gamma - 1) \cdot \delta\end{aligned}$$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 5. Αναλυτικότερη επεξήγηση πράξεων.

$$a_{n+1} = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^n + \delta + \underbrace{(\gamma-1) \cdot \delta}_{\gamma \cdot \delta} - (\gamma-1) \cdot \delta$$

$$= \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^n + \gamma \cdot \delta - (\gamma-1) \cdot \delta$$

$$= \gamma \cdot (\beta \cdot \gamma^n + \delta) - (\gamma-1) \cdot \delta$$

$$= \gamma \cdot a_n - (\gamma-1) \cdot \delta$$

Αριθμητική πρόοδος

Ορισμός 3. Μία ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών ονομάζεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση ενός σταθερού πραγματικού αριθμού ω , ο οποίος ονομάζεται διαφορά.

Αν συμβολίσουμε με α_n και α_{n+1} τον n -οστό όρο και τον $(n+1)$ -οστό όρο μίας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω , τότε ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega.$$

Παρατήρηση. Ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς ω , διακρίνουμε ως προς την μονοτονία της αριθμητικής προόδου τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\omega > 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα (αφού $\alpha_{n+1} > \alpha_n$)
- Αν $\omega < 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα (αφού $\alpha_{n+1} < \alpha_n$)
- Αν $\omega = 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι σταθερή (αφού $\alpha_{n+1} = \alpha_n$).

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 6. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \beta \cdot n + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να εξετασθεί αν η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση. Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

$$\alpha_{n+1} = \beta \cdot (n + 1) + \gamma = \beta \cdot n + \beta + \gamma = \alpha_n + \beta$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \beta.$$

Συνεπώς, η ακολουθία αποτελεί αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = \beta + \gamma$ και διαφορά $\omega = \beta$.

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Για μία αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω , ο κ -οστός όρος και ο λ -οστός όρος ($\kappa > \lambda$) της ικανοποιούν την επόμενη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \alpha_\lambda + (\kappa - \lambda)\omega.$$

Πράγματι, έχουμε ότι:

- $\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa - 1)\omega$
- $\alpha_\lambda = \alpha_1 + (\lambda - 1)\omega$

Συνεπώς, αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\alpha_\kappa - \alpha_\lambda = \alpha_1 + (\kappa - 1)\omega - (\alpha_1 + (\lambda - 1)\omega) = (\kappa - \lambda)\omega.$$

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$2\beta = \alpha + \gamma.$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου, τότε έχουμε ότι:

- $\beta - \alpha = \omega$

Συνεπώς, $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ ή ισοδύναμα $2\beta = \alpha + \gamma$.

- $\gamma - \beta = \omega$

Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τη σχέση $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε έχουμε

$\beta - \alpha = \gamma - \beta$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} \beta - \alpha = \omega \\ \gamma - \beta = \omega \end{cases}$ δηλαδή οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά ω .

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω

$$S_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n$$

ή ισοδύναμα

$$S_n = \frac{2\alpha_1 + (n - 1)\omega}{2} \cdot n.$$

Πράγματι, το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου γράφεται ως εξής:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots + \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_1 + \omega + \alpha_1 + 2\omega + \dots + \alpha_1 + (n - 1)\omega$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 \\ &= \alpha_n + \alpha_n - \omega + \dots + \alpha_n - (n - 3)\omega + \alpha_n - (n - 2)\omega + \alpha_n - (n - 1)\omega \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 7. Να υπολογισθούν τα επόμενα αθροίσματα:

(α) $1 + 2 + \dots + \nu$

Οι αριθμοί $1, 2, \dots, \nu$ αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$. Συνεπώς, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της συγκεκριμένης αριθμητικής προόδου ισούται με

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu = \frac{2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 1}{2} \cdot \nu = \frac{\nu + 1}{2} \cdot \nu$$

(β) $\sum_{i=1}^{\nu} (2i - 3)$

Οι όροι του παραπάνω αθροίσματος αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = -1$ και διαφορά $\omega = 2$. Συνεπώς το άθροισμα των ν πρώτων όρων της συγκεκριμένης αριθμητικής προόδου ισούται με

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu = \frac{2 \cdot (-1) + (\nu - 1) \cdot 2}{2} \cdot \nu = (\nu - 2) \cdot \nu$$

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 8. Αν για μία αριθμητική πρόοδο, γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$, να προσδιορισθεί η διαφορά και ο 20^{ος} όρος της προόδου.

Λύση. Δεδομένου ότι

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + 11 \cdot \omega \text{ δηλαδή } 94 = 6 + 11 \cdot \omega, \text{ προκύπτει ότι } \omega = 8.$$

Συνεπώς, ο 20^{ος} όρος της προόδου δίνεται ως εξής:

$$\alpha_{20} = 6 + 19 \cdot 8 = 158.$$

Παράδειγμα 9. Να υπολογισθεί το άθροισμα των όρων της ακολουθίας $5, -1, -7, \dots$ που βρίσκονται μεταξύ του 15^{ου} όρου και του 23^{ου} όρου της.

Λύση. Δεδομένου ότι η ακολουθία αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 5$, $\omega = -6$, έχουμε:

$$S_{22} - S_{15} = \frac{2 \cdot 5 + (22-1) \cdot (-6)}{2} \cdot 22 - \frac{2 \cdot 5 + (15-1) \cdot (-6)}{2} \cdot 15 = -721.$$

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 10. Αν για μία αριθμητική πρόοδο, γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$, να προσδιορισθεί το πλήθος των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

Λύση.

$$S_n = \frac{2\alpha_1 + (n - 1)\omega}{2} \cdot n$$

δηλαδή

$$679 = \frac{2 \cdot 3 + (n - 1) \cdot 7}{2} \cdot n.$$

Συνεπώς,

$$7n^2 - n - 1358 = 0.$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι $n = 14$.

Γεωμετρική πρόοδος

Ορισμός 4. Μία ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί ενός σταθερού (μη μηδενικού) πραγματικού αριθμού λ , ο οποίος ονομάζεται λόγος.

Αν συμβολίσουμε με a_n και a_{n+1} τον n -οστό όρο και τον $(n+1)$ -οστό όρο μίας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ , τότε ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

Παρατήρηση. Ανάλογα με την τιμή του λόγου λ , διακρίνουμε ως προς την μονοτονία της γεωμετρικής προόδου τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα (αφού $a_{n+1} > a_n$)
- Αν $\lambda < 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα (αφού $a_{n+1} < a_n$)

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Για μία γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ , ο χ -οστός όρος και ο ψ -οστός όρος ($\chi > \psi$) της ικανοποιούν την επόμενη σχέση:

$$\alpha_\chi = \lambda^{\chi-\psi} \alpha_\psi.$$

Πράγματι, έχουμε ότι:

- $\alpha_\chi = \lambda^{\chi-1} \alpha_1$
- $\alpha_\psi = \lambda^{\psi-1} \alpha_1$

Συνεπώς, διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_\chi}{\alpha_\psi} = \lambda^{\chi-1-(\psi-1)} = \lambda^{\chi-\psi}.$$

Γεωμετρική πρόοδος

Παράδειγμα 11. Σε μία κοινωνία βακτηριδίων το πλήθος τους υποδιπλασιάζεται κάθε μία ώρα. Αν αρχικά υπήρχαν 2048 βακτηρίδια, να υπολογισθεί το πλήθος τους μετά από την έλευση 6 ωρών.

Λύση. Το πλήθος των βακτηριδίων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2048$ και λόγο $\lambda = 1/2$. Συνεπώς, το ζητούμενο ταυτίζεται με τον 7^ο όρο της προόδου (προσοχή: στην ώρα «μηδέν» αντιστοιχεί ο 1^{ος} όρος της προόδου) και υπολογίζεται ως εξής:

$$\alpha_7 = (1/2)^{7-1} \cdot 2048 = 32.$$

Παράδειγμα 12. Ο n -οστός όρος μίας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$. Να αποδειχθεί ότι η συγκεκριμένη ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογισθεί ο πρώτος όρος και ο λόγος της.

Λύση. Ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = 2$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 6$ και λόγο $\lambda = 2$.

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\beta^2 = \alpha\gamma.$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου, τότε έχουμε ότι:

- $\beta = \lambda\alpha$

Συνεπώς, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή ισοδύναμα $\beta^2 = \alpha\gamma$.

- $\gamma = \lambda\beta$

Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τη σχέση $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} \beta/\alpha = \lambda \\ \gamma/\beta = \lambda \end{cases}$ δηλαδή οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο λ .

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ

$$S_n = \frac{\alpha_1(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1}, \quad \lambda \neq 1.$$

Πράγματι, το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου γράφεται ως εξής:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots + \alpha_n = \alpha_1 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \dots + \lambda^{n-1}\alpha_1$$

Πολλαπλασιάζοντας επί λ τα μέλη της παραπάνω ισότητας προκύπτει ότι:

$$\lambda S_n = \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \lambda^3\alpha_1 + \dots + \lambda^n\alpha_1$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Γεωμετρική πρόοδος

Παράδειγμα 13. Να υπολογισθεί το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου:

(α) 1,3,9, ...

Οι αριθμοί 1,3,9, ... αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 3$. Συνεπώς, το άθροισμα των $n = 8$ πρώτων όρων της συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με

$$S_8 = \frac{1 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 3280.$$

(β) -3,9,27, ...

Οι αριθμοί -3,9,27, ... αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = -3$ και λόγο $\lambda = -3$. Συνεπώς, το άθροισμα των $n = 8$ πρώτων όρων της συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με

$$S_8 = \frac{-3 \cdot ((-3)^8 - 1)}{-3 - 1} = 4920.$$