

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Προπαρασκευαστικά μαθήματα

Πρόοδοι

Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου

Αναπλ. Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τρόποι επικοινωνίας

1. **Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο**

   email: itriantafyllou@unipi.gr



2. **Ηλεκτρονική τάξη**

   «Προπαρασκευαστικά μαθήματα»

   (eclass.unipi.gr)

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Ορισμός 1. Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$.

Συμβολίζοντας με $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση πραγματικών αριθμών, έχουμε τα εξής:

- Ο φυσικός αριθμός 1 θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(1)$ ή συντομότερα α_1.
- Ο φυσικός αριθμός 2 θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(2)$ ή συντομότερα α_2.

⋮

- Ο φυσικός αριθμός ν θα αντιστοιχηθεί με τον πραγματικό αριθμό $\alpha(\nu)$ ή συντομότερα α_ν.

⋮

Συμβολισμός : $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 1. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός της ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ δίνεται από τον επόμενο τύπο: $\alpha_\nu = 5\nu + 3$. Τότε οι τέσσερις πρώτοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- **1ος όρος**: $\nu = 1$: $\alpha_1 = 5 \cdot 1 + 3 = 8$
- **2ος όρος**: $\nu = 2$: $\alpha_2 = 5 \cdot 2 + 3 = 13$
- **3ος όρος**: $\nu = 3$: $\alpha_3 = 5 \cdot 3 + 3 = 18$
- **4ος όρος**: $\nu = 4$: $\alpha_4 = 5 \cdot 4 + 3 = 23.$

Παράδειγμα 2. Γνωρίζουμε ότι ο ν-οστός της ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ δίνεται από τον επόμενο τύπο: $\alpha_\nu = (-1)^\nu$. Τότε οι τέσσερις πρώτοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- **1ος όρος**: $\nu = 1$: $\alpha_1 = (-1)^1 = -1$
- **2ος όρος**: $\nu = 2$: $\alpha_2 = (-1)^2 = 1$
- **3ος όρος**: $\nu = 3$: $\alpha_3 = (-1)^3 = -1$
- **4ος όρος**: $\nu = 4$: $\alpha_4 = (-1)^4 = 1.$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Ορισμός 2. Αναδρομική ακολουθία 1ης τάξης $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται μία ακολουθία για την οποία:

- είναι γνωστός ο 1ος όρος της (α_1)
- ο όρος $\alpha_{\nu+1}$ είναι συνάρτηση του όρου α_ν, δηλαδή ο $(\nu+1)-$οστός όρος υπολογίζεται με τη βοήθεια του αμέσως προηγούμενου όρου της (του $\nu-$οστού όρου).

Παράδειγμα 3. Για μία αναδρομική ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu-10$ και $\alpha_1=50$. Τότε οι επόμενοι όροι της ακολουθίας υπολογίζονται ως εξής:

- **2ος όρος**: $\nu=1$: $\alpha_2=\alpha_1-10=40$
- **3ος όρος**: $\nu=2$: $\alpha_3=\alpha_2-10=30$
- **4ος όρος**: $\nu=3$: $\alpha_4=\alpha_3-10=20$
- **5ος όρος**: $\nu=4$: $\alpha_5=\alpha_4-10=10$
- **6ος όρος**: $\nu=5$: $\alpha_6=\alpha_5-10=0$
- **7ος όρος**: $\nu=6$: $\alpha_7=\alpha_6-10=-10.$
- **8ος όρος**: $\nu=7$: $\alpha_8=\alpha_7-10=-20.$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παρατήρηση. Παρουσιάζει συχνά ενδιαφέρον η **εύρεση της αναδρομικής σχέσης** μίας ακολουθίας βάσει του γενικού τύπου της, δηλαδή του **τύπου υπολογισμού του ν −οστού όρου** της (ή και το αντίστροφο).

Παράδειγμα 4. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_\nu = \beta \cdot \nu + \gamma, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να προσδιορισθεί η αναδρομική σχέση της ακολουθίας.
Λύση. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$ συναρτήσει του όρου α_ν. Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

- $\alpha_1 = \beta + \gamma$
- $\alpha_{\nu+1} = \beta \cdot (\nu + 1) + \gamma = \beta \cdot \nu + \beta + \gamma = \alpha_\nu + \beta.$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 5. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_\nu = \beta \cdot \gamma^\nu + \delta, \quad \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να προσδιορισθεί η αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$ συναρτήσει του όρου α_ν. Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

- $\alpha_1 = \beta \cdot \gamma + \delta$
- $\alpha_{\nu+1} = \beta \cdot \gamma^{\nu+1} + \delta = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^\nu + \delta = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^\nu + \delta + (\gamma - 1) \cdot \delta - (\gamma - 1) \cdot \delta$

  $= \gamma \cdot \alpha_\nu - (\gamma - 1) \cdot \delta$

Ακολουθία πραγματικών αριθμών

Παράδειγμα 5. Αναλυτικότερη επεξήγηση πράξεων.

$$\alpha_{\nu+1} = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^{\nu} + \delta + (\gamma-1)\cdot\delta - (\gamma-1)\cdot\delta$$

$$= \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^{\nu} + \gamma \cdot \delta - (\gamma-1)\cdot\delta$$

$$= \gamma \cdot (\beta \cdot \gamma^{\nu} + \delta) - (\gamma-1)\cdot\delta$$

$$= \gamma \cdot \alpha_{\nu} - (\gamma-1)\cdot\delta$$

Αριθμητική πρόοδος

Ορισμός 3. Μία ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών ονομάζεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση ενός σταθερού πραγματικού αριθμού ω, ο οποίος ονομάζεται διαφορά.

Αν συμβολίσουμε με α_ν και $\alpha_{\nu+1}$ τον $\nu-$οστό όρο και τον $(\nu+1)-$οστό όρο μίας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega}$$

ή ισοδύναμα

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega.}$$

Παρατήρηση. Ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς ω, διακρίνουμε ως προς την μονοτονία της αριθμητικής προόδου τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\omega > 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα (αφού $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$)
- Αν $\omega < 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα (αφού $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$)
- Αν $\omega = 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι σταθερή (αφού $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$).

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 6. Για μία ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\alpha_\nu = \beta \cdot \nu + \gamma, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να εξετασθεί αν η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση. Βάσει του γενικού τύπου της ακολουθίας ισχύουν τα εξής:

$$\alpha_{\nu+1} = \beta \cdot (\nu + 1) + \gamma = \beta \cdot \nu + \beta + \gamma = \alpha_\nu + \beta$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \beta.$$

Συνεπώς, η ακολουθία αποτελεί αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = \beta + \gamma$ και διαφορά $\omega = \beta$.

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Για μία αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω, ο κ −οστός όρος και ο λ −οστός όρος ($\kappa > \lambda$) της ικανοποιούν την επόμενη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \alpha_\lambda + (\kappa - \lambda)\omega.$$

Πράγματι, έχουμε ότι:

- $\alpha_\kappa = \alpha_1 + (\kappa - 1)\omega$
- $\alpha_\lambda = \alpha_1 + (\lambda - 1)\omega$

Συνεπώς, αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\alpha_\kappa - \alpha_\lambda = \alpha_1 + (\kappa - 1)\omega - (\alpha_1 + (\lambda - 1)\omega\ ) = (\kappa - \lambda)\omega.$$

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$2\beta = \alpha + \gamma.$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου, τότε έχουμε ότι:

- $\beta - \alpha = \omega$
- $\gamma - \beta = \omega$

Συνεπώς, $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ ή ισοδύναμα $2\beta = \alpha + \gamma$.

Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τη σχέση $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε έχουμε

$\beta - \alpha = \gamma - \beta$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} \beta - \alpha = \omega \\ \gamma - \beta = \omega \end{cases}$ δηλαδή οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά ω.

Αριθμητική πρόοδος

Πρόταση. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω

$$S_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2} \cdot \nu$$

ή ισοδύναμα

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2} \cdot \nu.$$

Πράγματι, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου γράφεται ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \omega + \alpha_1 + 2\omega + \cdots + \alpha_1 + (\nu-1)\omega$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} S_\nu &= \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \cdots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 \\ &= \alpha_\nu + \alpha_\nu - \omega + \cdots + \alpha_\nu - (\nu-3)\omega + \alpha_\nu - (\nu-2)\omega + \alpha_\nu - (\nu-1)\omega \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 7. Να υπολογισθούν τα επόμενα αθροίσματα:

(α) $1 + 2 + \cdots + \nu$

Οι αριθμοί $1,2,\ldots,\nu$ αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$. Συνεπώς, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της συγκεκριμένης αριθμητικής προόδου ισούται με

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu = \frac{2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 1}{2} \cdot \nu = \frac{\nu + 1}{2} \cdot \nu$$

(β) $\sum_{i=1}^{\nu}(2i - 3)$

Οι όροι του παραπάνω αθροίσματος αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = -1$ και διαφορά $\omega = 2$. Συνεπώς το άθροισμα των ν πρώτων όρων της συγκεκριμένης αριθμητικής προόδου ισούται με

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu = \frac{2 \cdot (-1) + (\nu - 1) \cdot 2}{2} \cdot \nu = (\nu - 2) \cdot \nu$$

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 8. Αν για μία αριθμητική πρόοδο, γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$, να προσδιορισθεί η διαφορά και ο 20ος όρος της προόδου.

Λύση. Δεδομένου ότι

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + 11 \cdot \omega \text{ } \textbf{δηλαδή} \text{ } 94 = 6 + 11 \cdot \omega \text{ , } \textbf{προκύπτει ότι} \text{ } \omega = 8.$$

Συνεπώς, ο 20ος όρος της προόδου δίνεται ως εξής:

$$\alpha_{20} = 6 + 19 \cdot 8 = 158.$$

Παράδειγμα 9. Να υπολογισθεί το άθροισμα των όρων της ακολουθίας $5, -1, -7, \ldots$ που βρίσκονται μεταξύ του 15ου όρου και του 23ου όρου της.

Λύση. Δεδομένου ότι η ακολουθία αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 5$, $\omega = -6$, έχουμε:

$$S_{22} - S_{15} = \frac{2 \cdot 5 + (22-1) \cdot (-6)}{2} \cdot 22 - \frac{2 \cdot 5 + (15-1) \cdot (-6)}{2} \cdot 15 = -721.$$

Αριθμητική πρόοδος

Παράδειγμα 10. Αν για μία αριθμητική πρόοδο, γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$, να προσδιορισθεί το πλήθος των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

Λύση.

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu$$

δηλαδή

$$679 = \frac{2 \cdot 3 + (\nu - 1) \cdot 7}{2} \cdot \nu.$$

Συνεπώς,

$$7\nu^2 - \nu - 1358 = 0.$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι $\nu = 14$.

Γεωμετρική πρόοδος

Ορισμός 4. Μία ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί ενός σταθερού (μη μηδενικού) πραγματικού αριθμού λ, ο οποίος ονομάζεται λόγος.

Αν συμβολίσουμε με α_ν και $\alpha_{\nu+1}$ τον $\nu-$οστό όρο και τον $(\nu+1)-$οστό όρο μίας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει η επόμενη αναδρομική σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\boldsymbol{\alpha_{\nu+1}}}{\boldsymbol{\alpha_\nu}} = \lambda$$

Παρατήρηση. Ανάλογα με την τιμή του λόγου λ, διακρίνουμε ως προς την μονοτονία της γεωμετρικής προόδου τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα (αφού $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$)

- Αν $\lambda < 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα (αφού $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$)

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Για μία γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, ο χ −οστός όρος και ο ψ −οστός όρος ($\chi > \psi$) της ικανοποιούν την επόμενη σχέση:

$$\alpha_\chi = \lambda^{\chi-\psi}\alpha_\psi.$$

Πράγματι, έχουμε ότι:

- $\alpha_\chi = \lambda^{\chi-1}\alpha_1$
- $\alpha_\psi = \lambda^{\psi-1}\alpha_1$

Συνεπώς, διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_\chi}{\alpha_\psi} = \lambda^{\chi-1-(\psi-1)} = \lambda^{\chi-\psi}.$$

Γεωμετρική πρόοδος

Παράδειγμα 11. Σε μία κοινωνία βακτηριδίων το πλήθος τους υποδιπλασιάζεται κάθε μία ώρα. Αν αρχικά υπήρχαν 2048 βακτηρίδια, να υπολογισθεί το πλήθος τους μετά από την έλευση 6 ωρών.

Λύση. Το πλήθος των βακτηριδίων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2048$ και λόγο $\lambda = 1/2$. Συνεπώς, το ζητούμενο ταυτίζεται με τον 7ο όρο της προόδου (προσοχή: στην ώρα «μηδέν» αντιστοιχεί ο 1ος όρος της προόδου) και υπολογίζεται ως εξής:

$$\alpha_7 = (1/2)^{7-1} \cdot 2048 = 32.$$

Παράδειγμα 12. Ο ν −οστός όρος μίας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$. Να αποδειχθεί ότι η συγκεκριμένη ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογισθεί ο πρώτος όρος και ο λόγος της.

Λύση. Ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{3 \cdot 2^{\nu+1}}{3 \cdot 2^\nu} = 2$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 6$ και λόγο $\lambda = 2$.

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\beta^2 = \alpha\gamma.$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου, τότε έχουμε ότι:

- $\beta = \lambda\alpha$

  Συνεπώς, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή ισοδύναμα $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- $\gamma = \lambda\beta$

Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ ικανοποιούν τη σχέση $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} \beta/\alpha = \lambda \\ \gamma/\beta = \lambda \end{cases}$ δηλαδή οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο λ.

Γεωμετρική πρόοδος

Πρόταση. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}, \qquad \lambda \neq 1.$$

Πράγματι, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου γράφεται ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_\nu = \alpha_1 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \cdots + \lambda^{\nu-1}\alpha_1$$

Πολλαπλασιάζοντας επί λ τα μέλη της παραπάνω ισότητας προκύπτει ότι:

$$\lambda S_\nu = \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_1 + \lambda^3\alpha_1 + \cdots + \lambda^\nu\alpha_1$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Γεωμετρική πρόοδος

Παράδειγμα 13. Να υπολογισθεί το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου:

(α) $1,3,9,\ldots$

Οι αριθμοί $1,3,9,\ldots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 3$. Συνεπώς, το άθροισμα των $\nu = 8$ πρώτων όρων της συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με

$$S_8 = \frac{1 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 3280.$$

(β) $-3,9,27,\ldots$

Οι αριθμοί $-3,9,27,\ldots$ αποτελούν διαδοχικούς όρους μίας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = -3$ και λόγο $\lambda = -3$. Συνεπώς, το άθροισμα των $\nu = 8$ πρώτων όρων της συγκεκριμένης γεωμετρικής προόδου ισούται με

$$S_8 = \frac{-3 \cdot \left((-3)^8 - 1\right)}{-3 - 1} = 4920.$$