



Τριγωνομετρία

Προπαρασκευαστικά Μαθήματα

Εμμανουήλ Ανδρουλάκης

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

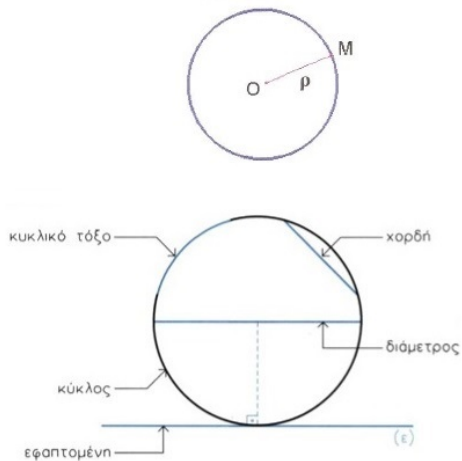
- 1 Επανάληψη Γεωμετρίας
- 2 Στοιχεία Τριγωνομετρίας
- 3 Ασκήσεις

Κύκλος και στοιχεία κύκλου

- **Κύκλος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O . Η απόσταση αυτή συμβολίζεται συνήθως με ρ και λέγεται **ακτίνα** του κύκλου. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** του κύκλου.
- Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του κύκλου ονομάζεται **εσωτερικό του κύκλου** και ο κύκλος μαζί με το εσωτερικό του λέγεται **κυκλικός δίσκος**.
- **Χορδή** του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του.
- Η χορδή του κύκλου που περνάει από το κέντρο του, λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.
- **Τόξο** είναι κάθε τμήμα του κύκλου (κυκλικό τόξο) ή άλλης καμπύλης γραμμής.
- **Εφαπτομένη** είναι η ευθεία που περνά από ένα συγκεκριμένο σημείο του κύκλου και είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που περνά από το σημείο αυτό.

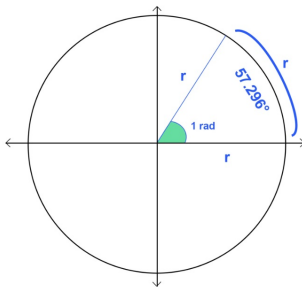
Κύκλος και στοιχεία κύκλου

ΚΥΚΛΟΣ



Ακτίνια και Μοίρες

- **Γωνία** είναι το μέρος του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ δύο ημιευθειών με αρχή το ίδιο σημείο. Οι δύο ημιευθείες λέγονται πλευρές της γωνίας ενώ το κοινό τους σημείο κορυφή της γωνίας.
- Έχουμε δύο μονάδες για να μετρήσουμε τις γωνίες: τη μοίρα και το ακτίνιο.
- Ένα **ακτίνιο** είναι η γωνία που δημιουργείται στο κέντρο ενός κύκλου από ένα τόξο του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Ισοδύναμα, ένα ακτίνιο είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου.
- Ένα μόνο ακτίνιο είναι περίπου ίσο με 57.296 μοίρες.



Ακτίνια και Μοίρες

- Το ακτίνιο (radian) συμβολίζεται με rad.
- Μερικά παραδείγματα γωνιών σε ακτίνια είναι: 1 rad, 2 rad, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$ κλπ.
- Ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

όπου α : ακτίνια (rad) και μ : μοίρες. Οπότε για παράδειγμα, για τις 90° έχουμε $\alpha = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$, άρα $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad.

- Η **μοίρα** (μοίρα τόξου), η οποία συμβολίζεται συνήθως με $^\circ$ (ή με deg), είναι η μονάδα μέτρησης μιας επίπεδης γωνίας, που αναπαριστά το $\frac{1}{360}$ μιας πλήρους περιστροφής. Μια μοίρα είναι ισοδύναμη με $\frac{\pi}{180}$ rad.

Είδη γωνιών

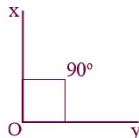
- **Μηδενική γωνία** είναι η γωνία που οι πλευρές της συμπίπτουν και είναι ίση με 0° .
- **Ορθή γωνία** είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι κάθετες και είναι ίση με 90° .
- **Ευθεία γωνία** είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες (έχουν το ίδιο σημείο αρχής, αλλά αντίθετες κατευθύνσεις) και είναι ίση με 180° .
- **Πλήρης γωνία** είναι η γωνία που αντιστοιχεί σε μια πλήρη περιστροφή και είναι ίση με 360° .
- **Οξεία γωνία** είναι κάθε γωνία μεταξύ 0° και 90° .
- **Αμβλεία γωνία** είναι κάθε γωνία που είναι μεγαλύτερη από μια ορθή και μικρότερη από 180° .

Είδη γωνιών

- **Κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι μικρότερη από 180° (αν προεκτείνουμε οποιαδήποτε πλευρά της, όλα τα σημεία της γωνίας βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο).
- **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι μεγαλύτερη από 180° και μικρότερη από 360° .
- **Συμπληρωματικές** είναι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .
- **Παραπληρωματικές** είναι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .
- **Κατακορυφήν** είναι δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Είδη γωνιών

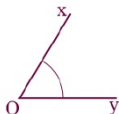
Ορθή γωνία



Ευθεία γωνία



Οξεία γωνία



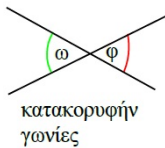
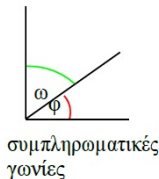
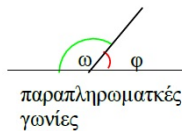
Αμβλεία γωνία



Μηδενική γωνία

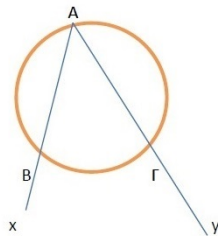
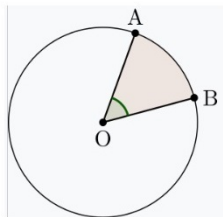
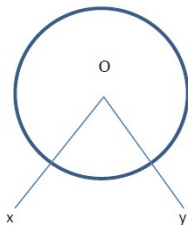


Πλήρης γωνία



Είδη γωνιών

- Μία γωνία $x\hat{O}y$ που η κορυφή της O είναι το κέντρο ενός κύκλου (O, ρ) και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **επίκεντρη γωνία** στον κύκλο (O, ρ) . Αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι **κυκλικός τομέας** λέγεται κάθε γεωμετρικό σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία ενός κυκλικού δίσκου και μίας επίκεντρης γωνίας του.
- Μία γωνία $x\hat{A}y$ που η κορυφή της A ανήκει στον κύκλο (O, ρ) και οι πλευρές της Ax και Ay τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (O, ρ) .

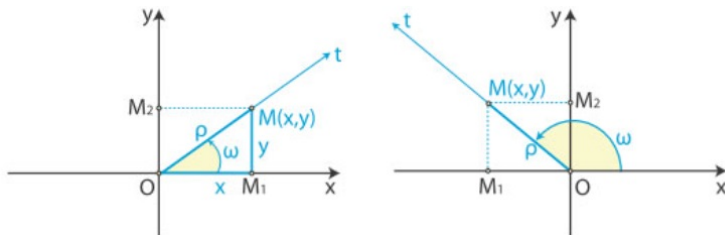


Τύποι Κύκλου

- Μήκος κύκλου: $\Gamma = 2\pi\rho$.
- Μήκος τόξου γ που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ° : $\gamma = \frac{2\pi\rho\cdot\mu^\circ}{360^\circ}$.
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου: $E = \pi\rho^2$.
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα, επίκεντρης γωνίας μ° : $E_{\chi.\tau.} = \frac{\pi\rho^2\cdot\mu^\circ}{360^\circ}$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

- Έστω γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το O (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot . Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται αρχική πλευρά της γωνίας ω , ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται τελική πλευρά της ω .



- Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω παίρνουμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ και φέρνουμε την κάθετη MM_1 στον άξονα $x'x$.

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

- Ισχύουν τα παρακάτω για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** (ημω, συνω, εφω και σφω, τους οποίους στο εξής θα συμβολίζουμε και ως $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\tan\omega$, $\cot\omega$):

$$\sin\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)} = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{x}{\rho}$$

$$\tan\omega = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

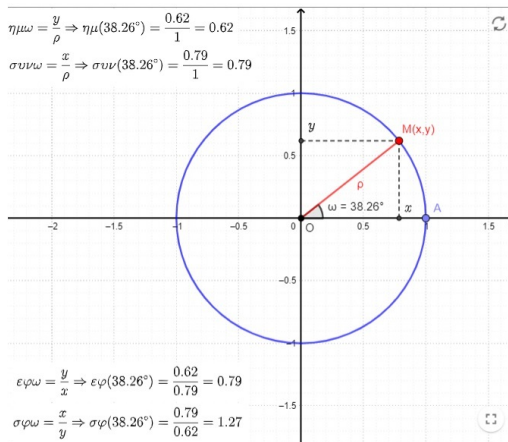
$$\cot\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)} = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

$$\rho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 360° , καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 0° μέχρι 360° .

Τριγωνομετρικός Κύκλος

- Για τον (κατά προσέγγιση) υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω χρησιμοποιούμε τον **τριγωνομετρικό κύκλο** ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, οπότε αναφέρεται και ως **μοναδιαίος κύκλος**.



Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

- Οι τιμές του $\sin\omega$ και του $\cos\omega$ μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την μονάδα. Συνεπώς ισχύει

$$-1 \leq \sin\omega \leq 1$$

και

$$-1 \leq \cos\omega \leq 1$$

- Επίσης, οι συντεταγμένες του σημείου M που αντιστοιχούν στη γωνία ω είναι οι ίδιες με τις συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη γωνία $2\pi + \omega$ (ή $360^\circ + \omega$ αν μετράμε τις γωνίες σε μοίρες). Άρα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2\pi + \omega$ είναι οι ίδιοι με αυτούς της γωνίας ω .
- Αυτό φυσικά ισχύει όχι μόνο για μία πλήρη περιστροφή, αλλά και για κ περιστροφές, με $\kappa \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς ισχύουν τα εξής:

$$\sin(2\kappa\pi + \omega) = \sin\omega, \cos(2\kappa\pi + \omega) = \cos\omega,$$

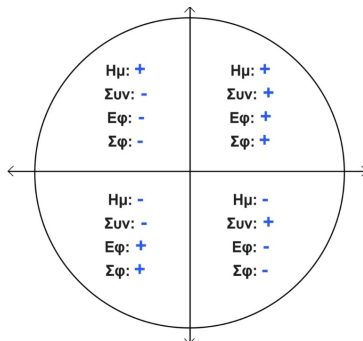
$$\tan(2\kappa\pi + \omega) = \tan\omega, \cot(2\kappa\pi + \omega) = \cot\omega$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

- Όταν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:

$$\sin \omega = y, \cos \omega = x$$

- Για το λόγο αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται και άξονας των συνημίτονων, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται και άξονας των ημίτονων.
- Από τον τριγωνομετρικό κύκλο προκύπτουν και τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών:



Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Βασικών Γωνιών

Γωνία ω	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	----	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	----	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
σφω	----	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	----	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	----

Σχέσεις Αναγωγής στο 1ο Τεταρτημόριο

- Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις αναγωγής, μπορούμε να σχετίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 1ου τεταρτημορίου.

	$-\omega$	$\frac{\pi}{2} \pm \omega$	$\pi \pm \omega$	$\frac{3\pi}{2} \pm \omega$	$2\kappa\pi \pm \omega$
$\sin(\dots)$	$-\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$	$\mp \sin(\omega)$	$-\cos(\omega)$	$\pm \sin(\omega)$
$\cos(\dots)$	$\cos(\omega)$	$\mp \sin(\omega)$	$-\cos(\omega)$	$\pm \sin(\omega)$	$\cos(\omega)$
$\tan(\dots)$	$-\tan(\omega)$	$\mp \cot(\omega)$	$\pm \tan(\omega)$	$\mp \cot(\omega)$	$\pm \tan(\omega)$
$\cot(\dots)$	$-\cot(\omega)$	$\mp \tan(\omega)$	$\pm \cot(\omega)$	$\mp \tan(\omega)$	$\pm \cot(\omega)$

Παράδειγμα:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Βασικοί Τριγωνομετρικοί Τύποι

$\tan(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)}$	$\cot(\omega) = \frac{1}{\tan(\omega)}$	$\sin^2(\omega) + \cos^2(\omega) = 1$
$ \sin(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin(\omega) \leq 1$		
$ \cos(\omega) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \cos(\omega) \leq 1$		

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- Αθροίσματα και διαφορές γωνιών:

$\sin(\omega \pm \phi) = \sin(\omega)\cos(\phi) \pm \cos(\omega)\sin(\phi)$	$\cos(\omega \pm \phi) = \cos(\omega)\cos(\phi) \mp \sin(\omega)\sin(\phi)$
$\tan(\omega \pm \phi) = \frac{\tan(\omega) \pm \tan(\phi)}{1 \mp \tan(\omega)\tan(\phi)}$	$\cot(\omega \pm \phi) = \frac{\cot(\omega)\cot(\phi) \mp 1}{\cot(\omega) \pm \cot(\phi)}$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}
 \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- Μετασχηματισμοί αθροισμάτων ή διαφορών σε γινόμενα και το αντίστροφο:

$\sin(\omega) + \sin(\phi) = 2 \sin\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right)$
$\sin(\omega) - \sin(\phi) = 2 \sin\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right)$
$\cos(\omega) + \cos(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega - \phi}{2}\right)$
$\cos(\omega) - \cos(\phi) = -2 \sin\left(\frac{\omega + \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \omega}{2}\right)$
$\sin(\omega) \sin(\phi) = \frac{1}{2} (\cos(\omega - \phi) - \cos(\omega + \phi))$
$\cos(\omega) \cos(\phi) = \frac{1}{2} (\cos(\omega - \phi) + \cos(\omega + \phi))$
$\sin(\omega) \cos(\phi) = \frac{1}{2} (\sin(\omega - \phi) + \sin(\omega + \phi))$

Παράδειγμα:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- Διπλάσιες γωνίες:

$\sin(2\omega) = 2 \sin(\omega) \cos(\omega)$
$\cos(2\omega) = \cos^2(\omega) - \sin^2(\omega) = 1 - 2 \sin^2(\omega) = 2 \cos^2(\omega) - 1$
$\tan(2\omega) = \frac{2 \tan(\omega)}{1 - \tan^2(\omega)}$
$\sin(\omega) = \frac{2 \tan(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}$
$\cos(\omega) = \frac{1 - \tan^2(\frac{\omega}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\omega}{2})}$

Παράδειγμα:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \left(\text{καθότι } \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{άρα } 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- Αποτετραγωνισμοί:

$\sin^2(\omega) = \frac{1 - \cos(2\omega)}{2}$
$\cos^2(\omega) = \frac{1 + \cos(2\omega)}{2}$
$\tan^2(\omega) = \frac{1 - \cos(2\omega)}{1 + \cos(2\omega)}$
$\cot^2(\omega) = \frac{1 + \cos(2\omega)}{1 - \cos(2\omega)}$

Παράδειγμα:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

οπότε

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις αφορούν εξισώσεις που περιέχουν τριγωνομετρικό αριθμό άγνωστης γωνίας.
- Οι βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις, λύνονται φέρνοντάς τις σε μια από τις παρακάτω μορφές (όπου x άγνωστη γωνία, ϕ γνωστή γωνία και $\kappa \in \mathbb{Z}$):

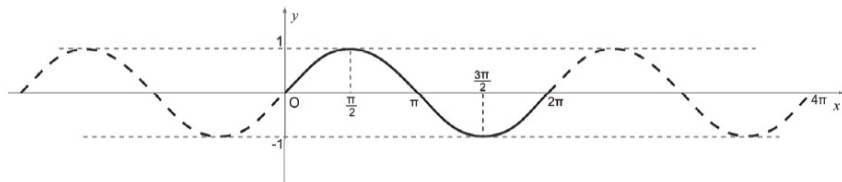
Εξίσωση	Λύση
$\sin(x) = \sin(\phi)$	$x = 2\kappa\pi + \phi$ ή $x = (2\kappa + 1)\pi - \phi$
$\cos(x) = \cos(\phi)$	$x = 2\kappa\pi \pm \phi$
$\tan(x) = \tan(\phi)$	$x = \kappa\pi + \phi$
$\cot(x) = \cot(\phi)$	$x = \kappa\pi + \phi$

- Καθένας από τους προηγούμενους τύπους λύσεων δίνει άπειρες λύσεις.

Βασικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

$$f(x) = \sin(x)$$

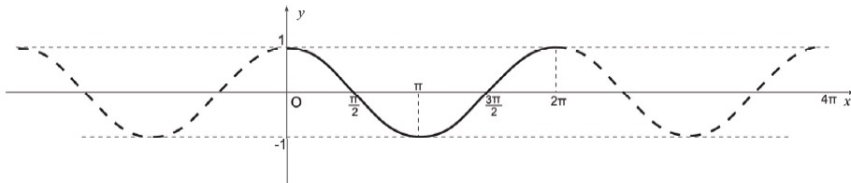
- Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$.
- Είναι περιοδική, με περίοδο $T = 2\pi$.
- Είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0, 0)$.
- Σύνολο τιμών: $[-1, 1]$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- Έχει μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- Έχει ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$.



Βασικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

$$f(x) = \cos(x)$$

- Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R}$.
- Είναι περιοδική, με περίοδο $T = 2\pi$.
- Είναι άρτια και έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
- Σύνολο τιμών: $[-1, 1]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$.
- Έχει μέγιστο για $x = 0$ και $x = 2\pi$, το $f(0) = f(2\pi) = 1$.
- Έχει ελάχιστο για $x = \pi$, το $f(\pi) = -1$.

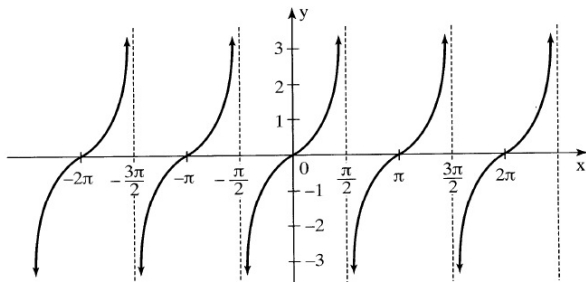


Σημείωση: Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \sin(\omega x)$ και $f(x) = \rho \cos(\omega x)$ έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή $|\rho|$ και $-|\rho|$ αντίστοιχα. Επίσης είναι περιοδικές με $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

Βασικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

$$f(x) = \tan(x)$$

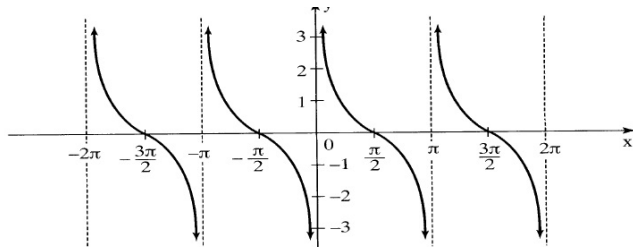
- Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Είναι περιοδική, με περίοδο $T = \pi$.
- Είναι περιττή, με κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$.
- Έχει (κατακόρυφες) ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ακρότατα δεν έχει καθότι είναι γνησίως αύξουσα.



Βασικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

$$f(x) = \cot(x)$$

- Πεδίο ορισμού: $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Είναι περιοδική, με περίοδο $T = \pi$.
- Είναι περιττή, με κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$.
- Έχει (κατακόρυφες) ασύμπτωτες τις ευθείες $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$. Ακρότατα δεν έχει καθότι είναι γνησίως φθίνουσα.



Σημείωση: Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \tan(\omega x)$ και $f(x) = \rho \cot(\omega x)$ δεν έχουν ακρότατα και είναι περιοδικές με $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση $2\sin(x) - 1 = 0$.

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση $2\sin(x) - 1 = 0$.

Λύση: Έχουμε

$$2\sin(x) - 1 = 0 \iff \sin(x) = \frac{1}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα $\cos(\frac{5\pi}{12})$ και $\sin(\frac{25\pi}{6})$.

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα $\cos(\frac{5\pi}{12})$ και $\sin(\frac{25\pi}{6})$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 3

Αν $\sin(\omega) = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Άσκηση 3

Αν $\sin(\omega) = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση: Έχουμε

$$\cos^2(\omega) = 1 - \sin^2(\omega) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \left(\frac{9}{25}\right) = \frac{16}{25}.$$

Καθότι $90^\circ < \omega < 180^\circ$, έχουμε $\cos(\omega) < 0$ άρα

$$\cos(\omega) = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Επίσης,

$$\tan(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

και

$$\cot(\omega) = \frac{1}{\tan(\omega)} = -\frac{4}{3}.$$

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση $\sin(2x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση $\sin(2x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Λύση: Έχουμε

$$\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = 2\kappa\pi + x - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 2\kappa\pi - x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = -2\kappa\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = -2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άσκηση 5

Δείξτε ότι $\frac{\sin(2a)}{1+\cos(2a)} \cdot \frac{\cos(a)}{1+\cos(a)} = \tan\left(\frac{a}{2}\right).$

Άσκηση 5

Δείξτε ότι $\frac{\sin(2a)}{1+\cos(2a)} \cdot \frac{\cos(a)}{1+\cos(a)} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2a)}{1+\cos(2a)} \cdot \frac{\cos(a)}{1+\cos(a)} &= \frac{2\sin(a)\cos(a)}{2\cos^2(a)} \cdot \frac{\cos(a)}{1+\cos(a)} \\ &= \frac{\sin(a)}{1+\cos(a)} = \frac{2\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{a}{2})}{2\cos^2(\frac{a}{2})} = \frac{\sin(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{a}{2})} = \tan\left(\frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Να λυθεί η εξίσωση $2 - \sin^2(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$

Άσκηση 6

Να λυθεί η εξίσωση $2 - \sin^2(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$

Λύση: Έχουμε

$$2 - \sin^2(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2}) \iff 2 - \sin^2(x) = 1 + \cos(x)$$

$$\iff 2 - (1 - \cos^2(x)) = 1 + \cos(x) \iff \cos^2(x) - \cos(x) = 0$$

$$\iff \cos(x)(\cos(x) - 1) = 0 \iff \cos(x) = 0 \text{ ή } \cos(x) = 1$$

$$\iff x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$