

Υπόδειγμα Αναπροσαρμογής Επιτοκίων

- Υπόδειγμα αναπροσαρμογής του ανοίγματος των επιτοκίων βασισμένο στις λογιστικές αξίες
- Διαφέρει από το υπόδειγμα των ληκτοτήτων με βάση τις τρέχουσες αξίες (αξίες αγοράς) και το υπόδειγμα της σταθμισμένης διάρκειας.



Άνοιγμα Αναπροσαρμογής Επιτοκίου

- Ευαισθησία των επιτοκίων σημαίνει αναπροσαρμογή με βάση τα τρέχοντα επιτόκια της αγοράς
- Το άνοιγμα αναπροσαρμογής επιτοκίου είναι η διαφορά μεταξύ του εισοδήματος που κερδίζεται από τα στοιχεία του ενεργητικού και της επιτοκιακής δαπάνης που καταβάλλεται για τα στοιχεία του παθητικού
- Κίνδυνος αναχρηματοδότησης
- Κίνδυνος επανεπένδυσης



Κλιμάκια Ληκτότητας

- Οι εμπορικές τράπεζες οφείλουν να αναφέρουν τα ανοίγματα αναπροσαρμογής των επιτοκίων για κάθε κλιμάκιο ληκτότητας ως εξής:
 - Μια ημέρα
 - Από 1 ημέρα μέχρι και 3 μήνες
 - Από 3 μήνες μέχρι και 6 μήνες
 - Από 6 μήνες μέχρι και 12 μήνες
 - Από 1 χρόνο μέχρι και 5 χρόνια
 - Πάνω από 5 χρόνια



Παράδειγμα Αναπροσαρμογής Ανοίγματος Επιτοκίου (εκατ. δολ.)

	<u>Ενεργ.</u>	<u>Παθητικό</u>	<u>Διαφ.</u>	<u>Αθροισ.</u> <u>Διαφορά</u>
1-ημέρα	\$ 20	\$ 30	\$-10	\$-10
>1ημ. -3μήνες	30	40	-10	-20
>3μην.-6μην.	70	85	-15	-35
>6 μην.-12μην.	90	70	+20	-15
>1χρον.-5χρον.	40	30	+10	-5
>5 χρόνια	10	5	+5	0



Εφαρμογή του Υποδείγματος Αναπροσαρμογής

$$\Delta \text{NII}_i = (\text{GAP}_i) \Delta R_i = (\text{RSA}_i - \text{RSL}_i) \Delta R_i$$

- Παράδειγμα I:

Αν το άνοιγμα (έλλειμμα) της μίας ημέρας είναι \$10 εκατ. και τα επιτόκια αυξάνουν κατά 1%

$$\Delta \text{NII}_{(1)} = (-\$10 \text{ εκατ.}) \times 0,01 = -\$100.000$$



Εφαρμογή του Υποδείγματος Αναπροσαρμογής

- Παράδειγμα II:

Αν λάβουμε το αθροιστικό άνοιγμα του ενός έτους

$$\begin{aligned}\Delta NII &= (CGAP) \Delta R = (-\$15 \text{ εκατ.})(0,01) \\ &= -\$150.000\end{aligned}$$



Στοιχεία Ενεργητικού Ευαίσθητα στις Μεταβολές των Επιτοκίων

- Παραδείγματα από ένα υποθετικό ισολογισμό:
 - Βραχυπρόθεσμα καταναλωτικά δάνεια. Αναπροσαρμόζονται στο τέλος του χρόνου και εντάσσονται στο κλιμάκιο 1 έτους
 - Τρίμηνα έντοκα γραμμάτια Δημοσίου. Αναπροσαρμόζονται κατά τη λήξη τους μετά από 3 μήνες
 - Εξάμηνα γραμμάτια. Αναπροσαρμόζονται κατά τη λήξη τους μετά από 3 μήνες
 - Ενυπόθηκα δάνεια με κυμαινόμενο επιτόκιο. Αναπροσαρμόζονται (το επιτόκιο) κάθε 9 μήνες



Στοιχεία Παθητικού Ευαίσθητα στις Μεταβολές των Επιτοκίων

- Τα στοιχεία του παθητικού εντάσσονται στις ίδιες κλίμακες ληκτότητας
- Οι καταθέσεις όψεως απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή
 - Γενικά θεωρούνται μη ευαίσθητες στις μεταβολές των επιτοκίων (δρουν ως βασικές καταθέσεις) αλλά υπάρχουν επιχειρήματα για την ένταξη τους ως υποχρεώσεις που είναι ευαίσθητες στις μεταβολές των επιτοκίων



Αθροιστική Διαφορά Αναπροσαρμογής Επιτοκίου

- Η αποτύπωση του CGAP ως δείκτη
CGAP/Σύνολο ενεργητικού
μπορεί να αποβεί χρήσιμη
 - Δείχνει την κατεύθυνση της έκθεσης σε κίνδυνο επιτοκίου
 - Δείχνει το μέγεθος της έκθεσης
- Παράδειγμα:
 - $CGAP/A = \$15 \text{ εκατ.} / \$270 \text{ εκατ.} = 0,056 \text{ ή } 5,6\%$



Ίσες Μεταβολές Επιτοκίων των Ευαίσθητων Στοιχείων Ενεργητικού και Παθητικού

- Παράδειγμα: Έστω ότι τα επιτόκια των ευαίσθητων στοιχείων ενεργητικού και παθητικού αυξάνονται κατά 1%. Η αναμενομένη ετήσια μεταβολή του καθαρού επιτοκιακού εισοδήματος θα είναι:

$$\begin{aligned}\Delta \text{NII} &= \text{CGAP} \times \Delta R \\ &= \$15 \text{ εκατ.} \times 0,01 \\ &= \$150.000\end{aligned}$$

- Όταν το CGAP είναι θετικό, τα επιτόκια και το καθαρό επιτοκιακό εισόδημα (NII) κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση
- Μεταβάλλονται αναλογικά του CGAP



Άνισες Μεταβολές των Επιτοκίων

- Αν οι μεταβολές στα επιτόκια των ευαίσθητων στοιχείων ενεργητικού και παθητικού δεν είναι ίσες τότε μεταβάλλεται η διαφορά. Στην περίπτωση αυτή:

$$\Delta NII = (RSA \times \Delta R_{RSA}) - (RSL \times \Delta R_{RSL})$$



Άνισες Μεταβολές των Επιτοκίων

- Παράδειγμα της επίδρασης διαφοράς επιτοκίου:
Το επιτόκιο των ευαίσθητων στοιχείων ενεργητικού αυξάνεται κατά 1,2% και εκείνων του παθητικού κατά 1,0%

$$\begin{aligned}\Delta NII &= \Delta \text{επιτοκιακού εισοδήματος} - \Delta \text{επιτοκιακής δαπάνης} \\ &= (\$155 \text{ εκατ.} \times 1,2\%) - (\$155 \text{ εκατ.} \times 1,0\%) \\ &= \$310.000\end{aligned}$$



Αναδιάρθρωση Ενεργητικού και Παθητικού

- Ένα ΧΙ μπορεί να αναδιαρθρώσει το ενεργητικό και το παθητικό του, εντός και εκτός ισολογισμού, προκειμένου να επωφεληθεί από τις προβλεπόμενες μεταβολές των επιτοκίων
 - Αν το άνοιγμα είναι θετικό: Η αύξηση των επιτοκίων αυξάνει το καθαρό επιτοκιακό εισόδημα
 - Αν το άνοιγμα είναι αρνητικό: Η μείωση των επιτοκίων αυξάνει το καθαρό επιτοκιακό εισόδημα



Αναδιάρθρωση του Ανοίγματος

- Παράδειγμα: Harleysville Savings Financial Corporation στα τέλη του 2008
 - Το άνοιγμα 1 έτους ήταν 1,45%
 - Το άνοιγμα των 3 ετών ήταν 3,97%
 - Αν τα επιτόκια αυξάνονταν το 2009, η εταιρία θα παρουσίαζε σημαντικές αυξήσεις στο καθαρό επιτοκιακό της εισόδημα
- Πρόσφατα, οι εμπορικές τράπεζες μείωσαν τα ανοίγματα για να μειώσουν τον επιτοκιακό τους κίνδυνο.



Αδυναμίες του Υποδείγματος Αναπροσαρμογής

- Αδυναμίες:
 - Αγνοεί την επίδραση της μεταβολής των επιτοκίων στις αξίες της αγοράς
 - Υπεραπλούστευση
 - ♦ Δεν λαμβάνει υπόψη την κατανομή των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού εντός των διαφόρων κλιμακίων ρευστότητας
 - ♦ Οι αναντιστοιχίες εντός των επιμέρους κλιμακίων μπορεί να είναι σημαντικές
 - Αδυνατεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα των μαζικών ροών εκταμιεύσεων και προπληρωμών, των ευαίσθητων στις μεταβολές επιτοκίου στοιχείων του ενεργητικού και του παθητικού
 - ♦ Οι τράπεζες δημιουργούν και αποσύρουν συνεχώς καταναλωτικά και ενυπόθηκα δάνεια
 - ♦ Οι ροές μπορεί να είναι ευαίσθητες στις μεταβολές των επιτοκίων



Αδυναμίες του Υποδείγματος Αναπροσαρμογής

- Δεν περιλαμβάνονται οι ταμειακές ροές των δραστηριοτήτων από τα στοιχεία εκτός ισολογισμού
 - Οι επιπτώσεις της αντιστάθμισης στα στοιχεία εκτός ενεργητικού δεν αποτυπώνονται
 - Παράδειγμα: Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης



ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

11- 17

➤ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ DURATION GAP



Κίνδυνος Επιτοκίου: Σχέση τιμής και απόδοσης ομολόγων

- **Θεώρημα 1.** Η τιμή (αξία) της ομολογίας κυμαίνεται αντίστροφα με την απόδοσή της.
- **Θεώρημα 2.** Όσο μεγαλύτερη η διάρκεια της ομολογίας τόσο μεγαλύτερη η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της, όταν αλλάζει η απόδοσή της.
- **Θεώρημα 3.** Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής αυξάνει με την χρονική διάρκεια με φθίνοντα ρυθμό



Κίνδυνος Επιτοκίου: Σχέση τιμής και απόδοσης ομολόγων

- **Θεώρημα 4.** Κρατώντας την χρονική διάρκεια σταθερή και ξεκινώντας από το ίδιο μέγεθος επιτοκίων, μια ίση άνοδος και πτώση του επιτοκίου δεν επιφέρει την ίδια ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή. Η πτώση των επιτοκίων επιφέρει μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή.
- **Θεώρημα 5.** Κρατώντας την ημερομηνία λήξεως σταθερή και ξεκινώντας με το ίδιο επιτόκιο, όσο μεγαλύτερο το τοκομερίδιο, τόσο μικρότερη η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής των ομολογιών από μια δεδομένη μεταβολή στο επιτόκιο.



Κίνδυνος Επιτοκίου: Σχέση τιμής και απόδοσης ομολόγων

- **Θεώρημα 5**. Κρατώντας την ημερομηνία λήξεως σταθερή και ξεκινώντας με το ίδιο επιτόκιο, όσο μεγαλύτερο το τοκομερίδιο, τόσο μικρότερη η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής των ομολογιών από μια δεδομένη μεταβολή στο επιτόκιο.

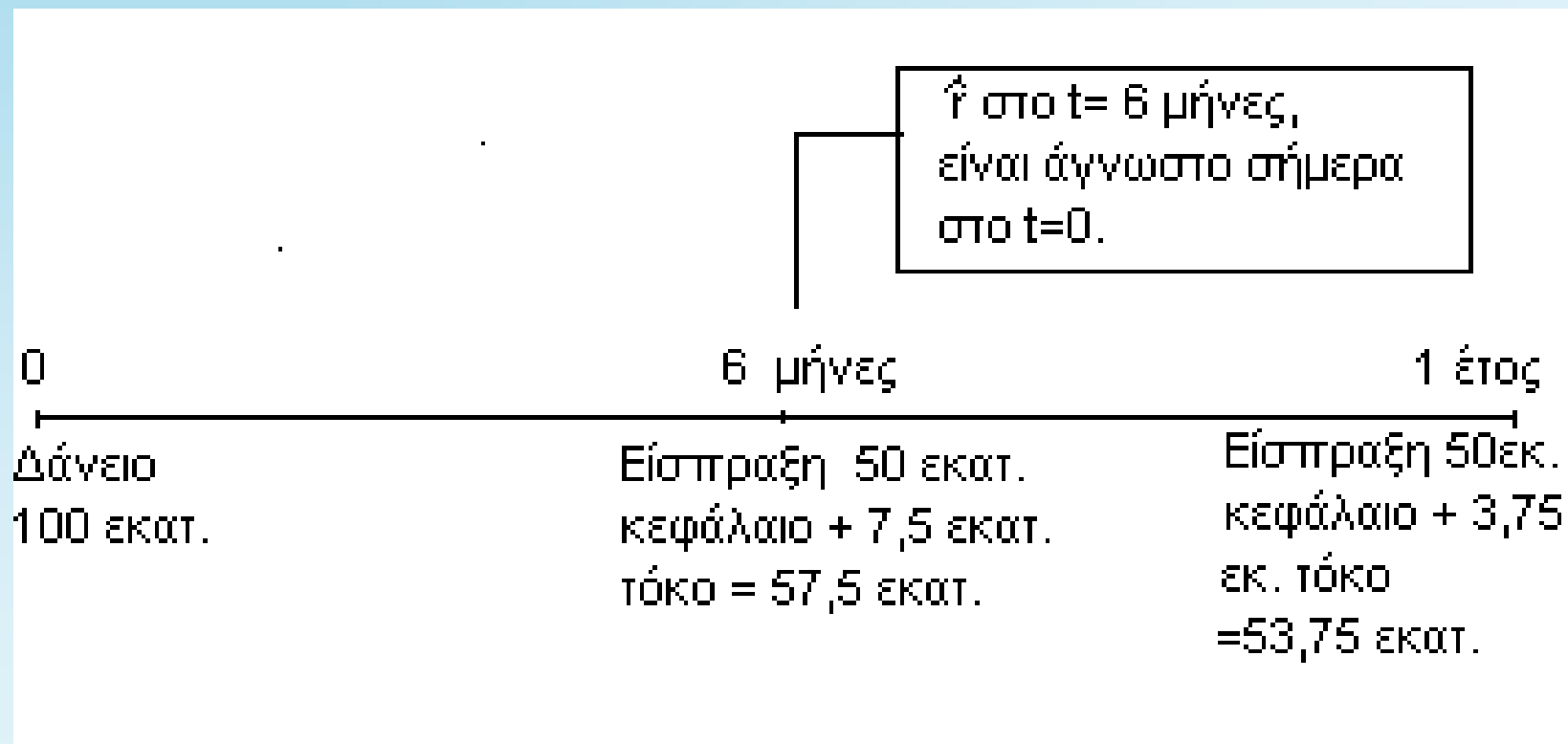


Κίνδυνος Επιτοκίου χρηματοπιστωτικού ιδρύματος

- Καθαρή Θέση = [Ενεργητικό] - [Υποχρεώσεις]
- Αν $M_A > M_L$, αύξηση του επιτοκίου, συνεπάγεται μείωση της Κ.Θ.
- Αν $M_A < M_L$, αύξηση του επιτοκίου, συνεπάγεται αύξηση της Κ.Θ.

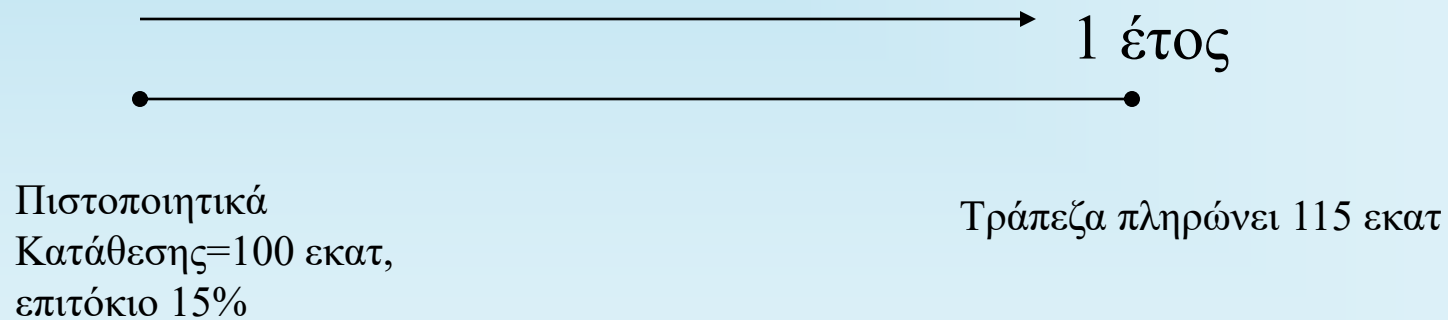


Κίνδυνος Επιτοκίου χρηματοπιστωτικού ιδρύματος

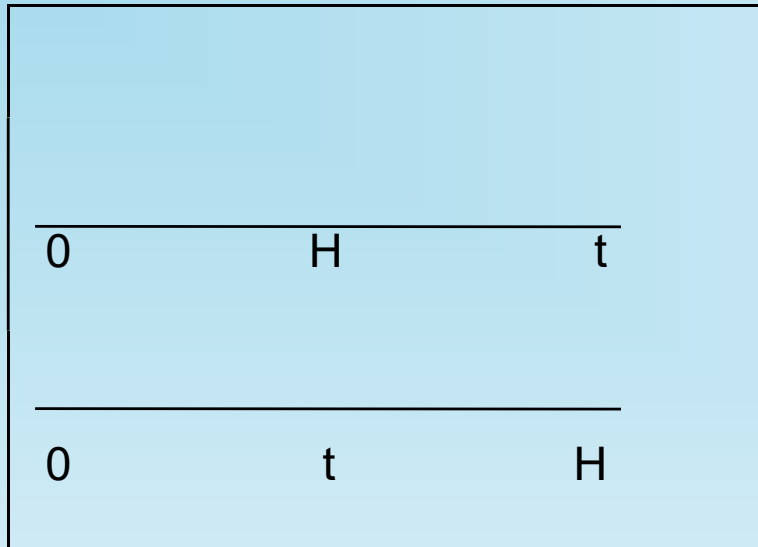


Κίνδυνος Επιτοκίου χρηματοπιστωτικού ιδρύματος

- Απλό παράδειγμα με μηδενική καθαρή θέση για να μελετήσουμε κέρδη ή ζημίες από αντίξοχη μεταβολή επιτοκίου όταν $M_A = M_L$



Κίνδυνος Επιτοκίου



? κίνδυνος αλλαγής τιμής

? κίνδυνος επανεπένδυσης

Θεωρούμε ότι οι μεταβολές στα επιτόκια ισχύουν τουλάχιστον έως και το τέλος του επενδυτικού ορίζοντα H.



Duration

$$\begin{aligned}
 T_H &\equiv \sum_{t=1}^M C_t V_{H,t} \Rightarrow \Delta T_H = \sum_{t=1}^M C_t V_{H,t} \left(\frac{\Delta V_{H,t}}{V_{H,t}} \right) = \sum_{t=1}^M C_t V_{H,t} (H - t) \frac{\Delta r}{1 + r} \\
 \Rightarrow \frac{\Delta T_H}{T_H} &= \left[\frac{H \sum_{t=1}^M C_t V_{H,t}}{T_H} - \frac{\sum_{t=1}^M t \cdot C_t \cdot V_{H,t}}{T_H} \right] \cdot \frac{\Delta r}{1 + r} = \left[H - \sum_{t=1}^M t \cdot \left(\frac{C_t \cdot V_{H,t}}{T_H} \right) \right] \cdot \frac{\Delta r}{1 + r} = \\
 &= \left[H - \sum_{t=1}^M w_t \cdot t \right] \cdot \frac{\Delta r}{1 + r}
 \end{aligned}$$



Όπου...

$$w_t \equiv \frac{C_t V_{H,t}}{T_H} = \frac{(1+r)^{-H} C_t V_{H,t}}{(1+r)^{-H} T_H} = \frac{C_t V_{0,t}}{T_0}$$



Δείκτης Σταθμισμένης Διάρκειας aka Duration

Ο όρος $\sum_{t=1}^M w_t \cdot t$ ονομάζεται δείκτης σταθμισμένης διάρκειας ή Duration. Ο επενδυτής για να απαλείψει τον κίνδυνο αλλαγής των επιτοκίων, θα πρέπει να θέσει $\left(\frac{\Delta T_H}{T_H} = 0 \right)$ ή $H = \sum_{t=1}^M t \cdot w_t$.



Συμπέρασμα

- Αν $D < H$, η μεταβολή της αξίας λόγω ανατοκισμού υπερσχύει της αντίθετης μεταβολής της τιμής του εναπομένοντος χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου H , και η αξία του χαρτοφυλακίου μεγαλώνει όσο αυξάνεται το επιτόκιο
- Αν $D > H$, συμβαίνει το αντίστροφο. Η αξία του χαρτοφυλακίου μειώνεται όσο αυξάνεται το επιτόκιο.



Μεταβολή της αξίας ομολόγου σε σχέση με το επιτόκιο

Όταν $H=0$, τότε: $\frac{\Delta T_H}{T_H} = -\left(\sum_{t=1}^M w_t \cdot t\right) \cdot \frac{\Delta r}{1+r}$. Η ποσοστιαία αλλαγή της

σημερινής τιμής του χαρτοφυλακίου είναι ανάλογη της σταθμισμένης διάρκειας.



Duration

- Η σταθμισμένη διάρκεια ορίζεται ως το σταθμισμένο άθροισμα των περιόδων μέχρι την λήξη, με συντελεστή στάθμισης (κάθε περίοδου) την παρούσα αξία της χρηματοροής της περιόδου ως κλάσμα της τρέχουσας τιμής του στοιχείου.



Duration σαν ελαστικότητα

. Η τιμή ή τρέχουσα αξία της ομολογίας ορίζεται ως το άθροισμα της παρούσας αξίας των χρηματικών ροών της, ως εξής:

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+F}{(1+r)^M}$$

Η μεταβολή της αξίας του ομολόγου σε μια μικρή μεταβολή του επιτοκίου, dr , υπολογίζεται από την πρώτη παράγωγο της τιμής ως προς το επιτόκιο:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-C}{(1+r)^2} + \frac{-2C}{(1+r)^3} + \dots + \frac{-M(C+F)}{(1+r)^{M+1}}$$



Duration σαν ελαστικότητα

Βγάζοντας κοινό παράγοντα:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r} \left[\frac{C}{(1+r)} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{M(C+F)}{(1+r)^M} \right]$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο της σταθμισμένης διάρκειας, διαπιστώνεται ότι :

$$D = \frac{1 \times \frac{C}{1+r} + 2 \times \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + M \times \frac{(C+F)}{(1+r)^M}}{P}$$



Duration σαν ελαστικότητα

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, συμπεραίνεται ότι η αλλαγή της τιμής και η σταθμισμένη διάρκεια της ομολογίας συνδέονται με την ακόλουθη σχέση :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r} [P \times D]$$

ή:

$$\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{dr}{1+r}} = -D$$



Υπολογισμός Σταθμισμένης Διάρκειας, Προσαρμοσμένης Σταθμισμένης Διάρκειας και Κυρτότητας για Ευρωμόλογο με $C=80$, $F=1.000$ και $M=6$ ($r=8\%$)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ t	ΧΡΗΜΑΤΟ- ΡΟΗ CF_t	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ $V_{0,t}$	ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ $CF_t V_{0,t}$	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ $(1/P) \times CF_t V_{0,t}$ $=w_t$	(ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ) $\times$ (ΠΕΡΙΟΔΟ) $W_t t$	ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ $W_t t(t+1)$ $=CX$
1	80	$(1,08)^{-1} = 0,926$	74,07	0,07407	0,07407	0,14815
2	80	$(1,08)^{-2} = 0,857$	68,59	0,06859	0,13718	0,41152
3	80	$(1,08)^{-3} = 0,794$	63,51	0,06351	0,19053	0,76208
4	80	$(1,08)^{-4} = 0,735$	58,80	0,05880	0,23520	1,17605
5	80	$(1,08)^{-5} = 0,681$	54,45	0,05445	0,27225	1,63340
6	1.080	$(1,08)^{-6} = 0,630$	680,58	0,68058	4,08348	28,58449
ΑΘΡΟΙΣΜΑ			1.000,00		4,99271	32,71569
$D = 4,99271$, $MD=4,99271/(1,08)=4,62288$, $CX=32,71569/(1,08)^2=28,04843$						
$\Delta P/P \cong -MD \Delta r + (1/2)CX (\Delta r)^2$						



Duration σαν ελαστικότητα

Η ανωτέρω εξίσωση παρουσιάζει τη σταθμισμένη διάρκεια ως μέτρο της ελαστικότητας της αξίας της ομολογίας ως προς το επιτόκιο. Πιο χρήσιμη μορφή της εξίσωσης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dP}{P} = -D \left[\frac{dr}{1+r} \right]$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται και ισχύει για οποιοδήποτε στοιχείο έχει σταθερές μελλοντικές ροές



Ιδιότητες Duration

(α) Καθώς η διάρκεια έως τη λήξη, M , ενός στοιχείου σταθερού εισοδήματος αυξάνεται, αυξάνεται και η σταθμισμένη του διάρκεια, αλλά με φθίνοντα ρυθμό

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial M} > 0, \frac{\partial D^2}{\partial^2 M} < 0.$$

Έτσι εξηγούνται και τα Θεωρήματα 2 και 3 του Κεφαλαίου 5.4.

(β) Αν αυξηθεί το επιτόκιο (απαιτούμενη απόδοση), μειώνεται η σταθμισμένη διάρκεια ενός στοιχείου σταθερού εισοδήματος $\left(\frac{\partial D}{\partial r} < 0 \right)$.



Ιδιότητες Duration

- Παρατηρήσατε επίσης, ότι η ιδιότητα αυτή της σταθμισμένης διάρκειας εξηγεί το Θεώρημα 4. Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η αύξηση του επιτοκίου οδηγεί σε μικρότερη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής από μια αντίστοιχη μείωση.
- Ο λόγος είναι ότι όταν τα επιτόκια αυξάνονται, η σταθμισμένη διάρκεια μειώνεται, ενώ όταν μειώνονται, η σταθμισμένη διάρκεια αυξάνεται.



Ιδιότητες Duration

- (γ) Όσο μεγαλύτερο είναι το τοκομερίδιο, τόσο μικρότερη είναι η σταθμισμένη διάρκεια μιας ομολογίας. Αυτό συμβαίνει γιατί ο επενδυτής εισπράττει έτσι γρηγορότερα, σε όρους παρούσας αξίας, τα χρήματά του. Έτσι εξηγείται και το Θεώρημα 5.



Υπολογισμός της duration για διηνεκή ομολογία

Ποια είναι η τιμή P , και ποια είναι η σταθμισμένη διάρκεια, D , εντόκου γραμματίου που πληρώνει 1 εκατ. ευρώ το χρόνο και δε λήγει ποτέ, αν το επιτόκιο είναι 15%;

Λύση : Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την αξία διηνεκούς ομολογίας:

$$P = \frac{C}{r} \Rightarrow P = \frac{1\text{εκατ.}}{r} = \frac{1.000.000}{0,15} = 6.666.666,67 \text{ ευρώ}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι : $\frac{dP}{P} = -D \cdot \left(\frac{dr}{1+r} \right) \Rightarrow D = -\frac{dP / dr}{P} \cdot (1+r)$

$$\Rightarrow D = -\frac{-\frac{C}{r^2}}{\frac{C}{r}} \cdot (1+r) = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r} = 7,67 \text{ χρόνια.}$$

Ερώτηση : Γιατί η σταθμισμένη διάρκεια είναι πεπερασμένη, τη στιγμή που η διάρκεια έως τη λήξη είναι το άπειρο;



Duration Ομολογίας

Η τιμή της ομολογίας δίνεται από τον τύπο:

$$P = \frac{C}{r} \left[1 - (1 + r)^{-M} \right] + F \cdot (1 + r)^{-M}$$

Η σταθμισμένη διάρκεια δίνεται από τον τύπο :

$$D = \frac{1 + r}{r} - \frac{M \cdot (c - r) + (1 + r)}{(1 + r)^M \cdot c - (c - r)}$$



Duration ομολογίας τελικής απόδοσης (zero coupon ή deep discount bond)

- Για ομολογίες χωρίς τοκομερίδιο, ή για τα έντοκα γραμμάτια ελληνικού Δημοσίου, $C=c=0$.
- Συνεπώς, ο τύπος της σταθμισμένης διάρκειας απλοποιείται σε $D=M$, γεγονός που δεν πρέπει να μας εκπλήσσει μια και υπάρχει μόνο μια ροή, στη χρονική περίοδο $t + M$.
- Ο τύπος της τιμής, επίσης, απλοποιείται σε $P = F(1 + r)^{-M}$.
 -) Για ομολογίες που εκδίδονται στο άρτιο, $c=r$, ο τύπος της σταθμισμένης διάρκειας απλοποιείται σε : $D = \frac{1+r}{r} \cdot [1-(1+r)^{-M}]$ και ο τύπος της τιμής σε : $P=F$.



Duration ράντας

Παρατηρήσατε ότι αν σε μια ομολογία σταθερού επιτοκίου αφαιρέσουμε το ποσό της ονομαστικής αξίας, F , που προσφέρεται στη λήξη, τότε καταλήγουμε σε μια χρονική ροή.

Η παρούσα αξία μιας χρονικής ροής είναι : $P = \frac{C}{r} \cdot [1 - (1 + r)^{-M}] \Rightarrow$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{C}{r^2} [1 - (1 + r)^{-M}] + \frac{C}{r} \cdot M \cdot (1 + r)^{-M-1} \text{ Επομένως}$$

$$D = -\frac{1 + r}{P} \cdot \frac{dP}{dr} = \frac{1 + r}{\frac{C}{r} [1 - (1 + r)^{-M}]} \cdot \left\{ \frac{C}{r^2} [1 - (1 + r)^{-M}] - \frac{C}{r} \cdot M \cdot (1 + r)^{-M-1} \right\} = \dots =$$

$$= \frac{1 + r}{r} - \frac{M}{(1 + r)^M - 1}$$



Duration ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου

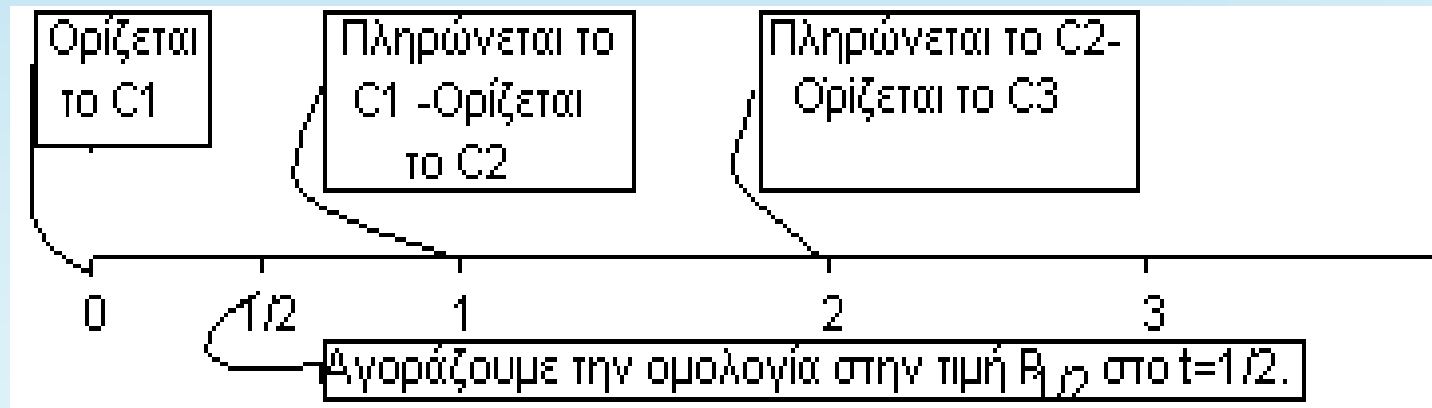
- Η σταθμισμένη διάρκεια σε δάνεια και ομολογίες των οποίων τα επιτόκια ή τοκομερίδια μεταβάλλονται διαχρονικά δεν υπολογίζονται με το συνηθισμένο τρόπο. Στην πλειονότητα αυτών των περιπτώσεων, η σταθμισμένη διάρκεια ισούται με τη χρονική περίοδο έως την αναπροσαρμογή του τόκου ή τοκομεριδίου.



Duration ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου

Έστω διηνεκής χρονική ροή με κυμαινόμενο επιτόκιο. Στην αρχή κάθε περιόδου, ανάλογα με το ύψος του επιτοκίου στην αγορά, καθορίζεται το τοκομερίδιο που θα πληρωθεί στο τέλος της περιόδου : $c_1 = C_1/F = r_0$, $c_2 = C_2/F = r_1$, $c_3 = C_3/F = r_2$, κ.ο.κ.

(Σχήμα 4):



Duration ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου

Έστω ότι ο επενδυτής αγοράζει τη διηνεκή ροή στο τέλος του πρώτου εξαμήνου $t=1/2$. Η τιμή της διηνεκούς ροής κατά την χρονική στιγμή $t=1/2$ είναι :

$$P_{1/2} = \frac{C_1}{(1 + r/2)} + \frac{1}{(1 + r/2)} \cdot \left[\frac{C_2}{(1 + r)} + \frac{C_3}{(1 + r)^2} + \dots \right]$$



Duration ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου

Αν τα τοκομερίδια αντανακλούν απόλυτα τις μεταβολές στο επιτόκιο, δηλαδή αν τα μελλοντικά $c_i = r_{i-1}$ $i = 2, 3, \dots$ τότε η αξία (τιμή) P_1 δεν επηρεάζεται από τις μελλοντικές μεταβολές του επιτοκίου, είναι δηλαδή γνωστή σε όρους παρούσας αξίας. Άρα:

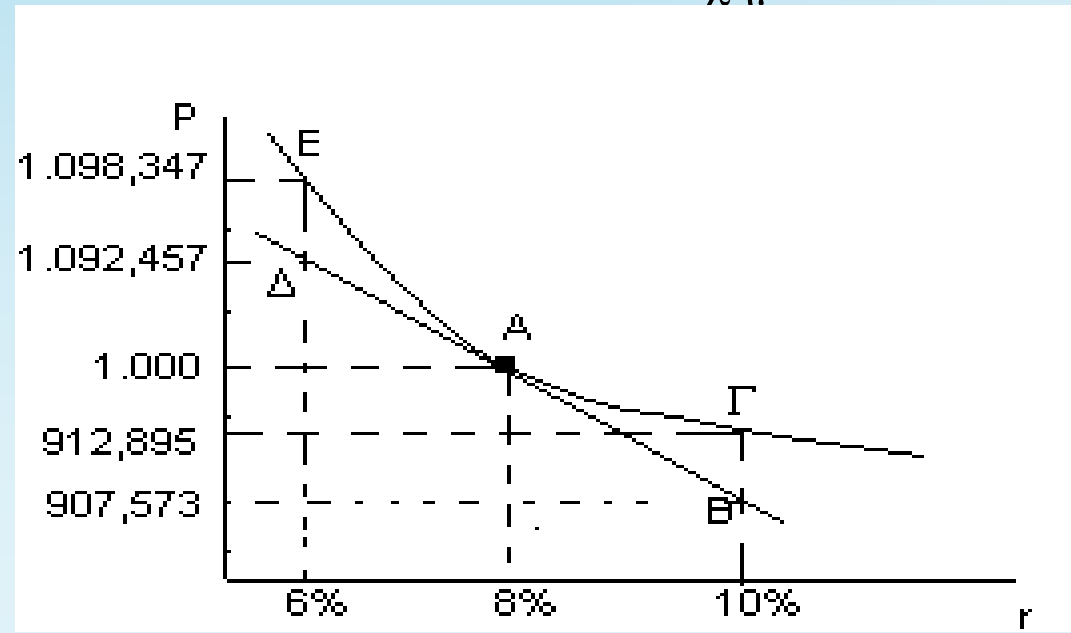
$$P_{1/2} = \frac{C_1}{(1 + r/2)} + \frac{P_1}{(1 + r/2)}$$



Κυρτότητα (convexity)

Παράδειγμα: Έστω ότι $r = 8\%$, έχουμε την ευρωομολογία του προηγούμενου παραδείγματος, όπου $c = 8\%$, $F = 1.000$ ευρώ, $P = 1.000$ ευρώ και $D = 4,99$ χρόνια.

Σχήμα 3



Convexity

Συνεπώς,

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} CX (\Delta r)^2 = -MD(\Delta r) + \frac{1}{2} CX (\Delta r)^2, \text{ όπου } MD = \frac{D}{1+r},$$

ονομάζεται προσαρμοσμένη σταθμισμένη διάρκεια (Modified Duration ή MD)



Convexity

Η κυρτότητα CX του εξαετούς ευρω-ομολόγου του Πίνακα 1 μπορεί να μετρηθεί με τις εξής δύο μεθόδους :

- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας :

$$CX \equiv \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{t=1}^6 w_t t(t+1) = \frac{1}{(1,08)^2} [(0,07407)(1)(2) + (0,06859)(2)(3) + (0,06351)(3)(4) + (0,05880)(4)(5) + (0,05445)(5)(6) + (0,68058)(6)(7)] = \frac{1}{(1,08)^2} \times 32,7157 = 28,0484$$



Ιδρύματος

Υπενθυμίζεται ότι η σταθμισμένη διάρκεια μιας ομολογίας είναι :

$$D = \left(\frac{\frac{C}{1+r}}{P} \right) \times 1 + \left(\frac{\frac{C}{(1+r)^2}}{P} \right) \times 2 + \dots +$$

$$\left(\frac{\frac{C}{(1+r)^{M-1}}}{P} \right) \times (M-1) + \left(\frac{\frac{C+F}{(1+r)^M}}{P} \right) \times M \equiv w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + \dots + w_{M-1} \times (M-1) + w_M \times$$



Εφαρμογή : Εξουδετέρωση Κινδύνου Επιτοκίου στον Ισολογισμό ενός Χρηματοπιστωτικού Ιδρύματος

Με την ίδια λογική, για το ενεργητικό και τις υποχρεώσεις ενός ΧΙ, ισχύει:

$$D_{\text{ενεργητικό}} = w_{1A} \cdot D_1^{(A)} + w_{2A} \cdot D_2^{(A)} + \dots + w_{NA} \cdot D_N^{(A)}$$

$$D_{\text{υποχρεώσεις}} = w_{1L} \cdot D_1^{(L)} + w_{2L} \cdot D_2^{(L)} + \dots + w_{NL} \cdot D_K^{(L)}$$

όπου w_{iA} και w_{iL} είναι η παρούσα αξία του στοιχείου i προς τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου, δηλαδή

$$w_{1A} + w_{2A} + \dots + w_{NA} = 1$$

$$w_{1L} + w_{2L} + \dots + w_{KL} = 1$$



Εφαρμογή : Εξουδετέρωση Κινδύνου Επιτοκίου στον Ισολογισμό ενός Χρηματοπιστωτικού Ιδρύματος

- Έστω $A \equiv$ αξία του ενεργητικού ενός ΧΙ, $L \equiv$ αξία των υποχρεώσεων, και $E \equiv$ αξία της καθαρής θέσης.
- Από την γνωστή ταυτότητα του ισολογισμού $A=L+E$ προκύπτει ότι $\Delta A = \Delta E + \Delta L$ $\Delta E = \Delta A - \Delta L$, όπου Δ είναι ο τελεστής διακριτής μεταβολής.



Εφαρμογή : Εξουδετέρωση Κινδύνου Επιτοκίου στον Ισολογισμό ενός Χρηματοπιστωτικού Ιδρύματος

Σύμφωνα με το υπόδειγμα της σταθμισμένης διάρκειας, οι ποσοστιαίες μεταβολές ενεργητικού και υποχρεώσεων είναι :

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_A \cdot \left(\frac{\Delta r_A}{1 + r_A} \right) \text{ και } \frac{\Delta L}{L} = -D_L \cdot \left(\frac{\Delta r_L}{1 + r_L} \right).$$



Εφαρμογή : Εξουδετέρωση Κινδύνου Επιτοκίου στον Ισολογισμό ενός Χρηματοπιστωτικού Ιδρύματος

Υποθέτοντας ότι το επίπεδο των επιτοκίων καθώς και οι μεταβολές τους είναι ίδια για τα στοιχεία του ενεργητικού και των υποχρεώσεων, δηλαδή ότι $r_a=r_L=r$ και $\Delta r_a=\Delta r_L=\Delta r$, προκύπτει:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta E &= [-D_A \cdot A + D_L \cdot L] \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right) = - \left[D_A - \frac{L}{A} D_L \right] \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right) = \\ &= -[D_A - k \cdot D_L] \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right) \quad \text{όπου} \quad k \equiv \frac{L}{A} < 1 \end{aligned} \right.$$

