

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕΡΟΣ Γ

DPs From Equity prices- Υπόδειγμα R.Merton

Υπόδειγμα KMV –Distance to Default

Υποδείγματα Δικαιωμάτων

- Χρησιμοποίηση μεθόδων αποτίμησης δικαιωμάτων για την αξιολόγηση του δικαιώματος αθέτησης
- Χρησιμοποιείται από την πλειονότητα των μεγάλων τραπεζών για την παρακολούθηση του πιστωτικού κινδύνου
- Το υπόδειγμα αυτό προσφέρεται από την KMV Corporation σε ευρεία κλίμακα



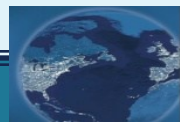
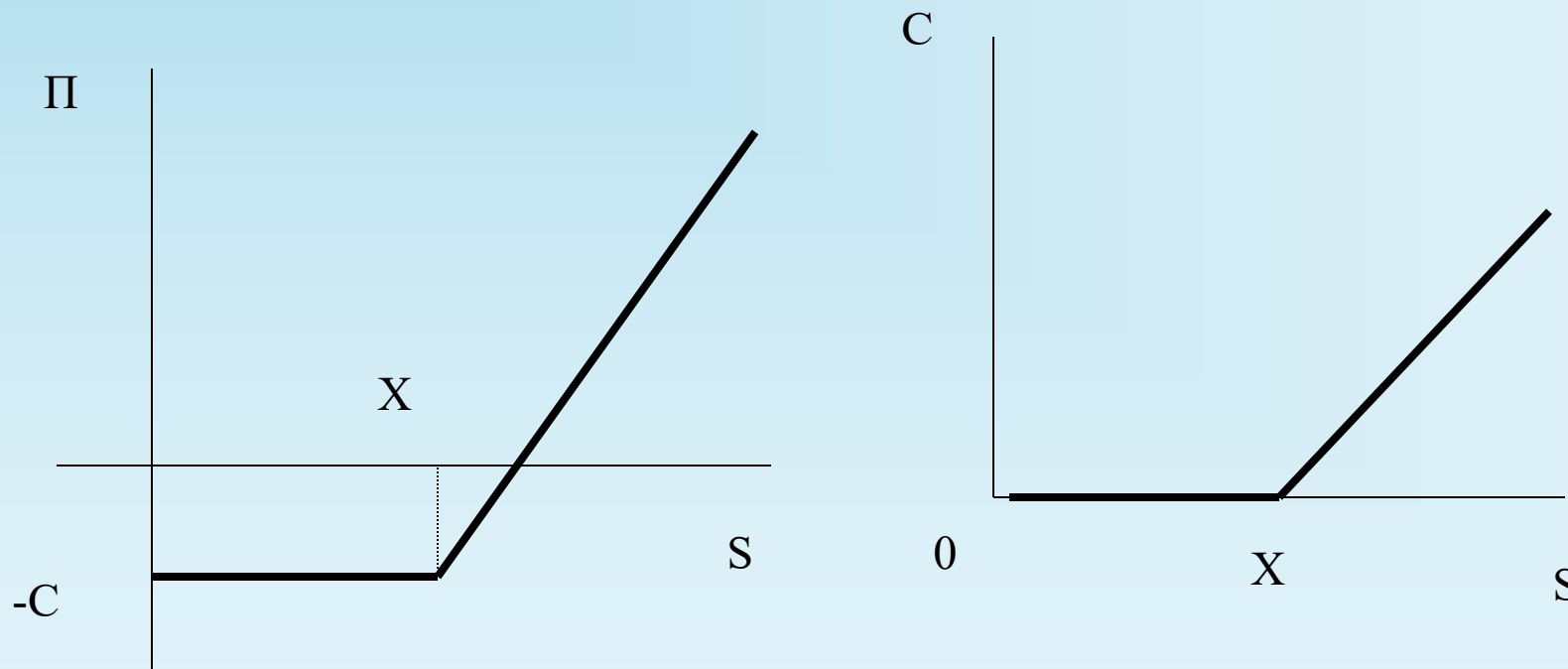
Διαρθρωτικά υποδείγματα

- Ε. Διαρθρωτικά υποδείγματα
 - Το υπόδειγμα του Merton (1974)
 - Το υπόδειγμα της KMV (Moody's)



Διαρθρωτικά υποδείγματα

- $C=f(S, T, X, r, \sigma_S)$ στη λήξη $C=\max(S-X,0)$, c = τιμή δικαιώματος αγοράς, S = αξία υποκείμενου (μετοχής), X = τιμή εξάσκησης, r = επιτόκιο χωρίς κίνδυνο



Διαρθρωτικά υποδείγματα

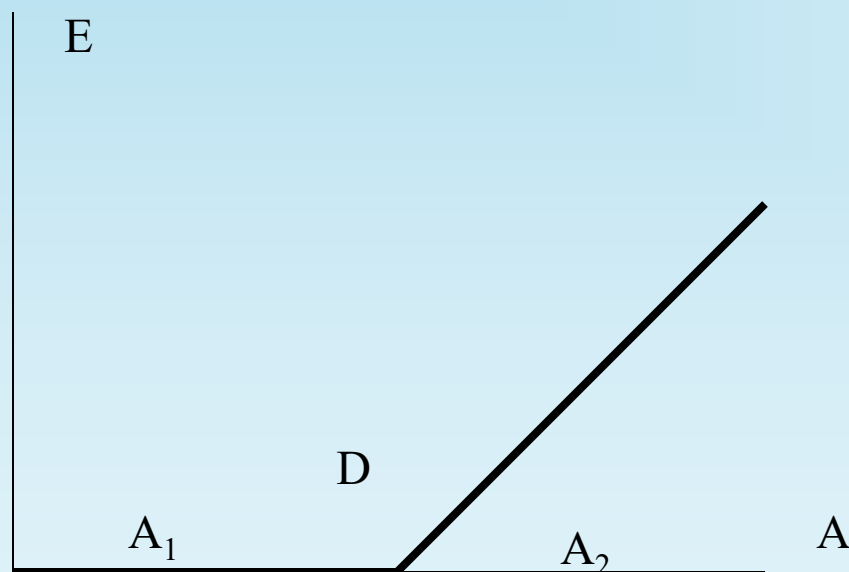
- Για κάθε (μοχλευμένη) εταιρεία που έχει συνάψει δάνειο του οποίου το κεφάλαιο (ονομαστική αξία) μαζί με τους τόκους είναι (στη λήξη) D και το οποίο λήγει σε χρόνο T , ισχύει:
- $A_T = S_T + D$, A = ενεργητικό σε τρέχουσα αξία
- S_T = αξία του μετοχικού κεφαλαίου σε τρέχουσα αξία



Διαρθρωτικά υποδείγματα

➤ Στη λήξη του δανείου αν $A_T = A_1$, $S_T = 0$

➤ Αν $A_T = A_2$, $S_T = A_2 - D$



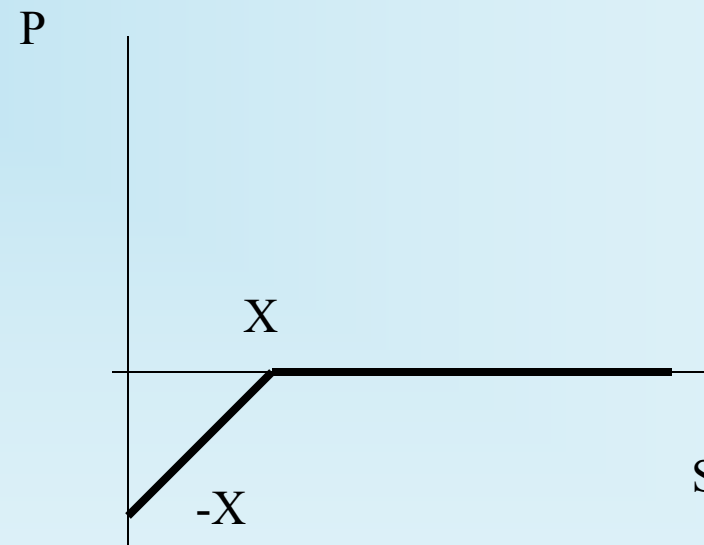
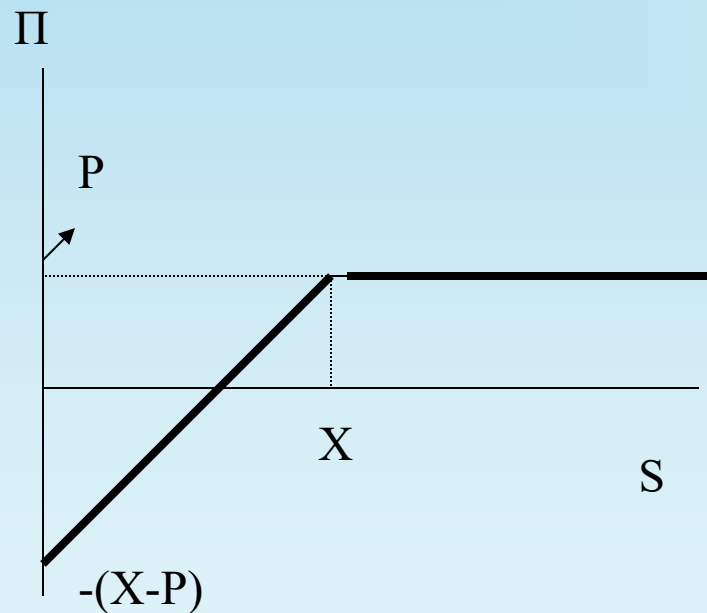
ΜΕΤΟΧΟΙ ΜΟΧΛΕΥΜΕΝΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

- Όταν η επιχείρηση δανείζεται χρήματα, στην ουσία περνάει στα χέρια των δανειστών (κατόχους των ομολογιών). Η θέση (χαρτοφυλάκιο) των μετόχων της αποτελείται (ισοδυναμεί) από την παρούσα αξία του δανείου (τιμή ομολογίας), καθώς και ένα δικαίωμα αγοράς που έχει υποκείμενο τίτλο την αξία του ενεργητικού της εταιρείας, τιμή εξάσκησης το ποσό του δανείου στην λήξη (ονομαστική αξία ομολογίας τελικής απόδοσης) και διάρκεια ίση με αυτή του δανείου
- Αξία μετοχικού κεφαλαίου: $S = \varphi(A, D, T, r, \sigma_A)$



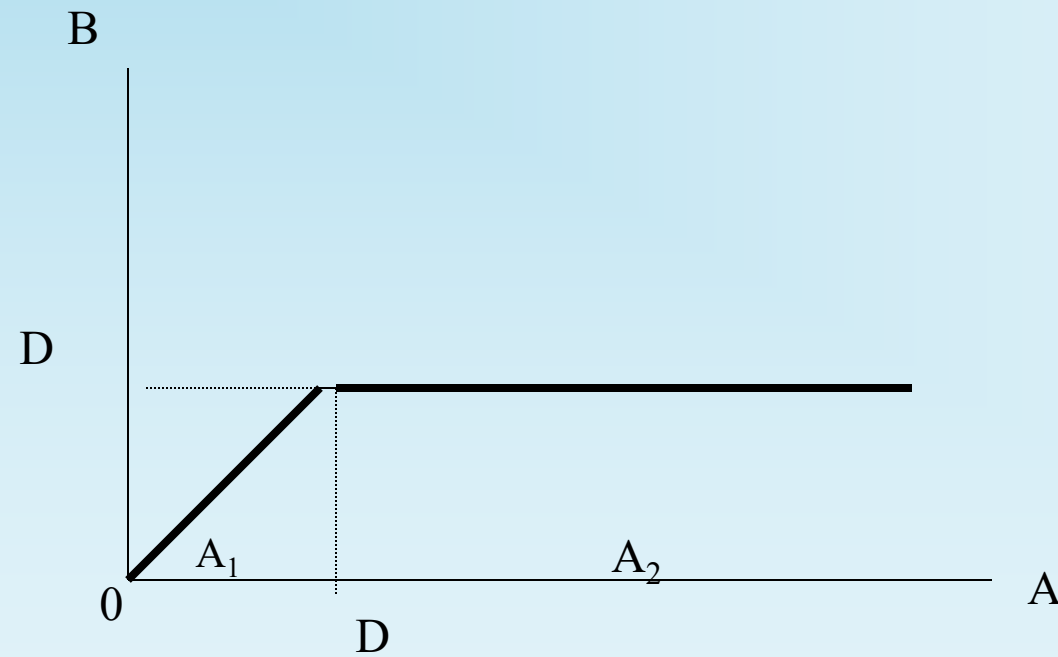
Διαρθρωτικά υποδείγματα

- $P = g(S, T, r, X, \sigma_S)$, $P = \max(X - S, 0)$ στη λήξη, P = τιμή δικαιώματος πώλησης,



Διαρθρωτικά υποδείγματα

- Αν $A_T = A_2$, $B_T = D$ αν $A_T = A_1$, $B_T = A_1$, $S=0$, όπου $B =$ αξία δανείου



ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΗΣ

11- 10

Στη λήξη: $\longrightarrow$	$S_T \leq X$	$S_T > X$
(Χαρ/κιο1:αγορά μετοχής) S	S_T	S_T
(Χαρ/κιο1:αγορά put) P	$X - S_T$	0
(Χαρ/κιο2: αγορά call) C	0	$S_T - X$
(Χαρ/κιο2: επένδ. σε ομολ. χωρίς κίνδυνο) $PV(X)$	X	X
Αξία Χαρ/κίου 1 & 2 στη λήξη	X	S_T



PUT-CALL PARITY

- Από τον πίνακα στη λήξη ισχύει: $S+P=C+X$
- και η ισορροπία arbitrage συνεπάγεται ότι πριν τη λήξη ισχύει:
 - $S+P=C+PV(X)$
- Αντίστοιχα για την μοχλευμένη εταιρεία
- $A+P=S+D$ (όπου S αντιστοιχούμε το A , όπου C το S και όπου X το D)
- $A+P=S+PV(D)$, $PV(D)=D/(1+r)$
- Αλλά $A=S+B$, όπου B η παρούσα αξία του D , με επιτόκιο προεξόφλησης την YTM, $B=De^{-yT}$
- $S+B+P=S+PV(D)$ και $B= PV(D) -P$



Γιατί;

- Γιατί δάνειο σε blue chip έχει χαμηλό επιτόκιο (απόδοση);
- In the money call vs out of the money put



A LENDER'S VALUE

- Οι δανειστές της επιχείρησης παίρνουν σε αντάλλαγμα των χρημάτων που έδωσαν μια ομολογία χωρίς κίνδυνο και την αξία ενός δικαιώματος πώλησης με υποκείμενο την αξία του ενεργητικού της εταιρείας (τιμή εξάσκησης X και διάρκεια, T , όπως στο call των μετόχων).

Αν, $A_T < D$ οι δανειστές λαμβάνουν στη λήξη του δανείου $A_T = D - (D - A_T)$

όπου $-(D - A_T)$ η αξία στη λήξη για τον πωλητή του δικαιώματος πώλησης $\max(0, X - S)$



MERTON'S NOBEL

- Το ποσοστό του δανείου που δεν θα εισπραχθεί (Loss Rate) καθορίζεται ενδογενώς και εξαρτάται από την αξία του ενεργητικού, την μεταβλητότητά του το επιτόκιο της αγοράς χωρίς κίνδυνο και την αξία του δανείου στη λήξη.
- Πιστωτικός κίνδυνος ισοδυναμεί με :
 - $\text{Prob}(A_T < D) > 0$
 - ή $B < De^{-rT}$
 - ή $\pi = y - r > 0$, όπου y = επιτόκιο δανείου και π = πριμ πιστωτικού κινδύνου



MERTON'S NOBEL

- Η οικονομική αξία του κινδύνου χρεοκοπίας είναι ίση με την αξία του put στην αξία του ενεργητικού
 - $B = PV(D) - P$
- Αν ο δανειστής αγοράσει ένα τέτοιο δικαίωμα πώλησης ($X=D$) τότε θα εισπράξει στη λήξη την ονομαστική αξία του δανείου με βεβαιότητα (πλήρης αντιστάθμιση του πιστωτικού κινδύνου)



MERTON'S NOBEL

Time	0	T	T
Value of assets	A_0	$A_T \leq D$	$A_T > D$
Make loan	$-B_0$	A_T	D
Buy put	$-P_0$	$D - A_T$	0
Total	$-B_0 - P_0$	D	D



Merton's model

- * Παρατηρούμε ότι:
- το put έχει *ceteris paribus*, μικρότερη αξία όταν το r αυξηθεί ($PV(X)$ μειώνεται).
- Επίσης ότι, αύξηση του r σημαίνει πιθανώς ανοδική οικονομία και συνεπώς χαμηλότερη πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Γιατί δάνειο σε εταιρία blue chip έχει χαμηλό επιτόκιο (απόδοση);
- In the money call vs out of the money put



Εφαρμογή της θεωρίας στην μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου

- Αν τα ίδια και τα δανειακά κεφάλαια υποτιμούνται στην δευτερογενή αγορά τότε το A θα είναι παρατηρήσιμη μεταβλητή και το υπόδειγμα του Merton άμεσα εφαρμόσιμο
- $A = S+B$.



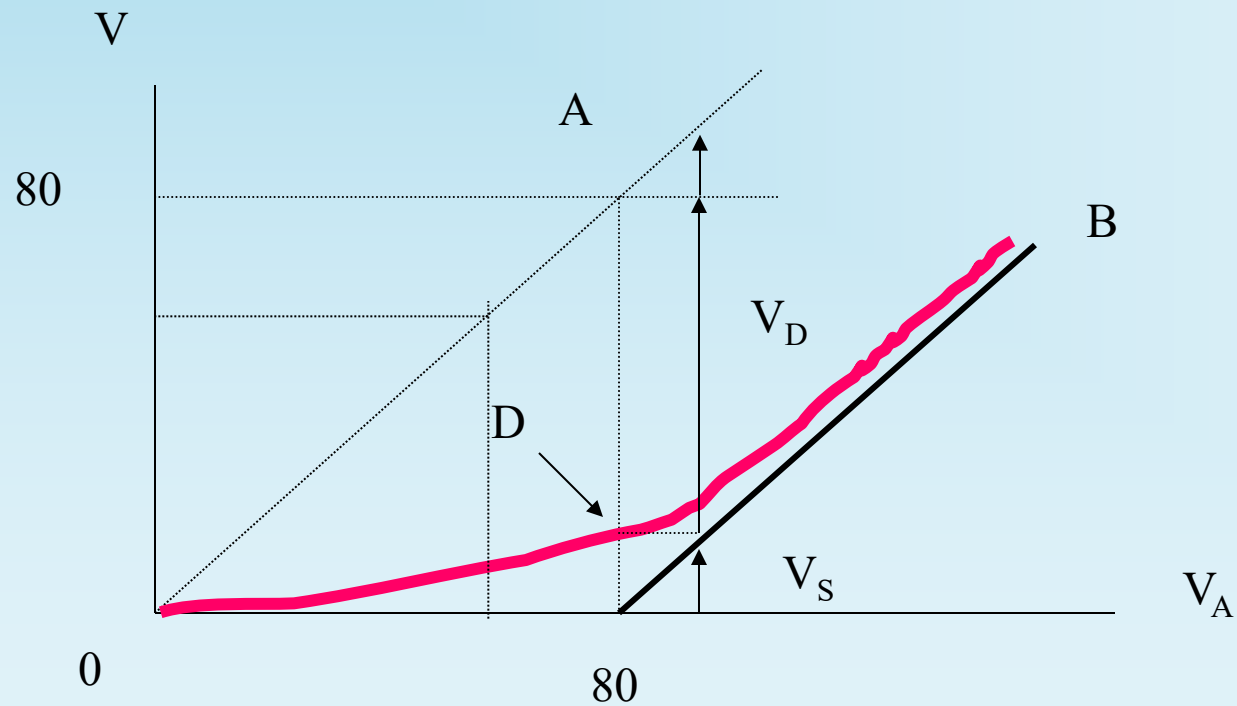
Αξία ενεργητικού, ιδίων και δανειακών κεφαλαίων και volatility

- Έστω ότι τρεις φίλοι δανείζονται 80 ν.μ. και επενδύοντας τα υπόλοιπα από δικά τους κεφάλαια ξεκινούν μια επένδυση χαρτοφυλακίου 100 ν.μ. για 2 χρόνια οπότε και θα ρευστοποιήσουν το χαρτοφυλάκιο Στον 1 χρόνο αξιολογούν την πορεία της επένδυσης για τυχόν αλλαγή στρατηγικής



Το παράδειγμα του μοχλευμένου χαρτοφυλακίου επενδύσεων

11-20



Αξία ενεργητικού, ιδίων και δανειακών κεφαλαίων και volatility:

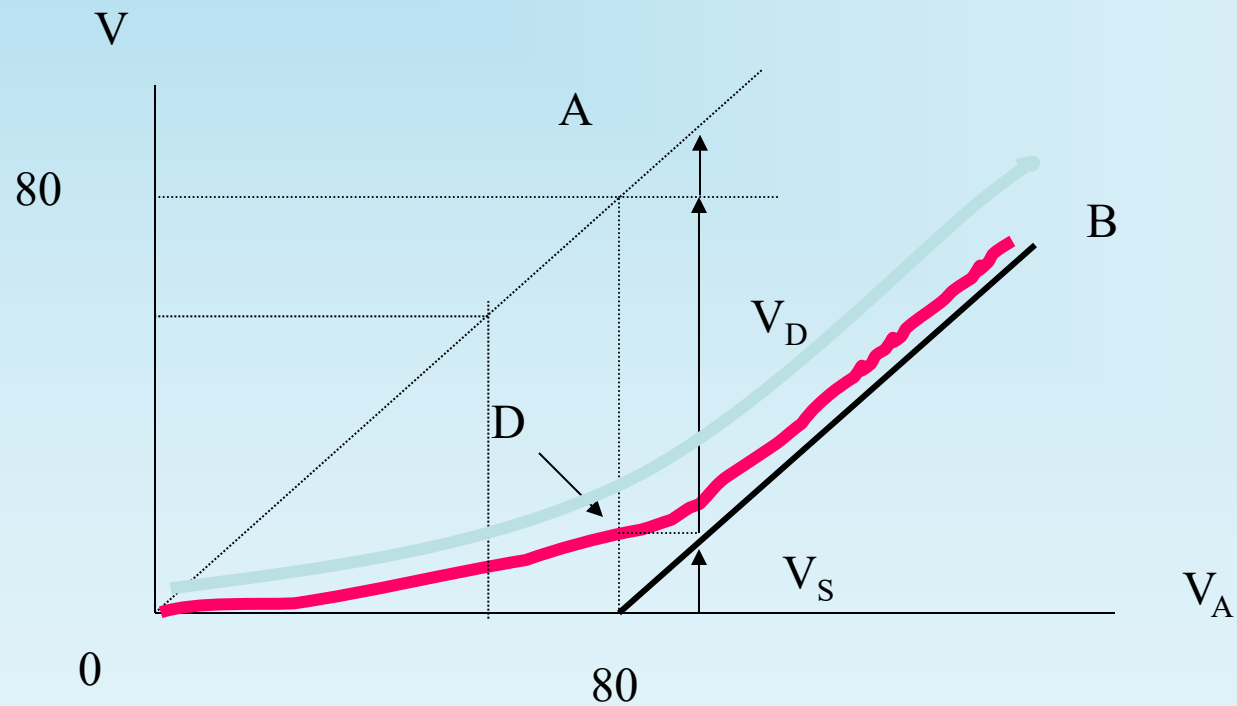
Ανάλυση με βάση τη θεωρία αποτίμησης δικαιωμάτων

- Έστω ότι η αξία του χαρτοφυλακίου είναι 80 (στο τέλος του έτους)
- Ποια είναι η αξία των ιδίων τους κεφαλαίων;
- Πώληση του χαρτοφυλακίου προς 80 και αγορά νέου χαρτοφυλακίου με υψηλότερη volatility (κοστίζει 80)
- Ποια η αξία των ιδίων κεφαλαίων τώρα;



Το παράδειγμα του μοχλευμένου χαρτοφυλακίου επενδύσεων

11- 22



Αξία ενεργητικού, ιδίων και δανειακών κεφαλαίων και volatility:

Ανάλυση με βάση τη θεωρία αποτίμησης δικαιωμάτων

- Από πού προέρχεται η αύξηση της αγοραίας αξίας των ιδίων κεφαλαίων;
- Αφού η αξία του ενεργητικού είναι 80 πρέπει να προέρχεται από μείωση της αξίας των δανειακών κεφαλαίων



Διακύμανση του Ενεργητικού και Μέτρηση του Πιστωτικού Κινδύνου

11- 24

	Anheuser-Busch	Compaq
Market value of assets	28,7	52,1
Default Point	5,4	4,3
Market Net worth	23,3	47,8
Asset Volatility	14%	33%
Default Probability per annum	0,02%	0,16%



KMV - Distance to DeDault

$$\text{➤ Distance to Default} = \frac{\text{MV Assets} - \text{Default Point}}{\text{MV Assets} \times \text{Asset Volatility}}$$



DD

- Η εταιρία Anheuser-Busch απέχει περίπου 5,8 STDs από το επίπεδο χρεοκοπίας
- Η εταιρία Compaq απέχει περίπου 2,8 STDs από το επίπεδο χρεοκοπίας



DD

- Η DD συνδυάζει 3 μεταβλητές κλειδιά για την μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου: την τρέχουσα αξία του ενεργητικού, τον επιχειρηματικό κίνδυνο και την δανειακή επιβάρυνση (μόχλευση).
- Οι τρεις μεταβλητές αντανακλούν τις επιδράσεις του τομέα τη οικονομίας του μεγέθους και του γενικότερου περιβάλλοντος στο οποίο δραστηριοποιείται η επιχείρηση.



DD

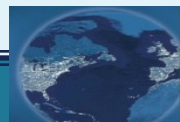
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας (PD) υπολογίζεται άμεσα από την απόσταση από την χρεοκοπία (DD) αν η κατανομή πιθανοτήτων της αξίας του ενεργητικού είναι γνωστή ή έμμεσα αν είναι γνωστό το ποσοστό χρεοκοπίας (the default rate) για δεδομένη DD



KMV's Credit Monitor™ and Expected DeDault Frequency- EDD™

11- 29

- Εκτίμηση της τρέχουσας αξίας και της μεταβλητότητας (τυπικής απόκλισης) του ενεργητικού από την τρέχουσα αξία και μεταβλητότητα του μετοχικού κεφαλαίου και την λογιστική αξία των υποχρεώσεων
- Υπολογισμός των DD και EDF



EDD

Chrysler	Motors	Jan 1998
Market value of equity	22.572 bn	Share Price X Shares
Book liabilities	49.056 bn	Balance sheet
Market value of assets	71.994 bn	Option pricing model
Asset Volatility	10%	Option pricing model
Default Point	36.993 bn	Liabilities payable 1 yr.
DD	4,8	$(72-37) / (72 \times 10\%)$
EDF 1 yr.	21 bp	Empirical mapping



KMV

- Υπολογίζει την εκτιμώμενη συχνότητα χρεοκοπίας (Estimated Default Frequency - EDF) που στην ουσία είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας στη βάση ενός υποδείγματος BLACK-SCHOLES-MERTON:
 - $dA = \mu A dt + \sigma_A A dz$
 - $S = N(d_1)A - De^{-rT} N(d_2)$
 - $\sigma_S = (A/S) N(d_1) \sigma_A$
- Η EDF αποτελεί μια εξειδικευμένη για κάθε επιχείρηση ποσοτική κατάταξη και είναι συνάρτηση της κεφαλαιακής διάρθρωσης και της αγοραίας αξίας και μεταβλητότητας του ενεργητικού.



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Τα γραφεία αξιολόγησης ομολόγων (bond rating agencies) όπως οι Standard & Poor's και οι Moody's χρησιμοποιούν διάφορες μεθοδολογίες για να αξιολογήσουν την πιστοληπτική ικανότητα των επιχειρήσεων. Οι πλέον συνήθεις είναι α) η χρήση οικονομετρικών/στατιστικών μεθόδων όπου τα χαρακτηριστικά των επιχειρήσεων χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της πιθανότητας χρεωκοπίας και β) θεωρητικά/μαθηματικά μοντέλα που δίνουν ενδείξεις για την επικινδυνότητα του εταιρικού χρέους. Και οι δύο μεθοδολογίες τελικά βοηθούν στην ομαδοποίηση των επιχειρήσεων σχετικά με το ρίσκο που αντιπροσωπεύουν.
- Εμείς θα δούμε ένα σημαντικό μοντέλο αντιπροσωπευτικό της δεύτερης κατηγορίας. Είναι μία εφαρμογή του υποδείγματος των Black & Scholes.
- Η εφαρμογή του μοντέλου γίνεται με την παραδοχή ότι η εταιρεία (περιορισμένης ευθύνης) έχει μόνο ένα τύπο χρέους που είναι ομόλογα zero coupon που λήγουν σε χρόνο T . Οι μέτοχοι της εταιρείας θα είναι πραγματικοί ιδιοκτήτες των κεφαλαίων της εταιρείας μόνο μετά την αποπληρωμή του χρέους.



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Επομένως θα θεωρήσουμε ότι οι μετοχές (S) στην εταιρεία μας δίνουν το δικαίωμα (call option) να αποκτήσουμε τα κεφάλαια (A) της εταιρείας αν αποπληρώσουμε το χρέος ($D=PAR$). Να θυμηθούμε την λογιστική εξίσωση $A = S + B$ όπου B είναι η παρούσα αξία του χρέους (D).
- Το υποκείμενο αγαθό του δικαιώματος απόκτησης (αγοράς) είναι τα συνολικά κεφάλαια της εταιρείας (A), η τιμή εξάσκησης X είναι D ($=PAR$) και ο χρόνος λήξης του δικαιώματος είναι ο χρόνος λήξης του χρέους T.
- Για την χρήση του υποδείγματος Black & Scholes θεωρούμε γνωστό το ακίνδυνο επιτόκιο (r) με συνεχή ανατοκισμό. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν μερίσματα (πρακτικά θεωρούμε ότι τα μερίσματα επενδύονται ξανά στην εταιρεία). Η αβεβαιότητα (σ) των μεταβολών στο υποκείμενο αγαθό αφορά τα συνολικά κεφάλαια (και όχι τις μετοχές όπως στα συνηθή δικαιώματα σε μετοχές).
- Σημείωση: οι συμβολισμοί της λογιστικής εξίσωσης προέρχονται από
 $A(\text{Value of the assets}) = S(\text{Stocks}) + B(\text{Bonds})$



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Υπενθυμίζουμε το παραδοσιακό υπόδειγμα Black & Scholes (BS) για το δικαίωμα αγοράς c Ευρωπαϊκού τύπου, ($X=D$):

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{με } d_1 = [\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T]/(\sigma\sqrt{T})$$

$$\text{και } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = [\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T]/(\sigma\sqrt{T})$$

- Το υπόδειγμα BS όπου η μετοχή είναι ένα δικαίωμα στα κεφάλαια (V) της εταιρείας (αν αποπληρωθεί το χρέος με $PAR=D$) είναι:

$$S = AN(d_1) - De^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{με } d_1 = [\ln(A/D) + (r + \sigma^2/2)T]/(\sigma\sqrt{T})$$

$$\text{και } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = [\ln(A/D) + (r - \sigma^2/2)T]/(\sigma\sqrt{T})$$

- Σε σχέση με το παραδοσιακό BS έγιναν οι αλλαγές: έχουμε την αξία του μετοχικού κεφαλαίου S στην θέση του δικαιώματος, έχουμε το ποσό D στην θέση της τιμής εξάσκησης, και τα συνολικά κεφάλαια V στην θέση του υποκείμενου αγαθού.
- Σε χρόνο T και αν $V>D$, αποπληρώνεται το χρέος D και οι μέτοχοι έχουν το A (ή πουλάνε το A και έχουν $A - D$), διαφορετικά έχουμε χρεωκοπία.



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

➤ Αριθμητικό παράδειγμα:

A	δ	D (=PAR)	r	σ	T	d1	N(d1)	d2	N(d2)
100	0	75	0.06	0.2	5	1.537704	0.937939	1.09049	0.862251

- Με το BS υπολογίζουμε τα d1, d2, κλπ. Και τελικά την αξία του call = S (και του put). Θυμηθείτε την λογιστική εξίσωση $A = S + B$ όπου B είναι η παρούσα αξία του χρέους, επομένως από τα A και S υπολογίζουμε B από την σχέση $B = A - S$. Φυσικά το B είναι η παρούσα αξία του D (προεξοφλημένου με επιτόκιο που περιλαμβάνει ένα πριμ για το ρίσκο).

	call = S = 45.88608		put = 1.44745
A = 100	S = 45.88608	B = 54.11392	risky rate = 0.065279

- Πως υπολογίσαμε το επιτόκιο (riskyrate) που περιέχει πριμ για το ρίσκο; Από το $B = D \exp(-\text{riskyrate} \cdot T)$ έχουμε $B/D = \exp(-\text{riskyrate} \cdot T)$ και τελικά $\text{riskyrate} = -[\ln(B/D)]/T$



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Άλλο παράδειγμα με μεγαλύτερη αβεβαιότητα “σ”

A	δ	D (=PAR)	r	σ	T	d1	N(d1)	d2	N(d2)
100	0	75	0.06	0.3	5	1.211475	0.887143	0.540655	0.705627

		call = S = 49.50872		put = 5.070087	
A = 100		S = 49.50872		B = 50.49128	
				riskyrate = 0.079137	

- Αν η αβεβαιότητα των μεταβολών στα κεφάλαια (A) αυξάνεται παρατηρούμε ότι η αξία του μετοχικού κεφαλαίου επίσης αυξάνεται ενώ η αξία του χρέους μειώνεται. Αν επομένως η διοίκηση της εταιρείας εκ προθέσεως αυξήσει την αβεβαιότητα (επικινδυνότητα) των επενδύσεων, αυξάνει την αξία των μετοχών εις βάρος της αξίας του χρέους (των δανειστών).



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Παράδειγμα με περισσότερο δανεισμό “D”



A	δ	D (=PAR)	r	σ	T	d1	N(d1)	d2	N(d2)
100	0	100	0.06	0.2	5	0.894427	0.814453	0.447214	0.67264

call = S = 31.61497		put = 5.696788	
A = 100	S = 31.61497	B = 68.38503	riskyrate = 0.076003

- Βλέπουμε οτι οταν η εταιρεια εχει περισσότερο οανεισμο, οπως είναι φυσικό, η αξία του μετοχικού κεφαλαίου είναι μικρότερη και η αξία των ομολόγων είναι μεγαλύτερη. Επίσης αυξάνεται το δανειστικό επιτόκιο (η αγορά ζητάει μεγαλύτερη απόδοση στο χρέος προκειμένου να δανείσει στην εταιρεία).



Το BS στην αποτίμηση μετοχών και χρέους

- Παράδειγμα με λιγότερο δανεισμό “D”

A	δ	D (=PAR)	r	σ	T	d1	N(d1)	d2	N(d2)
100	0	50	0.06	0.2	5	2.444351	0.992744	1.997138	0.977095

	call = S = 63.08195		put = 0.122862
A = 100	S = 63.08195	B = 36.91805	riskyrate = 0.060664

- Βλέπουμε ότι με λιγότερο δανεισμό η αξία του μετοχικού κεφαλαίου είναι μεγαλύτερη και η αξία των ομολόγων είναι μικρότερη. Επίσης το δανειστικό επιτόκιο μειώνεται (η αγορά αποδέχεται μικρότερη απόδοση στο χρέος προκειμένου να δανείσει στην εταιρεία).

