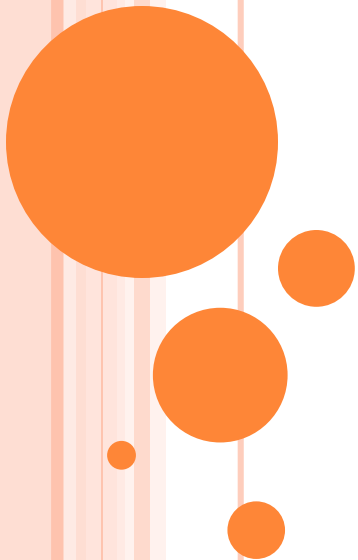


Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής
Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
Χρηματοοικονομική και Τραπεζική

ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μέρος 2ο



2.0 VENN DIAGRAMS

Στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών ενός προπτυχιακού προγράμματος, οι 100 φοιτητές του τμήματος δήλωσαν τα παρακάτω μαθήματα επιλογής:

- 28 δήλωσαν Οικονομετρία
- 31 δήλωσαν Λογιστική
- 42 δήλωσαν Παράγωγα
- 9 δήλωσαν **τουλάχιστον** Οικονομετρία και Λογιστική
- 10 δήλωσαν **τουλάχιστον** Οικονομετρία και Παράγωγα
- 6 δήλωσαν **τουλάχιστον** Λογιστική και Παράγωγα
- 4 δηλώσαν και τα 3 μαθήματα

Να απαντηθούν οι παρακάτω ερωτήσεις:

α. Πόσοι φοιτητές δεν δήλωσαν κανένα μάθημα;

β. Πόσοι φοιτητές πήραν Οικονομετρία αλλά όχι Λογιστική ή Παράγωγα;

γ. Πόσοι φοιτητές πήραν Οικονομετρία και Λογιστική αλλά όχι Παράγωγα;

2.0 VENN DIAGRAMS (CONTINUED)

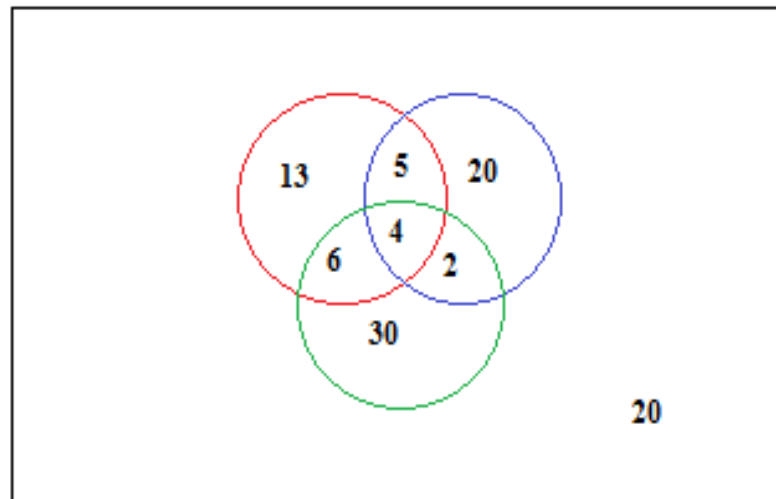
Απάντηση

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα Venn το οποίο απεικονίζει την παραπάνω εικόνα:

A: Οικονομετρία

B: Λογιστική

Γ: Παράγωγα



2.1 BASIC CONCEPTS

- **Statistical Experiment:** A well defined (!) procedure resulting to an outcome
 - This procedure can be repeated
 - The **set** of all **possible** outcomes is a priori known
 - The outcome of the experiment is not known beforehand
- **Δειγματικός Χώρος - Sample Space:** The set of all possible outcomes
- **Στοιχειώδες Ενδεχόμενο - Elementary Event:** any element of the Sample Space
- **Event:** Any set of elementary events
- **Complement (Συμπλήρωμα)** of an event, A , is the event that A does not occur. It is denoted by A'

2.2 NOTIONS OF PROBABILITY

- **Κλασική Πιθανότητα - Classical (a priori) Probability:**
 - Το **σχετικό μέγεθος** ενός ενδεχομένου, A , ως προς το μέγεθος του δειγματικού χώρου
 - Είναι μια θεωρητική έννοια
- **Σχετική Συχνότητα (Relative Frequency) – Εμπειρική Πιθανότητα (Empirical Probability)**
 - Ο λόγος των φορών που πραγματοποιείται (εμφανίζεται) ένα ενδεχόμενο ως προς το συνολικό αριθμό των παρατηρήσεων.
- **Υποκειμενική Πιθανότητα (Subjective Probability)**
 - Σχετίζεται με την πληροφορία που έχει ένα άτομο, και πώς την αξιοποιεί.

2.3 ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (INFORMAL)

- Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και στο 1 ($0 \leq P(A) \leq 1$).
- Αν ένα ενδεχόμενο, A , είναι «βέβαιο» τότε $P(A)=1$
- Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους (δηλαδή $A \cap B = \emptyset$) τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - **Σημείωση:** Η τομή $A \cap B$ για συντομία θα συμβολίζεται AB .

2.4 RELATIONSHIPS BETWEEN EVENTS

- Γενικά, όταν δεν γνωρίζουμε αν ισχύει ότι $A \cap B = \emptyset$,
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Ανεξαρτησία (independence): Two events are independent if
 - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
or equivalently
 - $P(B|A) = P(B)$ and $P(A|B) = P(A)$
where $P(B|A)$ (δεσμευμένη πιθανότητα) is the probability that B occurs given that A occurs too.
 - It holds that when $P(A)$ is not 0, $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$
Therefore $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.

Similarly, $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

These two relationships show the equivalence of the definitions of independence

- If A and B are not **independent** we say that they are **dependent**

2.5 BAYES' THEOREM AND THE LAW OF TOTAL PROBABILITY

- Combining the last two expressions of $P(AB)$ we have $P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$, therefore
 - $P(A|B) = (P(A)/P(B)) \times P(B|A)$ (Bayes' Theorem)
- For many events, $A_1, A_2, \dots, A_n, B$, we can obtain the general form of Bayes' Theorem

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) \times P(B|A_k)}$$

2.5 BAYES' THEOREM AND THE LAW OF TOTAL PROBABILITY (CONTINUED)

- If A is an event and $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ is a sequence of mutually disjoint events whose union is the sample space, then
$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n) + \dots$$
- If instead of the probabilities of the intersections we know the probabilities $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n), \dots$ and the probabilities $P(A|A_1), P(A|A_2), \dots, P(A|A_n), \dots$ as well, then the equivalent formula is
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \dots + P(A_n)P(A|A_n) + \dots$$

2.6 AXIOMS OF PROBABILITY (FORMAL)

Let Ω be the sample space. The probability is a function P which assigns a value between 0 and 1 (these values included) to (**some of the**) subsets of Ω .

- **Axiom 1:** For any subset A for which probability is assigned, $P(A) \geq 0$.
- **Axiom 2:** $P(\Omega) = 1$
- **Axiom 3:** For any sequence $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ of mutually exclusive events for which probabilities are assigned, then
$$P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } \dots \text{ or } A_n \text{ or } A_{n+1} \text{ or } \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) + \dots$$

Note:

- In many cases, we cannot (or we do not know if we can) assign a probability to any subset of Ω . However, we can show that there is a sufficiently wide class, F , of subsets of Ω on which we can assign a probability (in other words, we can assign a probability to any event A which belongs in this class). This class is a σ -algebra (σ -field).

What is a σ -algebra? It is a class, F , of subsets of a set Ω , whose elements (subsets of Ω) satisfy the following:

- Ω is an element of F .
- If the event A is an element of F , then its complement (A') is also an element of F .
- For any sequence $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ of elements of F , their union (i.e. the event described as $(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } \dots \text{ or } A_n \text{ or } A_{n+1} \text{ or } \dots)$ or $\bigcup_{n \in N} A_n$) is also an element of F .
- The triplet (Ω, F, P) is called: Probability Space (Χώρος Πιθανότητας)

2.7 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ (DISTRIBUTIONS)

- Aim at describing the probabilities of the occurrence of an event
 - in simple cases this is possible
 - in general this is not possible for any event but it is OK for a very wide class of events

2.8 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (RANDOM VARIABLES)

- It is useful to assign each outcome of an experiment to a number.
- In other words: We can define a function from the sample space to a subset of real numbers.
- This function is called Random Variable (RV)
 - It has to satisfy a condition that we will not mention here
 - If all of its values are discrete, we call it “discrete random variable” (διακριτή τ.μ.)
 - Αν το σύνολο των τιμών της αποτελείται από διαστήματα στη γραμμή των πραγματικών αριθμών τότε λέμε ότι έχουμε μια συνεχή τ.μ. (“continuous random variable”)

2.9 NOTIONS CONCERNING DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

- Probability function of a Discrete RV: The set of all possible values of the RV paired with their corresponding probabilities of occurrence (i.e. the probability of occurrence of the event which is mapped by the RV to the specific value)
- If X is a random variable we write $P(x_i) = P(X = x_i) = P(A_i)$ where A_i is the set of all elementary events ω of the sample space, for which $X(\omega) = x_i$.
- Expected Value (or Mean) of X :
$$E[X] = \sum_{(\text{over all } i)} x_i P(x_i)$$
- Variance of X :
$$V(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{(\text{over all } i)} (x_i - E[x_i])^2 P(x_i)$$

2.10 DISTRIBUTIONS OF DISCRETE RVs

- **Uniform distribution:** Each value of the random variable X has the same probability $P(x_i)=a$.
 - If the number of possible values of X is d , then $a=1/d$
- **Bernoulli distribution:** X can take only the values 0 and 1. If we write $P(1)=p$ then $P(0)=1-p$ and the distribution of X is given by $P(x)=p^x (1-p)^{1-x}$ where x is either 1 or 0
 - A Bernoulli distribution describes a random experiment with only two possible outcomes

2.10 DISTRIBUTIONS OF DISCRETE RVs (CONTINUED)

○ Binomial Distribution

- If we have:
 - (i) n trials of a random experiment (with a Bernoulli distribution)
 - (ii) the Bernoulli distribution is the same in each trial (same p)
 - (iii) the trials are independent
- the binomial distribution gives the probability that we had a specific number of “successes” (i.e. of 1) as outcomes of the n trials.
- It has the following probability distribution
$$P(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$
where k can be any integer in the range of $[0, n]$
- $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$ and $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

2.10 DISTRIBUTIONS OF DISCRETE RVs (CONTINUED)

○ **Poisson distribution**

- Is used to describe the probability that something occurs x times within a specific time interval, given that the average number of occurrences within this interval is λ
 - Each occurrence is independent to the others
 - λ does not change during the experiment
- $P(x) = (\lambda^x / x!) e^{-\lambda}$
- If X is a Poisson random variable, then
 - $E[X] = \text{Var}(X) = \lambda$
 - $P(N) = (\lambda / N) P(N-1)$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να κατασκευάσετε το κατάλληλο χώρο πιθανότητας για το τυχαίο πείραμα «Ρίχνω ένα νόμισμα 2 φορές».

Παράδειγμα σ-άλγεβρας αποτελεί το δυναμοσύνολο του Ω (το συμβολίζουμε με 2^Ω) δηλαδή το σύνολο που περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω . Αν το Ω περιέχει n στοιχεία τότε το δυναμοσύνολο θα έχει 2^n στοιχεία (υποσύνολα του Ω).

- Για το τυχαίο πείραμα που εξετάζουμε θα είχαμε αναλυτικά:
- $\Omega := \{ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}$
- $2^\Omega := \{ \emptyset, \Omega, ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ, \{ΚΚ, ΚΓ\}, \{ΚΚ, ΓΚ\}, \{ΚΚ, ΓΓ\}, \{ΚΓ, ΓΚ\}, \{ΚΓ, ΓΓ\}, \{ΓΚ, ΓΓ\}, \{ΚΚ, ΓΓ, ΚΓ\}, \{ΚΚ, ΓΓ, ΓΚ\}, \{ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}, \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ\} \}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (CONTINUED)

- Πιθανότητες:

Ενδεχόμενο	P()
$\emptyset$	0
Ω	1
ΚΓ	0.25
ΓΚ	0.25
ΓΓ	0.25
ΚΚ	0.25
ΚΚ,ΚΓ	0.5
ΚΚ,ΓΚ	0.5
ΚΚ,ΓΓ	0.5
ΚΓ,ΓΚ	0.5
ΚΓ,ΓΓ	0.5
ΓΚ,ΓΓ	0.5
ΚΚ,ΓΓ,ΚΓ	0.75
ΚΚ,ΓΓ,ΓΚ	0.75
ΓΓ,ΚΓ,ΓΚ	0.75
ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ	0.75

ΑΣΚΗΣΗ 3

Στις εξετάσεις εξαμήνου δίνονται 5 πιθανές απαντήσεις για κάθε ερώτηση με σωστή να είναι μόνο η μία από αυτές. Ο εξεταζόμενος είτε γνωρίζει την απάντηση με πιθανότητα 0.7 είτε απαντάει στη τύχη. Να βρεθεί η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να μην απαντήσει στην τύχη δεδομένου ότι απάντησε σωστά σε μία ερώτηση.

Λύση:

Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

- A: Ο εξεταζόμενος απαντά σωστά
- B: Ο εξεταζόμενος ΔΕΝ απαντά στην τύχη = Γνωρίζει την απάντηση

Γνωρίζουμε ότι:

- $P(B)=0.7$
- $P(A|B)=1$
- $P(A|B')=0.2$

Το ζητούμενο είναι $P(B|A)$ το οποίο σύμφωνα με το κανόνα του Bayes είναι:

- $P(B|A)=P(A|B) \times P(B) / P(A)$

Επομένως, χρειάζεται να υπολογίσουμε τη $P(A)$ η οποία σύμφωνα με το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας θα είναι:

- $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=0.7 \times 1 + 0.3 \times 0.2 = 0.76$

Επομένως θα έχουμε:

- $P(B|A)=(1 \times 0.7)/0.76=0.9210$