ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗ 3

1. Ποια είναι η Παρούσα Αξία του ακόλουθου συνόλου ταμειακών ροών που προεξοφλούνται με 10% ανά έτος;

Έτος	1	2	3	4	5
Ταμειακή Ροή	10	20	30	40	50

$$PV = \frac{10}{1.10} + \frac{20}{(1.10)^2} + \frac{30}{(1.10)^3} + \frac{40}{(1.10)^4} + \frac{50}{(1.10)^5} = 106.53$$

2. Θέλετε να δανειστείτε 10.000 $ και υπολογίζετε ότι μπορείτε να κάνετε τις ακόλουθες πληρωμές. Εάν το επιτόκιο του δανείου είναι 8,5% ετησίως, οι πληρωμές σας θα είναι αρκετές για να αποπληρώσετε το δάνειο των 10.000 δολαρίων;

Έτος	1	2	3	4
Πληρωμή $	2000	3000	3500	3975

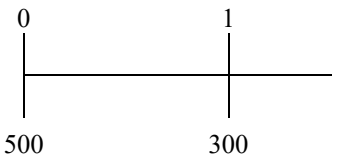
$$PV = \frac{2,000}{1.085} + \frac{3,000}{(1.085)^2} + \frac{3,500}{(1.085)^3} + \frac{3,975}{(1.085)^4} = 10,000.12$$

Ναι θα είναι αρκετές, γιατί η ΠΑ των πληρωμών σας θα κάλυπτε ακριβώς το ποσό του δανείου (στην πραγματικότητα θα το υπερέβαινε κατά 12 σεντς). Έτσι, το μέγιστο ποσό που θα μπορούσατε να δανειστείτε θα ήταν 10.000,12 $.

3. Σκοπεύετε να καταθέσετε 500 $ σε έναν τραπεζικό λογαριασμό τώρα και 300 $ στο τέλος του πρώτου χρόνου. Αν ο λογαριασμός κερδίζει 3% τόκο ετησίως, ποιο θα είναι το υπόλοιπο του λογαριασμού μετά τη δεύτερη κατάθεση;

Σχεδιασμός:
Σχεδιάστε το χρονοδιάγραμμα και, στη συνέχεια, υπολογίστε τη Μελλοντική Αξία (FV) αυτών των δύο ταμειακών ροών.

Εκτέλεση:
Χρονοδιάγραμμα (επειδή υπολογίζουμε τη μελλοντική αξία του λογαριασμού, θα αντιμετωπίσουμε τις ταμειακές ροές ως θετικές -που εισέρχονται στον λογαριασμό):



FV = ?

FV = 500(1.03) + 300 = 815

Αξιολόγηση:

Το χρονοδιάγραμμα μας βοηθά να οργανώσουμε την εργασία μας έτσι ώστε να βρούμε τον αριθμό των περιόδων ανατοκισμού σωστά. Η πρώτη ταμειακή ροή θα έχει ένα έτος ανατοκισμού, αλλά η **δεύτερη ταμειακή ροή θα κατατεθεί στο τέλος της περιόδου 1, οπότε δεν λαμβάνει ανατοκισμό**.

4. Ας υποθέσουμε ότι μπορείτε να κερδίζετε 9% ετησίως από τις επενδύσεις σας.
    a. Αν επενδύσετε 100.000 $ για συνταξιοδότηση σας στην ηλικία των 30, πόσα θα έχετε 35 χρόνια αργότερα;
    b. Αν περιμένετε μέχρι την ηλικία των 40 ετών για να επενδύσετε τα 100.000 $, πόσα θα έχετε 25 χρόνια αργότερα;
    c. Γιατί η διαφορά είναι τόσο μεγάλη;

    a. Η FV των 100,000 που ενδύονται για 35 χρόνια με επιτόκιο 9% είναι: $100,000 \times (1.09)^{35} = 2,041,397$
    b. Η FV των 100,000 που ενδύονται για 25 χρόνια με επιτόκιο 9% είναι: $100,000 \times (1.09)^{25} = 862,308$
    c. Η διαφορά είναι τόσο μεγάλη λόγω της επίδρασης του ανατοκισμού, η οποία είναι εκθετική. Στο σενάριο όπου επενδύετε νωρίτερα, αυτά τα 10 χρόνια είναι κρίσιμα για την πολλαπλασιαστική αύξηση που επιτυγχάνετε στην επένδυσή σας.

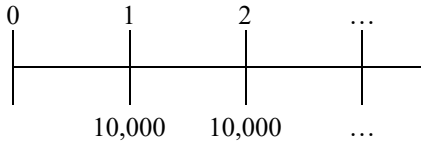
5. Θέλετε να δωρίσετε μια υποτροφία που θα πληρώνει 10.000 $ ετησίως για πάντα, ξεκινώντας σε ένα χρόνο από τώρα. Εάν το προεξοφλητικό επιτόκιο του σχολείου είναι 7%, τι ποσό πρέπει να δωρίσετε σήμερα;

Σχεδιασμός:

Αυτή η υποτροφία είναι μια διηνεκή ράντα. Η ταμειακή ροή είναι 10.000 $ και το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 7%. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της διηνεκής ράντας για να υπολογίσουμε τη PV, η οποία είναι το ποσό που πρέπει να δωρίσετε.

Εκτέλεση:

Χρονοδιάγραμμα:



$$\mathrm{PV} = 10{,}000/0.07 = 142{,}857.14$$

Αξιολόγηση:

Με μια δωρεά ύψους 142.857,14 $ σήμερα και τόκο 7%, το πανεπιστήμιο μπορεί να αποσύρει τους τόκους κάθε χρόνο (10.000 δολάρια) και να αφήσει την υποτροφία άθικτη για να δημιουργήσει τα 10.000 $ του επόμενου έτους. Μπορεί να συνεχίσει να το κάνει αυτό για πάντα.

6. Η βρετανική κυβέρνηση έχει σε κυκλοφορία ένα εκκρεμές διηνεκές ομόλογο (consol bond) που αποδίδει 100 λίρες ετησίως για πάντα. Υποθέστε ότι το τρέχον επιτόκιο είναι 4% ετησίως.
    a. Ποια είναι η αξία του ομολόγου αμέσως μετά την καταβολή μιας πληρωμής;
    b. Ποια είναι η αξία του ομολόγου αμέσως πριν γίνει την καταβολή της πληρωμής;

    Το χρονοδιάγραμμα για αυτή την επένδυση είναι:

    a. Η αξία του ομολόγου ισούται με την ΠΑ των ταμειακών ροών. Σύμφωνα με τον τύπο της διηνεκούς ράντας, ο οποίος υποθέτει ότι η πρώτη πληρωμή γίνεται την περίοδο 1, η αξία του ομολόγου είναι:

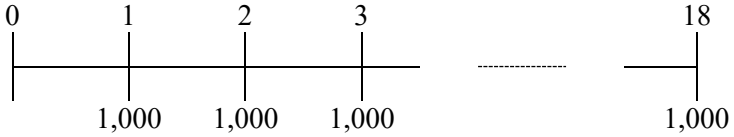
    $$\begin{aligned}\mathrm{PV} &= \frac{100}{0.04} \\ &= £2{,}500\end{aligned}$$

    b. Η αξία του ομολόγου ισούται με την ΠΑ των ταμειακών ροών. Η πρώτη πληρωμή θα ληφθεί τη χρονική στιγμή μηδέν. Οι ταμειακές ροές είναι το διηνεκές συν την πληρωμή που θα ληφθεί αμέσως.

    $$\begin{aligned}\mathrm{PV} &= \frac{100}{0.04} + 100 \\ &= £2{,}600\end{aligned}$$

7. Η γιαγιά σας καταθέτει 1000 $ σε έναν επενδυτικό λογαριασμό κάθε φορά που είχατε γενέθλια από τα πρώτα σας γενέθλια (δηλαδή όταν γίνατε ενός έτους). Ο λογαριασμός αποδίδει επιτόκιο 3%. Πόσα χρήματα θα βρίσκονται στο λογαριασμό αμέσως μετά την κατάθεση που θα κάνει η γιαγιά σας στα 18^{α} γενέθλιά σας;

   Σχεδιασμός:
   Ετοιμάστε ένα χρονοδιάγραμμα των καταθέσεων της γιαγιάς σας.



   Οι καταθέσεις είναι 18ετής ράντα. Χρησιμοποιήστε τη σχετική εξίσωση για να υπολογίσετε τη μελλοντική αξία των καταθέσεων.

   Εκτέλεση:

$$FV = C \times \frac{1}{r}\left[(1+r)^N - 1\right] = 1{,}000\,\frac{1}{0.03}\left[(1.03)^{18} - 1\right] = 23{,}414.43$$

   Στην ηλικία των 18 ετών, θα έχετε 23.414,43 $ στο λογαριασμό σας.

   Αξιολόγηση:
   Οι τόκοι των καταθέσεων και οι τόκοι των τόκων αυτών προσθέτουν περισσότερα από 5.414 $ στον λογαριασμό.

8. Υπολογίζετε ότι το συνολικό κόστος των πανεπιστημιακών σας σπουδών θα είναι 100.000 $ ετησίως σε 18 χρόνια από σήμερα. Εάν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 8% με ετήσιο ανατοκισμό, ποια είναι η παρούσα αξία σήμερα του κόστους των τεσσάρων ετών στο πανεπιστήμιο ξεκινώντας σε 18 χρόνια από σήμερα;

   Σχεδιασμός:
   Πρόκειται για αναβαλλόμενη ράντα. Το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών είναι:

0	1 …		17	18…	21
	0 …		0	100,000 …	100,000

Υπολογίστε την αξία της ράντας το έτος 17, μία περίοδο πριν από την έναρξή της, και στη συνέχεια προεξοφλήστε την αξία αυτή στο παρόν.

Η αξία της ράντας το έτος 17, μία περίοδο πριν από την έναρξή της είναι:

$$PV = \frac{CF}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = \frac{100,000}{0.08}\left[1 - \frac{1}{(1.08)^4}\right] = 331,212.68$$

Για να υπολογίσουμε την αξία του σήμερα, πρέπει να προεξοφλήσουμε αυτό το εφάπαξ ποσό 17 χρόνια πίσω στο παρόν:

$$\frac{331,212.68}{(1.08)^{17}} = \$89,516.50$$

Ακόμα κι αν οι ταμειακές ροές είναι λίγο ασυνήθιστες (μια ράντα που ξεκινάει στο μέλλον), μπορούμε να τις αποτιμήσουμε συνδυάζοντας το PV της ράντας και το PV ενός εργαλείου FV. Αν επενδύσουμε 89.516,50 $ σήμερα με επιτόκιο 8%, θα αυξηθούν ώστε να είναι αρκετά για να χρηματοδοτήσουν μια ράντα 100.000 $ ετησίως μέχρι τη στιγμή που θα χρειαστούν για τα έξοδα του κολεγίου.

9. Εργάζεστε σε μια φαρμακευτική εταιρεία που έχει αναπτύξει ένα νέο φάρμακο. Η πατέντα του φαρμάκου θα διαρκέσει 17 χρόνια. Αναμένετε ότι τα κέρδη του φαρμάκου θα είναι 2 εκ. $ το πρώτο έτος και ότι το ποσό αυτό θα αυξάνεται με ρυθμό 5% ετησίως για τα επόμενα 17 χρόνια. Μόλις λήξει η πατέντα, άλλες φαρμακευτικές εταιρείες θα μπορούν να παράγουν το ίδιο φάρμακο και ο ανταγωνισμός θα οδηγήσει πιθανότατα τα κέρδη στο μηδέν. Ποια είναι η παρούσα αξία του νέου φαρμάκου αν το επιτόκιο είναι 10% ετησίως;

Σχεδιασμός:
Το φάρμακο θα παράγει ταμειακές ροές για 17 χρόνια που θα αυξάνονται με 5% ετησίως. Πρέπει να προσδιοριστεί η αξία αυτής της ροής ταμειακών ροών σήμερα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για μια αυξανόμενη ετήσια ράντα για να το λύσουμε.

Εκτέλεση:

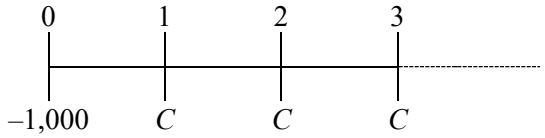
$$PV = 2\left(\frac{1}{0.10 - 0.05}\right)\left(1 - \left(\frac{1.05}{1.10}\right)^{17}\right) = 21.86$$

Αξιολόγηση:
Η αξία σήμερα των ταμειακών ροών που θα παραχθούν από το φάρμακο για τα επόμενα 17 χρόνια είναι 21,86 εκ. $. Επειδή οι ταμειακές ροές αναμένεται να αυξηθούν με σταθερό ρυθμό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της αυξανόμενης ετήσιας ράντας.

10. Έχετε αποφασίσει να αγοράσετε ένα διηνεκές ομόλογο. Το ομόλογο καταβάλλει μία πληρωμή στο τέλος κάθε έτους για πάντα και έχει επιτόκιο 5%. Εάν το ομόλογο κοστίζει αρχικά 1.000 $, ποια είναι η ετήσια πληρωμή;

Σχεδιασμός:
Σχεδιάστε ένα χρονοδιάγραμμα για να καταδείξετε πότε θα πραγματοποιηθούν οι ταμειακές ροές. Στη συνέχεια λύστε το πρόβλημα για να προσδιορίσετε τις πληρωμές που θα λάβετε.

Εκτέλεση:



$$P = \frac{C}{r} \Rightarrow C = P \times r = 1{,}000 \times 0.05 = \$50$$

Αξιολόγηση:
Θα λαμβάνετε 50 δολάρια ετησίως στο διηνεκές.

11. Ας υποθέσουμε ότι αυτή τη στιγμή έχετε 5.000 $ στον αποταμιευτικό σας λογαριασμό και η τράπεζά καταβάλει επιτόκιο 0,5% μηνιαίως. Αν δεν κάνετε άλλες καταθέσεις ή αναλήψεις, πόσα θα έχετε στο λογαριασμό σε πέντε χρόνια;

Υπολογίζουμε τη μελλοντική αξία ως $FV = C \times (1 + r)^n$.
Το αρχικό ποσό είναι C = 5.000$ και το επιτόκιο r = 0,5% ανά μήνα.
Επειδή έχουμε μηνιαίο επιτόκιο, πρέπει επίσης να εκφράσουμε τον αριθμό των περιόδων, n, σε μήνες, οπότε $n = 5 \times 12 = 60$.

Επομένως:
$FV = \$5{,}000 \times 1.00560 = \$6{,}744.25$
Σε πέντε χρόνια θα έχουμε 6.744,25 $ στο λογαριασμό.

12. Σχεδιάζετε να αφήσετε ως κληροδότημα μία υποτροφία που καταβάλλει 5.000 $ κάθε έξι μήνες, ξεκινώντας σε έξι μήνες από τώρα. Αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 2% ανά περίοδο έξι μηνών, πόσα χρήματα θα πρέπει να δωρίσετε σήμερα για να χρηματοδοτήσετε την υποτροφία σας;

    Πρόκειται για ένα τυπικό διηνεκές πρόβλημα, αλλά με τα πάντα να γίνονται σε εξαμηνιαίες περιόδους.
    Επειδή το επιτόκιο δίνεται επίσης ως επιτόκιο έξι μηνών, μπορείτε απλώς να χρησιμοποιήσετε τον τύπο της διηνεκούς ράντας ως έχει:

$$PV = \frac{CF}{r},\ \text{so PV} = \frac{5000}{.02},\ \text{so PV} = 250,000$$