

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Χρηματοοικονομική Διοικητική

ΠΜΣ "ΤΟ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΚΑΙ
ΘΕΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ ΑΓΟΡΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ”

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Dr. ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Ενότητα 3: Διαχρονική Αξία Χρήματος Αξιολόγηση Ακολουθιών Ταμειακών Ροών

- Θέματα που καλύπτονται:
  - Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών
  - Διηνεκής ράντα
  - Ετήσια ράντα
  - Αύξηση των ταμειακών ροών
  - Επίλυση ως προς άλλες μεταβλητές εκτός από την Παρούσα Αξία (PV) ή τη Μελλοντική Αξία (FV)

Ενότητα 3: Διαχρονική Αξία Χρήματος Αξιολόγηση Ακολουθιών Ταμειακών Ροών

- Μαθησιακά Αποτελέσματα (ILOs):
  - Να **αξιολογήσετε** μια ακολουθία ταμειακών ροών
  - Να **αξιολογήσετε** μια ακολουθία τακτικών ταμειακών ροών που ονομάζεται **διηνεκής** ράντα
  - Να **αξιολογήσετε** ένα συνηθισμένο σύνολο ταμειακών ροών που ονομάζεται **ετήσια** ράντα
  - Να **αξιολογήσετε** τόσο τη **διηνεκή** όσο και την **ετήσια** ράντα όταν οι ταμειακές ροές αυξάνονται με σταθερό ρυθμό
  - Να υπολογίσετε τις **ταμειακές ροές** ή το **ποσοστό απόδοσης** ενός δανείου ή μιας επένδυσης

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Κανόνες** που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 2:
  - **Κανόνας 1**: Μόνο οι αξίες που βρίσκονται στο ίδιο χρονικό σημείο μπορούν να συγκριθούν ή να συνδυαστούν.
  - **Κανόνας 2:** Για να υπολογίσουμε τη **μελλοντική** αξία μιας ταμειακής ροής, πρέπει να την ανατοκίσουμε.

$$FV_n = C \times (1+r)^n$$

  - **Κανόνας 3:** Για να υπολογίσουμε την **παρούσα** αξία μιας μελλοντικής ταμειακής ροής, πρέπει να την προεξοφλήσουμε.

$$PV = C \div (1+r)^n = \frac{C}{(1+r)^n}$$

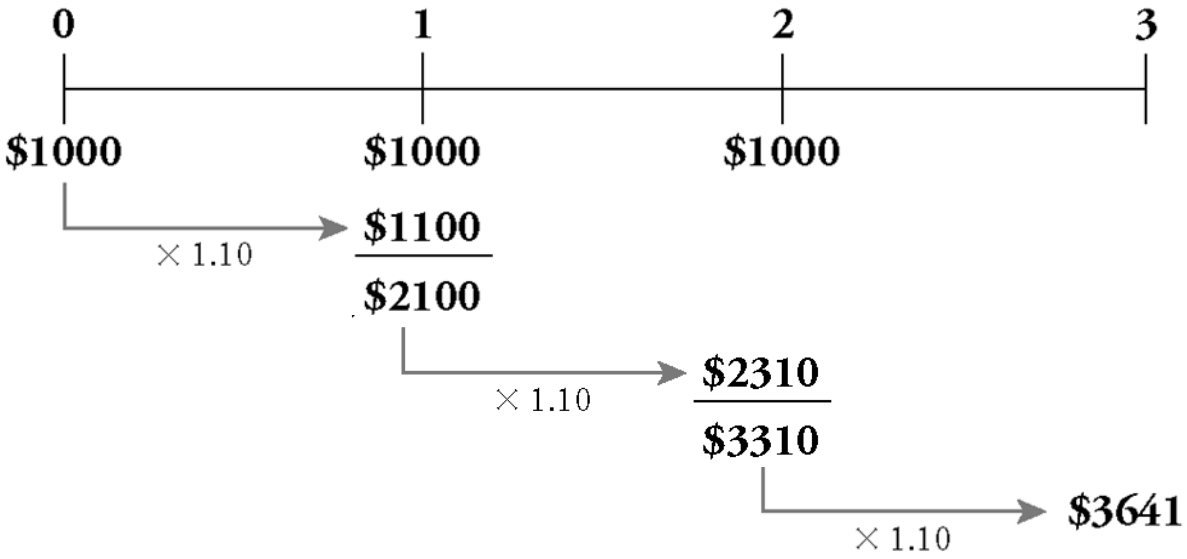
Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- Εφαρμογή των ***κανόνων αποτίμησης*** των ταμειακών ροών
  - Ας υποθέσουμε ότι σκοπεύουμε να αποταμιεύσουμε 1.000$ σήμερα και 1.000$ στο **τέλος** καθενός από τα επόμενα δύο χρόνια.
  - Αν κερδίσουμε ένα σταθερό επιτόκιο 10% επί των αποταμιεύσεών μας, πόσα θα έχουμε σε τρία χρόνια από σήμερα;

- Μπορούμε να το υπολογίσουμε αυτό με διάφορους τρόπους
  - **Πρώτος τρόπος:** πάρτε την κατάθεση στην ημερομηνία 0 και μεταφέρετέ την στην ημερομηνία 1
  - Προσθέστε αυτό το ποσό με την κατάθεση της ημερομηνίας 1 και μεταφέρετε το συνδυασμένο σύνολο στην ημερομηνία 2

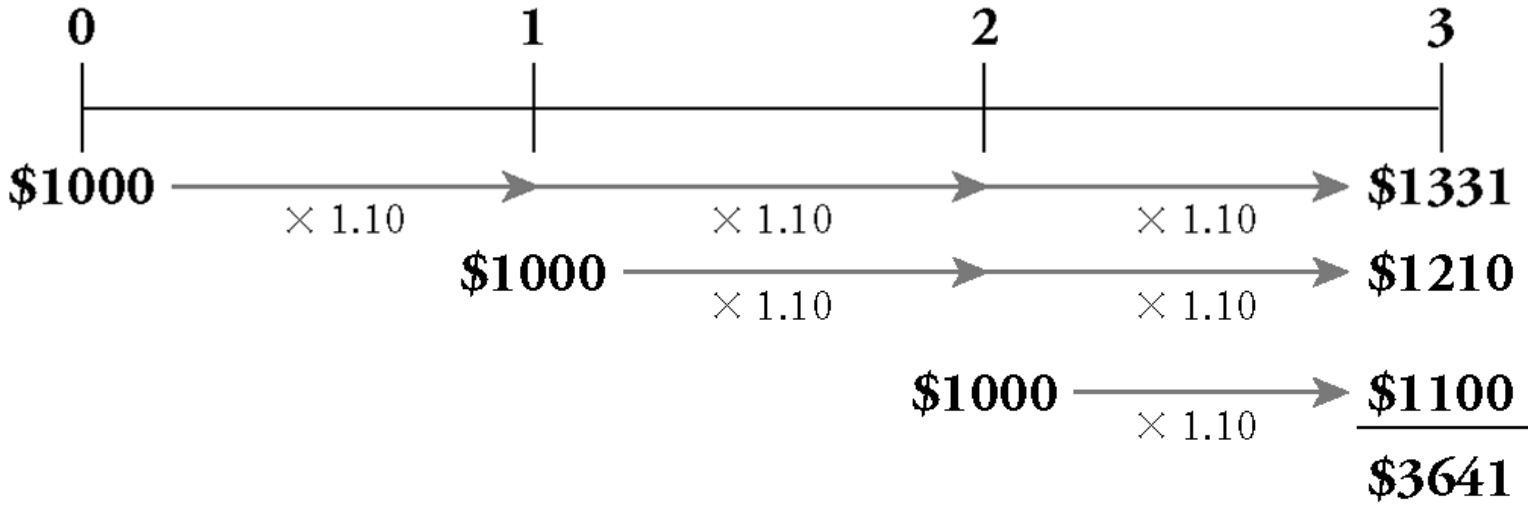
Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ως εξής:



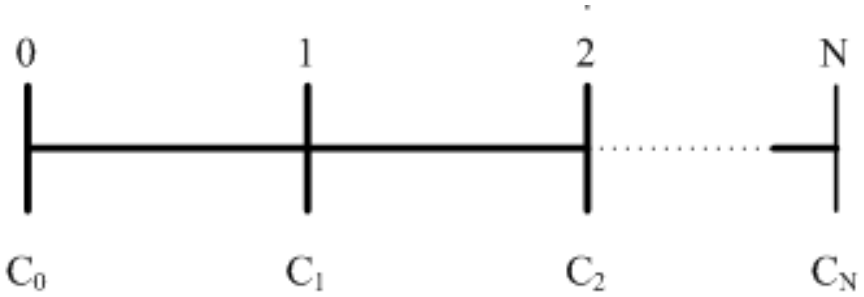
Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Δεύτερος τρόπος:** είναι ο υπολογισμός της μελλοντικής αξίας το έτος 3 κάθε ταμειακής ροής χωριστά.
- Μόλις όλα τα ποσά είναι εκφρασμένα σε $ του έτους 3, προσθέστε τα.



Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

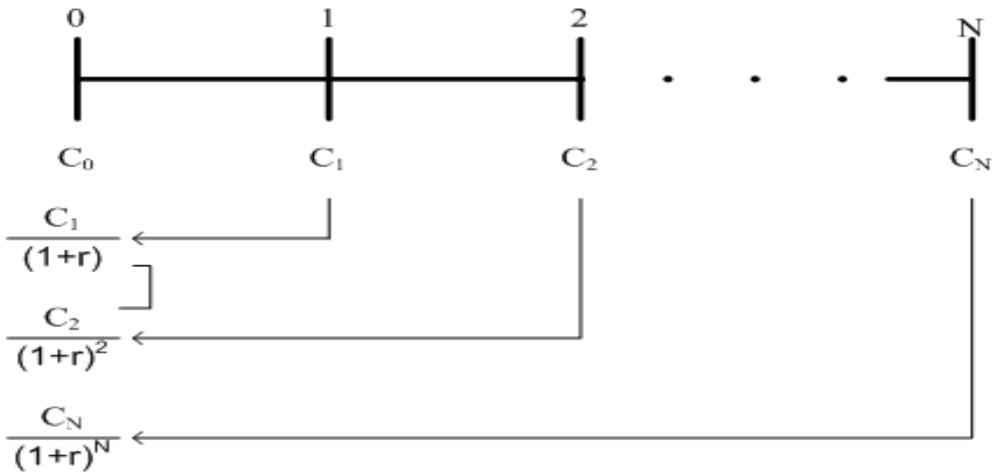
- Θεωρήστε μια ροή ταμειακών ροών: C_0 την ημερομηνία 0, C_1 την ημερομηνία 1, κ.ο.κ., μέχρι την C_N την ημερομηνία N



- Υπολογίζουμε την **Παρούσα Αξία** αυτής της ροής ταμειακών ροών σε δύο βήματα.
- **Πρώτο βήμα**: υπολογίζουμε την παρούσα αξία κάθε μεμονωμένης ταμειακής ροής.

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Δεύτερο βήμα**: Προσθέστε τις παρούσες αξίες



- Το πιο πάνω χρονοδιάγραμμα παρέχει τον γενικό τύπο για την Παρούσα Αξία μιας ροής ταμειακών ροών:

$$PV = C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_N}{(1+r)^N}$$

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Παράδειγμα 1**

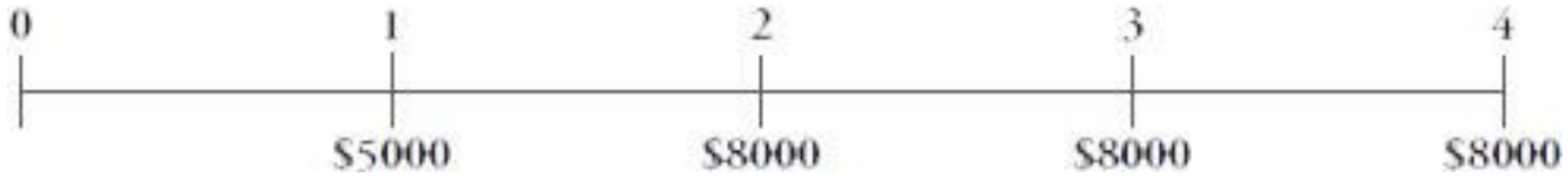
Μόλις αποφοιτήσατε και χρειάζεστε χρήματα για να αγοράσετε ένα νέο αυτοκίνητο. Ο πλούσιος θείος σας ο Χένρι θα σας δανείσει τα χρήματα αρκεί να συμφωνήσετε να τον ξεπληρώσετε εντός τεσσάρων ετών.

Εσείς προσφέρεστε να του πληρώσετε το **επιτόκιο** που θα λάμβανε αν τοποθετούσε τα χρήματά του σε έναν λογαριασμό ταμιευτηρίου. Με βάση τα εισοδήματά σας και τα έξοδα διαβίωσης, πιστεύετε ότι θα είστε σε θέση να του πληρώσετε **5.000$** σε **ένα χρόνο** και στη συνέχεια **8.000$ κάθε χρόνο** για τα επόμενα **τρία χρόνια**.

*Εάν ο θείος Χένρι κέρδιζε σε διαφορετική περίπτωση **επιτόκιο 6%** ετησίως από τις αποταμιεύσεις του, πόσα μπορείτε να δανειστείτε από αυτόν;*

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Σχεδιασμός**
- Οι ταμειακές ροές που μπορείτε να υποσχεθείτε στον θείο Χένρι είναι οι εξής:



- *Πόσα χρήματα θα πρέπει να είναι πρόθυμος να σας δώσει σήμερα ο θείος Χένρι σε αντάλλαγμα για την υπόσχεσή σας για αυτές τις πληρωμές;*
- Θα πρέπει να είναι πρόθυμος να σας δώσει ένα ποσό που είναι ισοδύναμο με αυτές τις πληρωμές σε όρους **Παρούσας Αξίας**.

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Σχεδιασμός**
- Αυτό είναι το ποσό των χρημάτων που θα χρειαζόταν για να παράγει τις ίδιες ταμειακές ροές.

1. Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την εξίσωση για τον υπολογισμό της **Παρούσας Αξίας**
2. Θα επαληθεύσουμε την απάντησή μας υπολογίζοντας τη **Μελλοντική Αξία** αυτού του ποσού.

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Εκτέλεση**
- Μπορούμε να υπολογίσουμε τη ΠΑ ως εξής:

$$PV = \frac{5000}{1.06} + \frac{8000}{1.06^2} + \frac{8000}{1.06^3} + \frac{8000}{1.06^4}$$

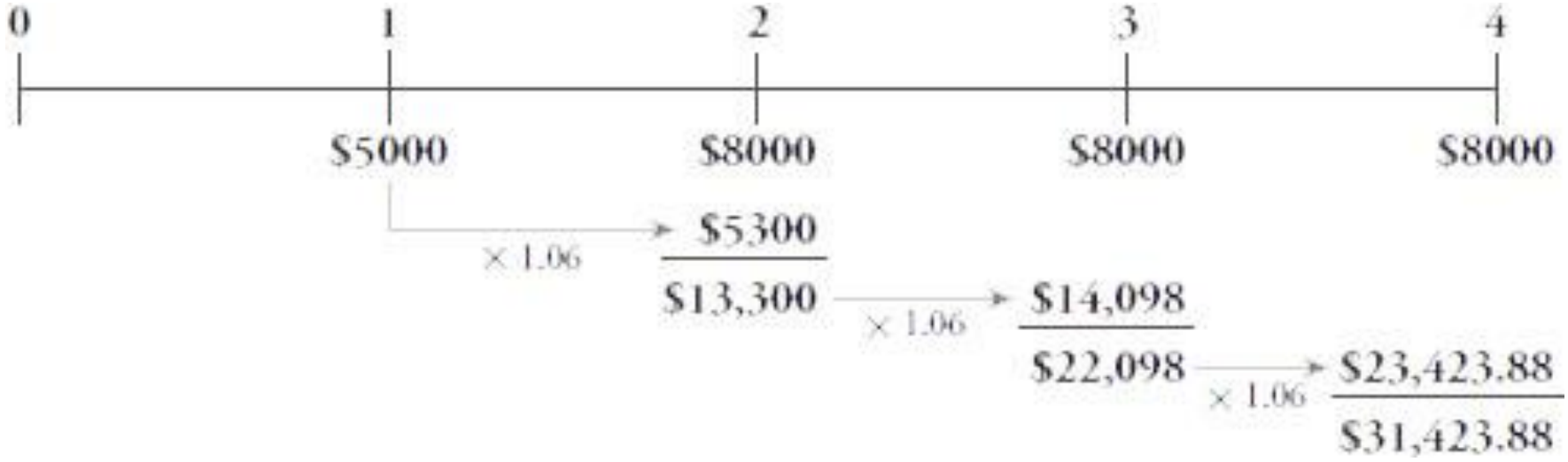
$$= 4716.98 + 7119.97 + 6716.95 + 6336.75$$

$$= \$24,890.65$$

- Ας υποθέσουμε ότι ο θείος Χένρι σας δίνει τα χρήματα και στη συνέχεια καταθέτει στην τράπεζα τις πληρωμές που του καταβάλλετε κάθε χρόνο.
- *Πόσα θα διαθέτει σε τέσσερα χρόνια από τώρα;*

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Εκτέλεση**
- Πρέπει να υπολογίσουμε τη **Μελλοντική Αξία** των ετήσιων καταθέσεων.
- **Ένας τρόπος:** να υπολογίσουμε το υπόλοιπο της τράπεζας κάθε χρόνο:



Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Εκτέλεση**
- **Δεύτερος τρόπος**: υποθέστε ότι ο θείος σας διατηρεί τα 24.890,65 $ στην τράπεζα σήμερα με τόκο 6%. Σε τέσσερα χρόνια θα έχει:

$$FV = \$24{,}890.65 \times (1.06)^4 = \$31{,}423.87 \; \textit{σε 4 χρόνια}$$

- Καταλήγουμε στην **ίδια απάντηση** και με τους δύο τρόπους (η μικρή διαφορά οφείλεται στη στρογγυλοποίηση).

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Αξιολόγηση**
- Έτσι, ο θείος Χένρι θα πρέπει να είναι πρόθυμος να σας δανείσει 24.890,65$ σε αντάλλαγμα για τις πληρωμές που υποσχεθήκατε.
- Το ποσό αυτό είναι μικρότερο από το συνολικό ποσό που θα του πληρώσετε:

  5.000$ + 8.000$ + 8.000$ + 8.000$ + 8.000$ = 29.000$

- Γιατί?
- Λόγω της **διαχρονικής αξίας του χρήματος**.

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Παράδειγμα 2**
- Σχεδιάζετε να αποταμιεύσετε 1000$ **σήμερα** και στο **τέλος καθενός από τα επόμενα δύο χρόνια**. Με σταθερό επιτόκιο 10%, πόσα θα έχετε στην τράπεζα σε τρία χρόνια από σήμερα;

- **Σχεδιασμός**
- Θα ξεκινήσουμε με το χρονοδιάγραμμα για αυτό το σχέδιο αποταμίευσης



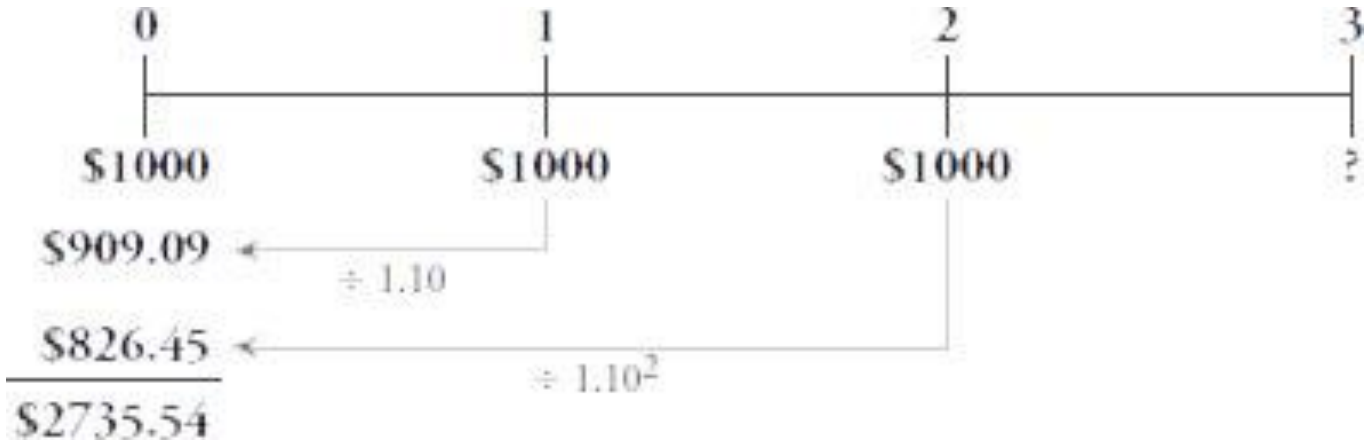
Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Σχεδιασμός**
- Θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο ακολουθώντας όμως τους κανόνες που θέσαμε.

- **Πρώτον:** θα υπολογίσουμε την **Παρούσα Αξία** των ταμειακών ροών.
- **Δεύτερον**: θα υπολογίσουμε την αξία τους τρία χρόνια αργότερα (**Μελλοντική Αξία**).

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Εκτέλεση**
- Θα αντιμετωπίσουμε κάθε ταμειακή ροή ξεχωριστά και στη συνέχεια προσθέτουμε τις παρούσες αξίες.



- Η αποταμίευση 2.735,54 $ σήμερα ισοδυναμεί με εξοικονόμηση 1.000 $ ετησίως για τρία χρόνια.

Αξιολόγηση μιας ακολουθίας ταμειακών ροών

- **Εκτέλεση**
- Τώρα υπολογίζουμε τη μελλοντική αξία του έτους 3 αυτών των 2735,54$:

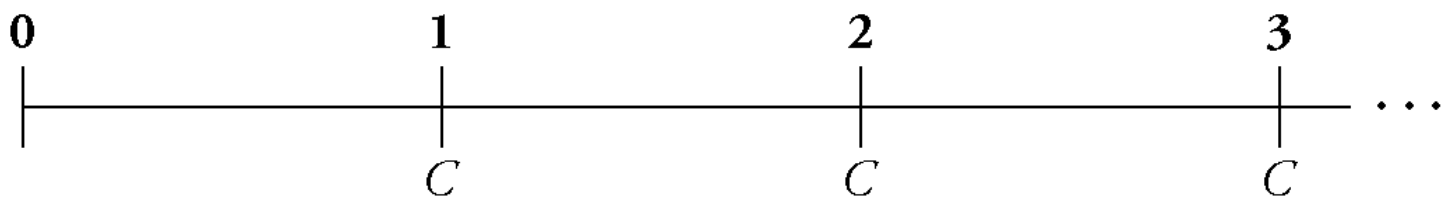


- **Αξιολόγηση**
- Η απάντηση των 3.641$ είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε νωρίτερα.
- Εφαρμόζοντας τους **τρεις κανόνες αποτίμησης** των ταμειακών ροών, θα παίρνουμε πάντα τη σωστή απάντηση.

Διηνεκής ράντα

- Μια **διηνεκής ράντα** είναι μια ακολουθία **ισόποσων ταμειακών ροών** που εμφανίζονται σε τακτά χρονικά διαστήματα και **διαρκούν για πάντα**.

- Ακολουθεί το χρονοδιάγραμμα για μια διηνεκή ράντα:



- η **πρώτη** ταμειακή ροή δεν εμφανίζεται αμέσως, αλλά στο τέλος της πρώτης περιόδου.

Διηνεκής ράντα

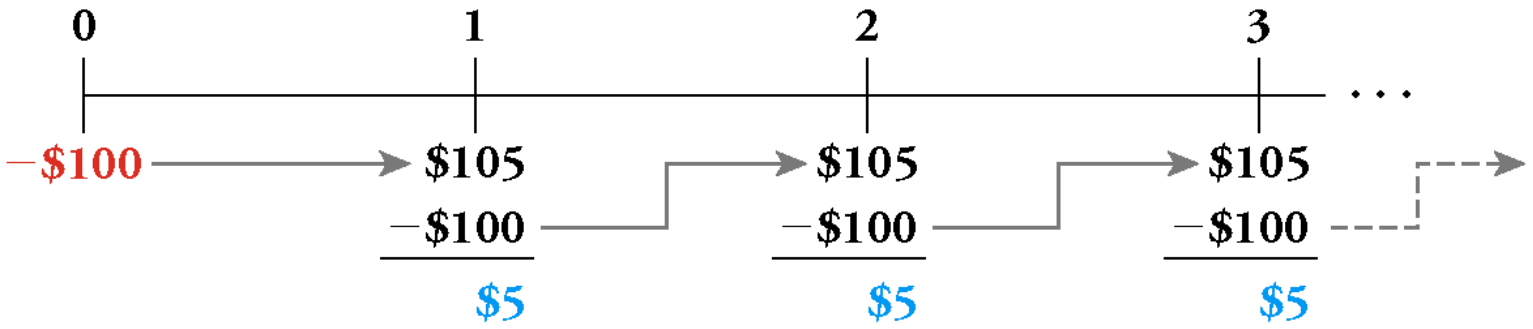
- Χρησιμοποιώντας τον τύπο της Παρούσας Αξίας, η Παρούσα Αξία μιας διηνεκούς ράντας με πληρωμή C και επιτόκιο r δίνεται από τη σχέση:

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + ...$$

- Σημειώστε ότι όλες οι ταμειακές ροές είναι οι **ίδιες**
- Επίσης, η πρώτη ταμειακή ροή **αρχίζει** τη **χρονική στιγμή 1** (δεν υπάρχει ταμειακή ροή τη χρονική στιγμή 0).

Διηνεκής ράντα

- Ας υποθέσουμε ότι μπορείτε να επενδύσετε 100$ σε έναν τραπεζικό λογαριασμό που πληρώνει 5% τόκο ετησίως **για πάντα**.
- Στο τέλος του έτους θα έχετε 105$ στην τράπεζα
  - Τα αρχικά σας 100 $ συν 5$ σε τόκους.
- Ας υποθέσουμε ότι αποσύρετε τα 5$ και επανεπενδύετε τα 100$ για άλλο ένα έτος.
- Κάνοντας αυτό κάθε χρόνο, μπορείτε να αποσύρετε 5$ κάθε χρόνο στο διηνεκές:



Διηνεκής ράντα

- Γενικεύοντας, ας υποθέσουμε ότι **επενδύουμε** ένα ποσό **P** με **επιτόκιο r**
- Κάθε χρόνο μπορούμε να **αποσύρουμε** τους **τόκους** που κερδίσαμε, C = r × P, αφήνοντας το αρχικό κεφάλαιο P στην τράπεζα
- Επειδή το κόστος για τη δημιουργία της **διηνεκούς ράντας** είναι μόνο η αρχική επένδυση του κεφαλαίου, P, η αξία της λήψης του C στο διηνεκές είναι το αρχικό κόστος, P
- Αναδιατάσσοντας το C = r × P για να λύσουμε το P, έχουμε $P = \frac{C}{r}$
- **Παρούσα Αξία μιας διηνεκούς ράντας**

$$PV(C \text{ in Perpetuity}) = \frac{C}{r}$$

Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα 1: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**

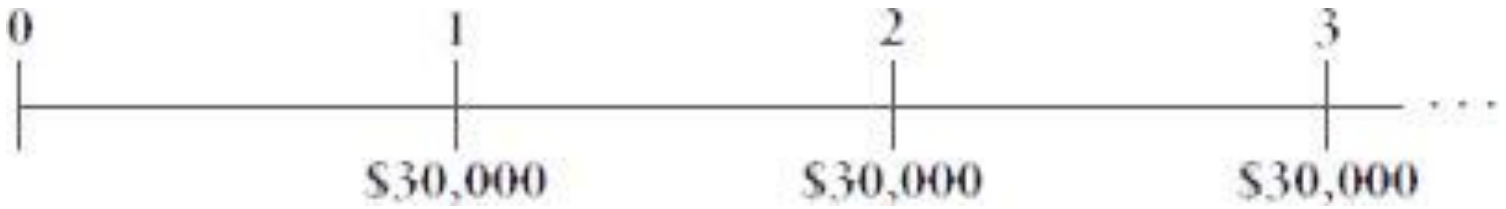
Θέλετε να αφήσετε ένα κληροδότημα για το ετήσιο πάρτι αποφοίτησης στο πανεπιστήμιό σας. Θέλετε η εκδήλωση να είναι αξέχαστη, οπότε προϋπολογίζετε 30.000$ ετησίως για πάντα για το πάρτι.

Αν το πανεπιστήμιο κερδίζει 8% ετησίως από τις επενδύσεις του και αν το πρώτο πάρτι γίνει σε ένα χρόνο από τώρα, πόσα θα πρέπει να δωρίσετε για να χρηματοδοτήσετε το πάρτι;

Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**

- **Σχεδιασμός**
- Το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών που θέλετε να παρέχετε είναι:



- Μια συνηθισμένη διηνεκής ράντα των 30.000$ ετησίως.
- Το κεφάλαιο που θα πρέπει να δώσετε στο πανεπιστήμιο στο διηνεκές είναι η **Παρούσα Αξία** αυτής της ακολουθίας ταμειακών ροών.

Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**

- **Εκτέλεση**
- Χρησιμοποιήστε τον τύπο για τη διηνεκή ράντα:

$$PV = \frac{C}{r}$$

$$= \frac{\$30{,}000}{0{,}08} = \$375{,}000 \text{ σήμερα}$$

- **Αξιολόγηση**
- Αν δωρίσετε 375.000$ σήμερα και αν το πανεπιστήμιο τα επενδύει με 8% ετησίως για πάντα, τότε οι απόφοιτοι θα έχουν 30.000$ κάθε χρόνο για να χρηματοδοτήσουν το πάρτι αποφοίτησής τους.

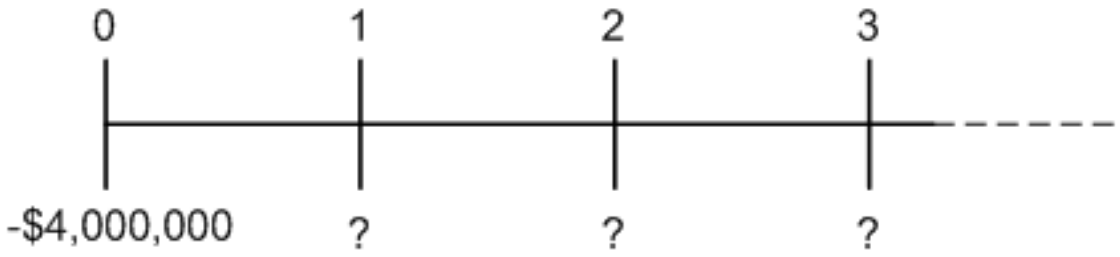
Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα 2: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**
- Μόλις κερδίσατε το λαχείο και θέλετε να χρηματοδοτήσετε μια καθηγητική έδρα στο πανεπιστήμιο σας.
- Είστε πρόθυμοι να δωρίσετε 4 εκ. $ από τα κέρδη σας για το σκοπό αυτό.
- Εάν το πανεπιστήμιο κερδίζει **5%** ετησίως από τις επενδύσεις του και ο καθηγητής θα λάβει την πρώτη του πληρωμή σε ένα χρόνο από τώρα, πόσο θα λαμβάνει ο καθηγητής από τη χρηματοδότησης σας κάθε χρόνο;

Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα 2: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**

- **Σχεδιασμός**
- Το χρονοδιάγραμμα των ταμειακών ροών που θέλετε να παρέχετε είναι:



- Μια συνηθισμένη διηνεκής ράντα. Το ποσό που μπορεί να λαμβάνει κάθε χρόνο ο καθηγητής και να διατηρηθεί το κεφάλαιο ανέπαφο είναι η ταμειακή ροή από την επίλυση της εξίσωσης της ΠΑ μια διηνεκούς ράντας.

Διηνεκής ράντα

- **Παράδειγμα 2: Κληροδοτώντας μια διηνεκή ράντα**

- **Εκτέλεση**
- Από την εξίσωση της ΠΑ μια διηνεκούς ράντας.

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}}$$

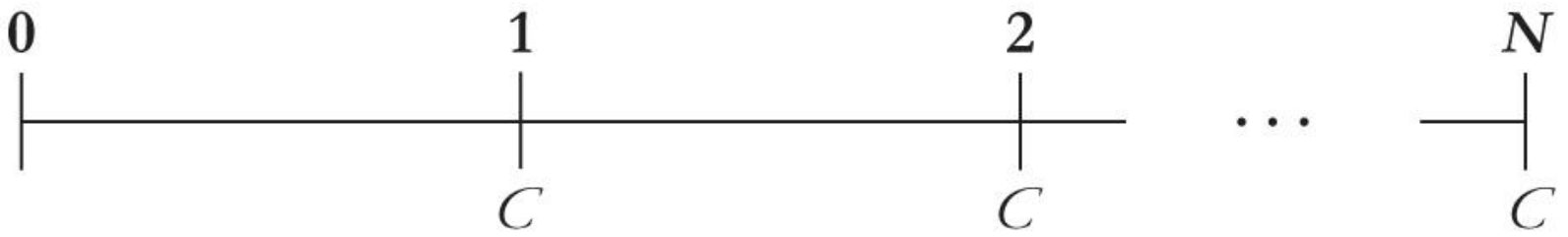
$$C = PV\ x\ r$$

$$\mathrm{C} = \$4.000.000\ \mathrm{x}\ 0{,}05 = \$200.000$$

- **Αξιολόγηση**
- Αν δωρίσετε 4 εκ. $ σήμερα και αν το πανεπιστήμιο τα επενδύει με 5% ετησίως για πάντα, τότε ο επιλεγμένος καθηγητής θα λαμβάνει **200.000$** κάθε χρόνο.

Ετήσια ράντα

- Μια **ετήσια ράντα** αποτελείται από έναν σταθερό αριθμό ίσων ταμειακών ροών που καταβάλλονται σε τακτά χρονικά διαστήματα.



- Η διαφορά μεταξύ μιας ετήσιας ράντας και μιας διηνεκούς είναι ότι η ετήσια ράντα **λήγει μετά από έναν ορισμένο αριθμό πληρωμών**, ενώ η διηνεκής ράντα συνεχίζει για πάντα.

Ετήσια ράντα

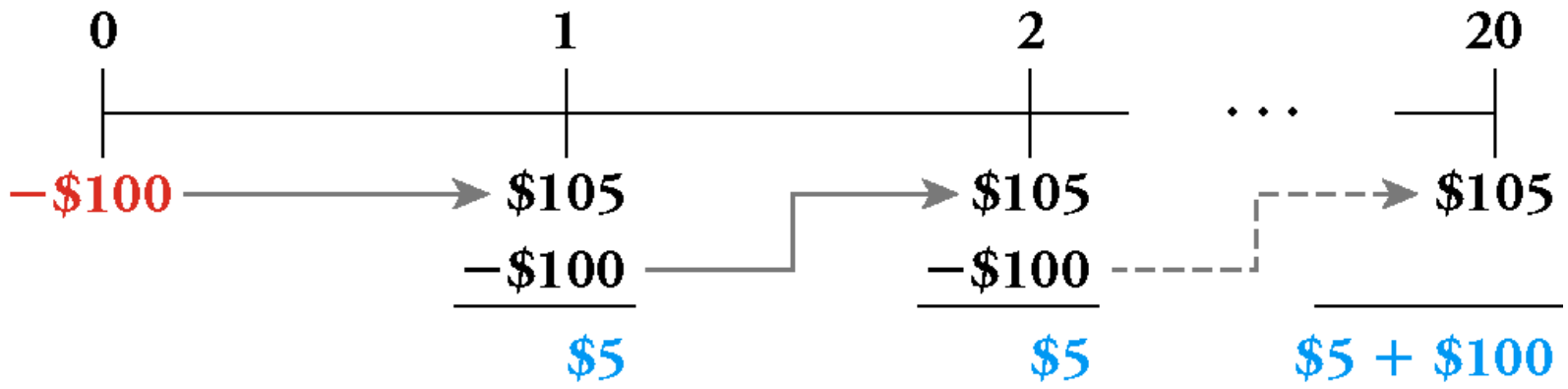
- **Παρούσα αξία μιας ετήσιας ράντας**
- Όπως και με τη διηνεκές ράντα, υποθέτουμε ότι η πρώτη πληρωμή πραγματοποιείται σε μία περίοδο από σήμερα.

$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots\ldots \frac{C}{(1+r)^N}$$

- Για να καταλήξουμε σε μία πιο απλή εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε και στη διηνεκή ράντα:
  - θα δημιουργήσουμε τη δική μας ετήσια ράντα

Ετήσια ράντα

- **Παρούσα αξία μιας ετήσιας ράντας**
- Με μια αρχική επένδυση 100$ με επιτόκιο 5%, μπορείτε να δημιουργήσετε μια 20ετή ετήσια ράντα ύψους 5$ ετησίως, συν το ότι θα λάβετε επιπλέον 100$ όταν κλείσετε το λογαριασμό στο τέλος των 20 ετών:



Ετήσια ράντα

- **Παρούσα αξία μιας ετήσιας ράντας**
- Ο **Νόμος της Μίας Τιμής** μας λέει ότι επειδή χρειάστηκε μόνο μια αρχική επένδυση 100$ για να δημιουργηθούν οι ταμειακές ροές στο χρονοδιάγραμμα, η **Παρούσα Αξία** αυτών των ταμειακών ροών είναι 100$:

$$\$100 = PV\left(20\,\text{ετής ράντα ύψους \$5 ετησίως}\right) + PV\left(\$100\,\text{σε 20 χρόνια}\right)$$

- Αναδιατάσσοντας

$$PV\left(20\text{-year annuity of \$5 per year}\right) = \$100 - PV\left(\$100 \text{ in 20 years}\right)$$

$$= 100 - \frac{100}{(1.05)^{20}} = \$100 - \$37.69 = \$62.31$$

Ετήσια ράντα

- **Παρούσα αξία μιας ετήσιας ράντας**
- Συνήθως θέλουμε να γνωρίζουμε την **Παρούσα Αξία** ως συνάρτηση των C, r και N
- Δεδομένου ότι το C μπορεί να γραφτεί ως 100$ * (0,05) = 5$, μπορούμε να το αναδιατάξουμε περαιτέρω:

$$PV(\text{20-year annuity of \$5 per year}) = \frac{\$5}{.05} - \frac{\frac{\$5}{.05}}{(1.05)^{20}} = \frac{\overset{C}{\$5}}{.05}\left(1 - \frac{1}{(1.05)^{\overset{N}{20}}}\right)$$

$$= \$5 \times \frac{1}{.05}\left(1 - \frac{1}{(1.05)^{20}}\right)$$

r

Ετήσια ράντα

- **Παρούσα αξία μιας ετήσιας ράντας**
- Γενική εξίσωση για τον υπολογισμό της **Παρούσας Αξίας** μιας ετήσιας ράντας:

$$PV\left(\text{Annuity of } C \text{ for } N \text{ periods with Interest Rate } r\right) = C \times \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**

Είστε ο τυχερός νικητής μιας λαχειοφόρου αγοράς με χρηματικό έπαθλο είτε:

(α) 30 πληρωμές του 1 εκ. $ ετησίως (ξεκινώντας από σήμερα)

(β) 15 εκ. $ που καταβάλλονται σήμερα

Εάν το επιτόκιο είναι 8%, ποια επιλογή θα πρέπει να επιλέξετε;

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**
- **Σχεδιασμός**
- Η επιλογή (α) προβλέπει 30 εκ. $ ως χρηματικό έπαθλο, αλλά καταβαλλόμενα σε βάθος χρόνου.
- Για να αξιολογήσουμε σωστά αυτή την επιλογή, πρέπει να τη μετατρέψουμε στην **Παρούσα Αξία** της. Ακολουθεί το χ**ρονοδιάγραμμα**:



Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**

- Επειδή η πρώτη πληρωμή αρχίζει σήμερα, η τελευταία πληρωμή θα γίνει σε 29 χρόνια (συνολικά 30 πληρωμές). Το 1 εκ. $ την ημερομηνία 0 έχει ήδη δηλωθεί σε όρους **Παρούσας Αξίας**, αλλά πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα αξία των υπόλοιπων πληρωμών.
- Η περίπτωση αυτή μοιάζει με μια ράντα 29 ετών με 1 εκ. $ ετησίως, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της ετήσιας ράντας.

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**
- **Εκτέλεση**
- Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ετήσιας ράντας

$$PV\left(\text{29ετής ετήσια ράντα ύψους \$1 εκατομμυρίου με 8\% επιτόκιο}\right)$$

$$= \$1 \text{ εκατομμύριο} \times \frac{1}{0,08}\left(1 - \frac{1}{1,08^{29}}\right)$$

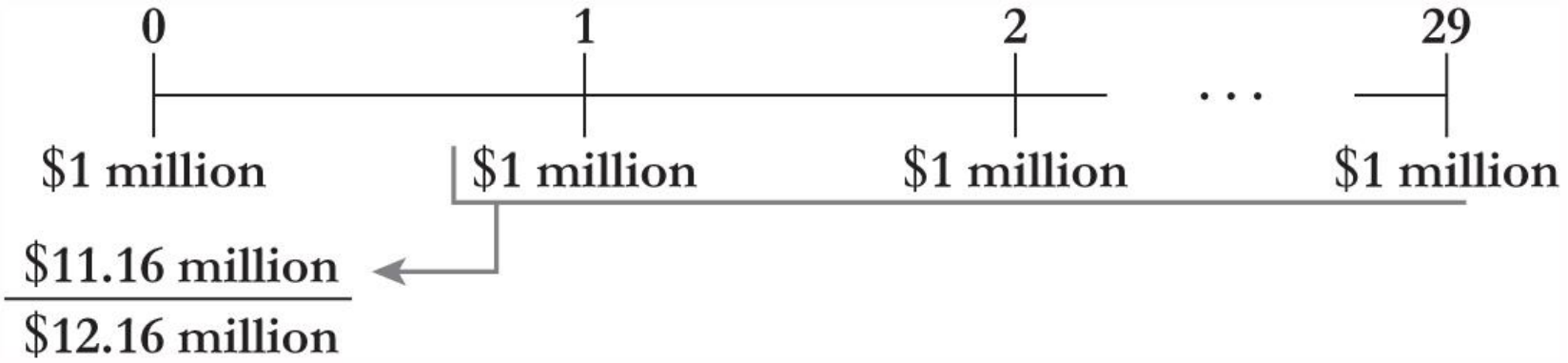
$$= \$1 \text{ εκατομμύριο} \times 11,16$$

$$= \$11,16 \text{ εκατομμύρια σήμερα}$$

- Η **συνολική** Παρούσα Αξία των ταμειακών ροών είναι 1 εκ. $ + 11,16 εκ. $ = 12,16 εκ. $.

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**
- Σε μορφή χρονοδιαγράμματος



- Η επιλογή (β), 15 εκ. $ προκαταβολικά, είναι πιο **πολύτιμη** - παρόλο που το συνολικό χρηματικό ποσό που καταβάλλεται είναι το μισό από αυτό της επιλογής (α).

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ΠΑ μιας ετήσιας ράντας ως έπαθλο μια λαχειοφόρου αγοράς**
- **Αξιολόγηση**
- Ο λόγος για τη διαφορά είναι η **διαχρονική αξία** του χρήματος.
- Αν έχετε τα 15 εκ. $ σήμερα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε 1 εκ. $ άμεσα και να **επενδύσετε** τα υπόλοιπα 14 εκ. $ με επιτόκιο 8%.
- Αυτή η στρατηγική θα σας δώσει 14 εκ. $ × 8% = 1,12 εκ. $ ετησίως στο διηνεκές!
- Εναλλακτικά, μπορείτε να ξοδέψετε 15 εκ. $ - 11,16 εκ. $ = 3,84 εκ. $ σήμερα και να επενδύσετε τα υπόλοιπα 11,16 εκ. $, γεγονός που θα σας επιτρέψει να αποσύρετε 1 εκ. $ κάθε χρόνο για τα επόμενα 29 χρόνια πριν εξαντληθεί ο λογαριασμός σας.

Ετήσια ράντα

- **Μελλοντική αξία μιας ετήσιας ράντας**

$$FV\left(\text{Annuity}\right) = PV \times \left(1+r\right)^{N}$$

$$= \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+r\right)^{N}}\right) \times \left(1+r\right)^{N}$$

$$= C \times \frac{1}{r}\left(\left(1+r\right)^{N} - 1\right)$$

Ετήσια ράντα

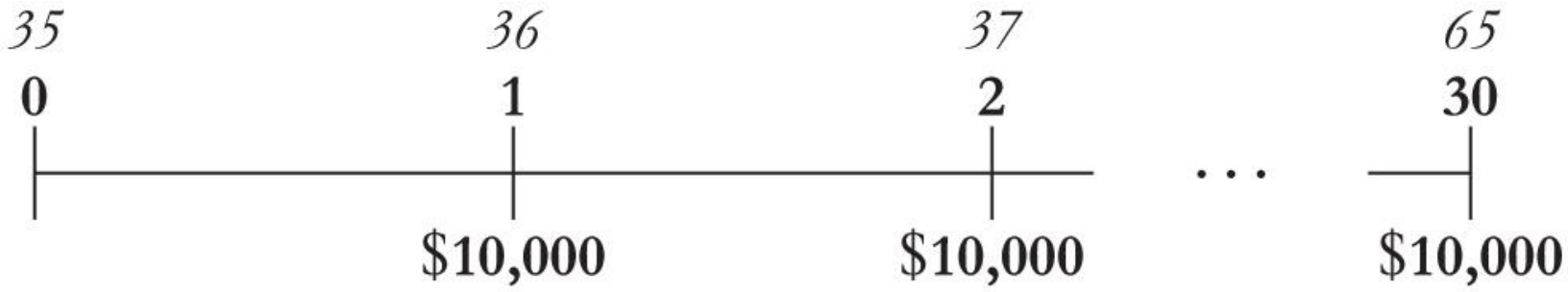
- **Παράδειγμα ετήσιας ράντας συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου**

Η Ellen είναι 35 ετών και έχει αποφασίσει ότι ήρθε η ώρα να σχεδιάσει την συνταξιοδότησή της. Στο τέλος κάθε έτους, μέχρι να γίνει 65 ετών, θα αποταμιεύει 10.000$ σε ένα λογαριασμό συνταξιοδότησης.

Αν ο λογαριασμός κερδίζει 10% ετησίως, πόσα θα έχει η Ellen στο λογαριασμό της στην ηλικία των 65 ετών;

Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ετήσιας ράντας συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου**
- **Σχεδιασμός**
- Όπως πάντα, ξεκινάμε με ένα χρονοδιάγραμμα.
- Σε αυτή την περίπτωση, είναι χρήσιμο να παρακολουθείτε τόσο τις ημερομηνίες όσο και την ηλικία της Έλεν:



Ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα ετήσιας ράντας συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου**
- Το αποταμιευτικό πλάνο της Ellen μοιάζει με μια ετήσια ράντα 10.000 $ ετησίως για 30 χρόνια.
- **Συμβουλή** : Είναι εύκολο να μπερδευτείτε όταν κοιτάτε μόνο την ηλικία και όχι τόσο τις ημερομηνίες όσο και την ηλικία.
- Ένα **συνηθισμένο λάθος** είναι να νομίζετε ότι υπάρχουν μόνο 65 - 36 = 29 πληρωμές.
- Γράφοντας τόσο τις ημερομηνίες όσο και την ηλικία αποφεύγεται αυτό το πρόβλημα.
- Για να προσδιορίσουμε το ποσό που θα έχει η Ellen στον λογαριασμό της στην ηλικία των 65 ετών, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία αυτής της προσόδου.

Ετήσια ράντα

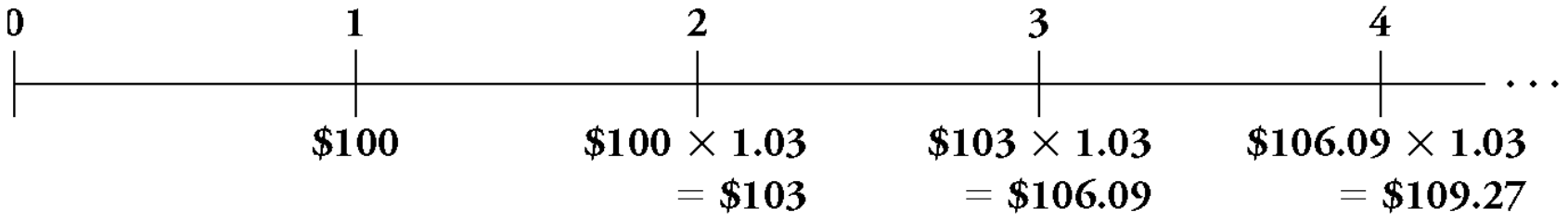
- **Παράδειγμα ετήσιας ράντας συνταξιοδοτικού αποταμιευτικού σχεδίου**
- **Εκτέλεση**

$$FV = \$10{,}000 \times \frac{1}{0.10}\left(1.10^{30} - 1\right)$$
$$= \$10{,}000 \times 164.49$$
$$= \$1.645 \text{ million at age } 65$$

- **Αξιολόγηση**
- Επενδύοντας 10.000$ ετησίως για 30 χρόνια (συνολικά 300.000$) και κερδίζοντας τόκους από αυτές τις επενδύσεις, ο ανατοκισμός θα επιτρέψει στην Ellen να συνταξιοδοτηθεί με 1,645 εκ. $.

Αύξηση ταμειακών ροών

- Μια **αυξανόμενη διηνεκής ράντα** είναι μια ακολουθία ταμειακών ροών που προκύπτουν σε τακτά χρονικά διαστήματα και αυξάνονται με έναν **σταθερό ρυθμό για πάντα**.
- Για παράδειγμα, μια αυξανόμενη διηνεκής ράντα με μια πρώτη πληρωμή 100$ που αυξάνεται με ρυθμό 3% έχει το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



Αύξηση ταμειακών ροών

- **Παρούσα αξία μιας αυξανόμενης διηνεκούς ράντας**

$$PV\left(\text{Growing perpetuity}\right) = \frac{C}{r - g}$$

Αύξηση ταμειακών ροών

- **Παράδειγμα κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα**

Στο προηγούμενο παράδειγμα, σχεδιάζατε να δωρίσετε χρήματα στο πανεπιστήμιό σας για να χρηματοδοτήσετε ένα ετήσιο πάρτι αποφοίτησης ύψους 30.000$. Δεδομένου ενός επιτοκίου 8% ετησίως, η απαιτούμενη δωρεά ήταν η **Παρούσα αξία** των:

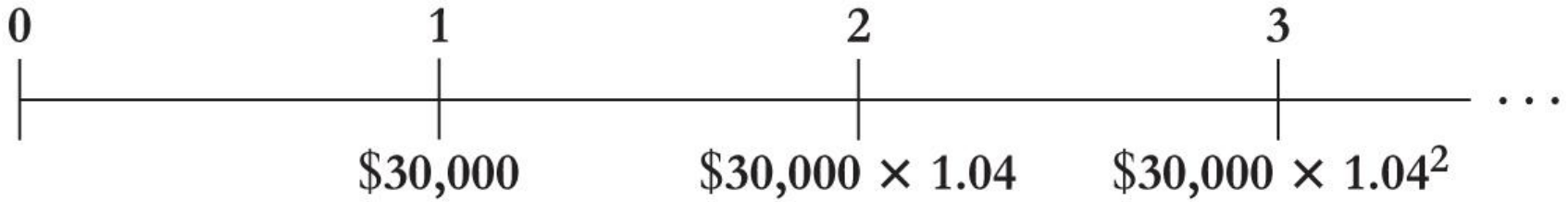
$$PV = \frac{\$30,000}{0.08} = \$375,000 \text{ today}$$

Ωστόσο, πριν ο σύλλογος φοιτητών δεχτεί τα χρήματά σας ζήτησε να αυξήσετε τη δωρεά ώστε να ληφθεί υπόψη η επίδραση του πληθωρισμού στο κόστος του πάρτι τα επόμενα χρόνια.

Παρόλο που 30.000$ επαρκούν για το πάρτι του επόμενου έτους, οι φοιτητές εκτιμούν ότι το κόστος του πάρτι θα αυξάνεται κατά 4% ετησίως στη συνέχεια. Για να ικανοποιήσετε το αίτημά τους, πόσο πρέπει να δωρίσετε τώρα;

Αύξηση ταμειακών ροών

- **Παράδειγμα κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα**
- **Σχεδιασμός**



- Το κόστος του πάρτι την επόμενη χρονιά είναι 30.000$ και στη συνέχεια το κόστος αυξάνεται 4% ετησίως για πάντα.
- Από το χρονοδιάγραμμα, αναγνωρίζουμε τη μορφή μιας αυξανόμενης διηνεκούς ράντας και μπορούμε να την αποτιμήσουμε με αυτόν τον τρόπο.

Αύξηση ταμειακών ροών

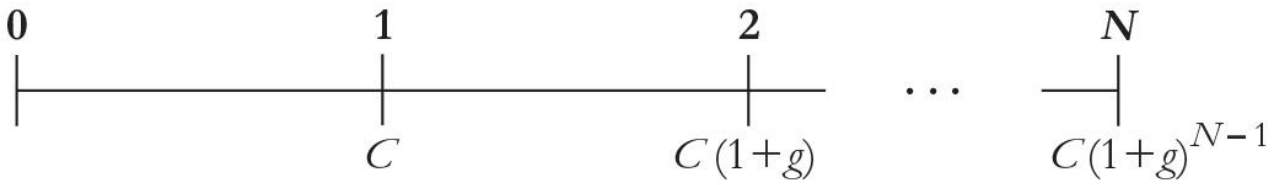
- **Παράδειγμα κληροδοτώντας μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα**
- **Εκτέλεση**
- Για να χρηματοδοτήσετε το αυξανόμενο κόστος, πρέπει να παρέχετε την παρούσα αξία σήμερα των:

$$PV = \frac{\$30,000}{(0.08 - 0.04)} = \$750,000 \text{ today}$$

- **Αξιολόγηση**
- Πρέπει να **διπλασιάσετε** το μέγεθος που θα δωρίσετε!

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- Μια **αυξανόμενη ετήσια ράντα** είναι μια ακολουθία Ν αυξανόμενων ταμειακών ροών, που καταβάλλονται σε τακτά χρονικά διαστήματα.
- Είναι μια αυξανόμενη διηνεκή ράντα που κάποια στιγμή λήγει.
- Το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα δείχνει μια αυξανόμενη ετήσια ράντα με αρχική ταμειακή ροή C, η οποία αυξάνεται με ρυθμό g κάθε περίοδο μέχρι την περίοδο Ν:



Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παρούσα αξία μιας αυξανόμενης ετήσιας ράντας**

$$PV = C \times \frac{1}{r - g}\left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{N}\right)$$

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα συνταξιοδοτικής αποταμίευσης με αυξανόμενη ετήσια ράντα**

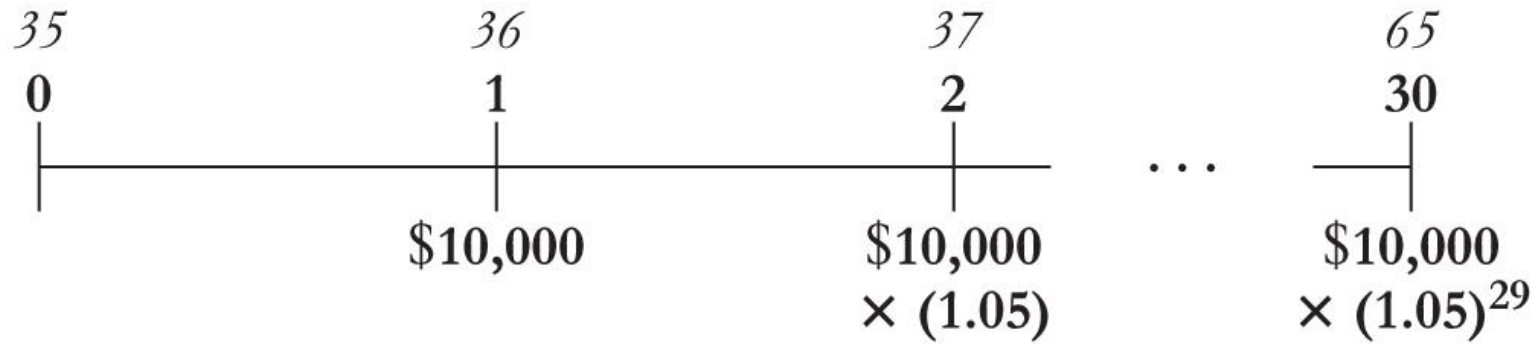
Στο προηγούμενο παράδειγμα η Ellen σκεφτόταν να αποταμιεύει 10.000$ ετησίως για τη συνταξιοδότησή της.

Αν και 10.000$ είναι το μέγιστο ποσό που μπορεί να αποταμιεύσει τον πρώτο χρόνο, αναμένει ότι ο μισθός της θα αυξάνεται κάθε χρόνο, ώστε να είναι σε θέση να αυξάνει τις αποταμιεύσεις της κατά 5% ετησίως.

Με αυτό το πλάνο, αν κερδίζει 10% ετησίως από τις αποταμιεύσεις της, πόσα χρήματα θα έχει η Ellen στο λογαριασμό της στην ηλικία των 65 ετών;

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα συνταξιοδοτικής αποταμίευσης με αυξανόμενη ετήσια ράντα**
- **Σχεδιασμός**
- Το νέο σχέδιο αποταμίευσης αντιπροσωπεύεται από το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



- Αυτό το παράδειγμα περιλαμβάνει μια αυξανόμενη ετήσια ράντα 30 ετών, με ρυθμό ανάπτυξης 5% και αρχική ταμειακή ροή 10.000$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή εξίσωση για να υπολογίσουμε την **Παρούσα Αξία** αυτής της αυξανόμενης ετήσιας ράντας. Στη συνέχεια μπορούμε να α υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία.

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα συνταξιοδοτικής αποταμίευσης με αυξανόμενη ετήσια ράντα**
- **Εκτέλεση**
- Η ΠΑ της αυξανόμενης ετήσιας ράντας της Ellen είναι:

$$PV = \$10{,}000 \times \frac{1}{0.10 - 0.05}\left(1 - \left(\frac{1.05}{1.10}\right)^{30}\right)$$

$$= \$10{,}000 \times 15.0463$$

$$= \$150{,}463 \text{ today}$$

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα συνταξιοδοτικής αποταμίευσης με αυξανόμενη ετήσια ράντα**
- Το προτεινόμενο σχέδιο αποταμίευσης της Ellen ισοδυναμεί με 150.463 $ στην τράπεζα σήμερα.
- Για να προσδιορίσουμε το ποσό που θα έχει στην ηλικία των 65 ετών, πρέπει να μεταφέρουμε το ποσό αυτό 30 χρόνια μπροστά:

$$FV = \$150,463 \times 1.10^{30}$$

$$= \$2,625 \text{ million in 40 years}$$

Αυξανόμενη ετήσια ράντα

- **Παράδειγμα συνταξιοδοτικής αποταμίευσης με αυξανόμενη ετήσια ράντα**

- **Αξιολόγηση**
- Η Ellen θα έχει 2,625 εκ. $ στην ηλικία των 65 ετών χρησιμοποιώντας το νέο αποταμιευτικό σχέδιο.
- Το ποσό αυτό είναι σχεδόν 1 εκ. $ περισσότερο από ό,τι είχε χωρίς τις πρόσθετες ετήσιες αυξήσεις των αποταμιεύσεων.
- Επειδή αυξάνει το ποσό της αποταμίευσης κάθε χρόνο και οι τόκοι των σωρευτικών αυξήσεων συνεχίζουν να ανατοκίζονται, η τελική αποταμίευση είναι πολύ μεγαλύτερη.

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- Σε ορισμένες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε τις παρούσες ή/και μελλοντικές τιμές ως εισροές και λύνουμε για τη μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.
- Λύνοντας ως προς τις **ταμειακές ροές μιας ετήσιας ράντας** (πληρωμή δανείου)

$$C = \frac{P}{\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)}$$

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- **Παράδειγμα : Υπολογισμός μια δανειακής καταβολής**

Η επιχείρησή σας σχεδιάζει να αγοράσει μια αποθήκη για 100.000$. Η τράπεζα σας προσφέρει δάνειο 30 ετών με ίσες ετήσιες πληρωμές και επιτόκιο 8% ετησίως.

Η τράπεζα απαιτεί από την επιχείρησή σας να καταβάλει το 20% της τιμής αγοράς ως προκαταβολή, οπότε μπορείτε να δανειστείτε μόνο 80.000$. Ποια είναι η ετήσια πληρωμή του δανείου;

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- **Παράδειγμα : Υπολογισμός μια δανειακής καταβολής**
- **Σχεδιασμός**
- Ξεκινάμε με το χρονοδιάγραμμα (από τη σκοπιά της τράπεζας):



- Μπορούμε να λύσουμε ως προς την πληρωμή του δανείου, C, δεδομένου ότι:
  - N = 30, r = 0,08 και P = 80.000$

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- **Παράδειγμα : Υπολογισμός μια δανειακής καταβολής**
- **Εκτέλεση**

$$C = \frac{P}{\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)} = \frac{80{,}000}{\frac{1}{0.08}\left(1 - \frac{1}{(1.08)^{30}}\right)} = \$7106.19$$

- **Αξιολόγηση**
- Η επιχείρησή σας θα πρέπει να πληρώνει 7.106,19$ κάθε χρόνο για την αποπληρωμή του δανείου.
- Η τράπεζα είναι πρόθυμη να δεχτεί αυτές τις πληρωμές επειδή η ΠΑ των 30 ετήσιων πληρωμών των 7106,19$ με επιτόκιο 8% ετησίως είναι ακριβώς ίση με τα 80.000$ που σας δίνει σήμερα.

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- Λύνοντας ως προς το **ποσοστό απόδοσης**

- Το **ποσοστό απόδοσης** είναι το ποσοστό με το οποίο η **Παρούσα Αξία** του οφέλους αντισταθμίζει ακριβώς το κόστος.

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- **Παράδειγμα : Υπολογισμός ποσοστού απόδοσης**

- Ας υποθέσουμε ότι έχετε μια επενδυτική ευκαιρία που απαιτεί μια επένδυση 1.000$ σήμερα και θα σας αποφέρει 2.000$ σε έξι χρόνια.
- Ποιο επιτόκιο, r, θα χρειαστείτε ώστε η Παρούσα Αξία του ποσού που θα λάβετε να είναι ακριβώς ίση με την Παρούσα Αξία με του ποσού που καταβάλλετε;

$$1000 = \frac{2000}{(1+r)^6}$$

Λύνοντας ως προς άλλες μεταβλητές

- **Παράδειγμα : Υπολογισμός ποσοστού απόδοσης**

- **Ανακατατάσσοντας**:

$$1000 \times (1+r)^6 = 2000$$

$$1+r = \left(\frac{2000}{1000}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 1.1225, \text{or}$$

$$r = 12.25\%$$

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

- Όλα όσα μάθαμε για τις ετήσιες ακολουθίες ταμειακών ροών ισχύουν και για μηνιαίες ακολουθίες ταμειακών ροών, εφόσον:

1. Το επιτόκιο καθορίζεται ως μηνιαίο επιτόκιο
2. Ο αριθμός των περιόδων εκφράζεται σε μήνες

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

- **Παράδειγμα αξιολόγησης μιας ετήσιας ράντας με μηνιαίες ταμειακές ροές**

Πρόκειται να αγοράσετε ένα νέο αυτοκίνητο και έχετε δύο επιλογές πληρωμής.

α)Μπορείτε να πληρώσετε 20.000$ σε μετρητά αμέσως

β)Μπορείτε να πάρετε δάνειο που απαιτεί να πληρώνετε 500$ κάθε μήνα για τους επόμενους 48 μήνες (τέσσερα χρόνια).

Εάν το μηνιαίο επιτόκιο που κερδίζετε από τα μετρητά σας είναι 0,5%, ποια επιλογή θα πρέπει να επιλέξετε;

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

- **Παράδειγμα αξιολόγησης μιας ετήσιας ράντας με μηνιαίες ταμειακές ροές**

- **Λύση**
- Ας ξεκινήσουμε γράφοντας το χρονοδιάγραμμα των πληρωμών του δανείου:



- Το χρονοδιάγραμμα δείχνει ότι το δάνειο είναι μια **ετήσια ράντα** 48 περιόδων.

Μη ετήσιες ταμειακές ροές

- **Παράδειγμα αξιολόγησης μιας ετήσιας ράντας με μηνιαίες ταμειακές ροές**
- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ετήσιας ράντας, η **Παρούσα Αξία** είναι:

$$PV\left(\text{ετήσια ράντα 48 περιόδων ύψους \$500}\right) = \$500 \times \frac{1}{0,005}\left(1 - \frac{1}{1,005^{48}}\right)$$

$$= \$21.290$$

- **Αξιολόγηση**
- Η λήψη του δανείου ισοδυναμεί με την καταβολή 21.290$ σήμερα, η οποία είναι πιο δαπανηρή από την καταβολή μετρητών.
- Θα πρέπει να πληρώσετε **μετρητά** για το αυτοκίνητο.

ΜΕ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΉΡΩΣΗ ΑΥΤΉΣ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΙΔΙΩΤΙΚΉΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΟΥ ΘΑ ΑΚΟΛΟΥΘΉΣΕΙ, ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΣΤΕ ΣΕ ΘΕΣΗ ΝΑ:

- Να **υπολογίζετε** την **Παρούσα** & **Μελλοντική** Αξία μιας ακολουθίας ταμειακών ροών
- Να **υπολογίζετε** την **Παρούσα Αξία ετήσιας** ράντας και **διηνεκής** ράντας
- Να **υπολογίζετε** την **Παρούσα Αξία** για **διηνεκή** και ετήσια ράντα όταν οι ταμειακές ροές **αυξάνονται με σταθερό ρυθμό**
- Να **υπολογίζετε** την ταμειακή ροή μιας ράντας
- Να **υπολογίζετε** την **Παρούσα & Μελλοντική Αξία** για μη ετήσιες ταμειακές ροές
- Να **λύνετε** προβλήματα με ακολουθίες ταμειακών ροών

READING AND FOLLOW UP

- **Προτεινόμενη Βιβλιογραφία**
  - Αρχές Χρηματοοικονομικής των Επιχειρήσεων, Berk, J., DeMarzo, P., and Harford, J., 6/4 η Εκδοση, [Κεφ. 4]
  - Αρχές Χρηματοοικονομικής των Επιχειρήσεων, Brealey R., Myers S., Allen F., 3η Έκδοση, [Κεφ. 2]

- **Προτεινόμενη Βιβλιογραφία**
  - Principles of Corporate Finance, Brealey, R., Myers, S., Allen, F., & Edmans, A., McGraw-Hill, latest edition, [Ch. 2]
  - Applied Corporate Finance, Damodaran A., Wiley, latest edition, [Ch. 5]
  - Corporate Finance, Hillier D., Ross S., Westerfield R., Jaffe J., & Jordan B., McGraw-Hill, latest edition, [Ch.5-6]