Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 4:

Μέτρηση Απόδοσης - Κινδύνου Αξιογράφων και Χαρτοφυλάκιο Μετοχών

Υπολογισμός Απόδοσης

Η απόδοση ενός αξιογράφου μετρά το κέρδος ή τη ζημία που αποκομίζει ο επενδυτής σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Η απόδοση προκύπτει από:

- **Μεταβολή της τιμής** του αξιογράφου και
- **Εισόδημα** που αυτό αποδίδει (π.χ. μέρισμα ή τόκος).

Γενικός τύπος συνολικής απόδοσης:

$$R = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0}$$

όπου:

- P_0= αρχική τιμή
- P_1= τελική τιμή
- D= μέρισμα ή τόκος

Υπολογισμός Απόδοσης

1. Απλή απόδοση (Simple Return)

Εκφράζει τη μεταβολή της τιμής ενός αξιογράφου σε σχέση με την αρχική του τιμή.

$$R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

όπου:

- P_0= αρχική τιμή
- P_1= τελική τιμή

Υπολογισμός Απόδοσης

2. Λογαριθμική απόδοση (Logarithmic / Continuous Return)

Υπολογίζεται με τη χρήση φυσικών λογαρίθμων και χρησιμοποιείται συχνά σε θεωρητικά και στατιστικά μοντέλα.

$$r = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

Βασικά Χαρακτηριστικά και Πλεονεκτήματα:

- **Προσθετικότητα (Additivity):** Η σημαντικότερη ιδιότητα είναι ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις μιας περιόδου απλά αθροίζονται για να δώσουν τη συνολική λογαριθμική απόδοση πολλαπλών περιόδων. Αυτό απλοποιεί τους υπολογισμούς σε σχέση με τις απλές αποδόσεις (που πρέπει να πολλαπλασιαστούν).
- **Συνέχεια (Continuity):** Πρόκειται για μια συνεχή μέτρηση (συνεχής απόδοση), ιδανική για μαθηματικά μοντέλα, όπως η Μοντελοποίηση Αγοράς και η Θεωρία Χαρτοφυλακίου, όπου οι αποδόσεις θεωρούνται ότι κατανέμονται συνεχώς.
- **Συμμετρία:** Οι θετικές και αρνητικές λογαριθμικές αποδόσεις έχουν μεγαλύτερη συμμετρία και είναι πιο κοντά στην κανονική κατανομή (Normal Distribution), σε σύγκριση με τις απλές αποδόσεις

Υπολογισμός Απόδοσης

3. Απόδοση μερίσματος και συνολική απόδοση

Απόδοση μερίσματος (Dividend Yield):

$$R_d = \frac{D}{P_0}$$

όπου D είναι το μέρισμα.

Συνολική απόδοση (Total Return):
Περιλαμβάνει τόσο τη μεταβολή της τιμής όσο και το μέρισμα.

$$R_{\text{total}} = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0}$$

Υπολογισμός Απόδοσης
Αριθμητικό παράδειγμα σύγκρισης

Αρχική τιμή: $P_0 = 100$
Τελική τιμή: $P_1 = 110$

- **Απλή απόδοση**:

$$R = \frac{110 - 100}{100} = 10\%$$

- **Λογαριθμική απόδοση**:

$$r = \ln\left(\frac{110}{100}\right) = \ln(1{,}10) \approx 9{,}53\%$$

→ Για μικρές μεταβολές οι δύο αποδόσεις είναι σχεδόν ίδιες, αλλά η **λογαριθμική απόδοση (πώς εξελίσσεται η απόδοση στον χρόνο)** προτιμάται στη θεωρία χαρτοφυλακίου και στη μέτρηση κινδύνου.

Αναμενόμενη Απόδοση (Expected Return)

- Η **αναμενόμενη απόδοση** (expected return) είναι η απόδοση που αναμένεται να επιτευχθεί στο μέλλον με βάση ιστορικά δεδομένα ή εκτιμήσεις για διαφορετικά σενάρια.

- Αναλύεται συνήθως με τους εξής τρόπους:

1. **Μέσος όρος ιστορικών αποδόσεων**
2. **Σταθμισμένος μέσος όρος πιθανοτήτων**

Αναμενόμενη Απόδοση (Expected Return)

1. **Μέσος όρος ιστορικών αποδόσεων**

Η αναμενόμενη απόδοση με βάση ιστορικά δεδομένα υπολογίζεται συνήθως ως ο **αριθμητικός μέσος όρος** των αποδόσεων μιας επένδυσης (μετοχής, χαρτοφυλακίου κ.λπ.) κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης παρελθούσας χρονικής περιόδου.

Τύπος:

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$$

Χρήση:
Κατάλληλος όταν οι παρελθούσες συνθήκες θεωρούνται αντιπροσωπευτικές του μέλλοντος.

Αναμενόμενη Απόδοση
(Expected Return)

2. Σταθμισμένος μέσος όρος πιθανοτήτων

Χρησιμοποιείται όταν υπάρχουν διαφορετικά πιθανά σενάρια, το καθένα με συγκεκριμένη πιθανότητα.

Τύπος:

$$E(R) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_i$$

όπου:

p_i= πιθανότητα του σεναρίου i

R_i= απόδοση στο σενάριο i

n = συνολικός αριθμός σεναρίων

Χρήση:
Κατάλληλος τύπος για ανάλυση σεναρίων (π.χ. ύφεση, σταθερότητα, ανάπτυξη). Βοηθά τον επενδυτή ή τον διαχειριστή χαρτοφυλακίου να συγκρίνει εναλλακτικές επενδυτικές επιλογές, να αξιολογήσει τον κίνδυνο και να επιλέξει τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για δεδομένο επίπεδο κινδύνου.

Διακύμανση και Τυπική Απόκλιση (Variance and Standard Deviation)

Διακύμανση και **Τυπική Απόκλιση** είναι βασικά μέτρα κινδύνου στη χρηματοοικονομική και στη διαχείριση χαρτοφυλακίου.

Μέτρηση μεταβλητότητας:

- **Διακύμανση**: μετρά πόσο αποκλίνουν οι αποδόσεις ενός αξιογράφου από τη μέση (αναμενόμενη) απόδοση.
- **Τυπική απόκλιση**: είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης και εκφράζει τη μεταβλητότητα στις ίδιες μονάδες με τις αποδόσεις, άρα είναι πιο εύκολα ερμηνεύσιμη.
- Όσο μεγαλύτερες είναι, τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα των αποδόσεων.

Διακύμανση Αποδόσεων (Variance)

1. Με βάση ιστορικά δεδομένα (δειγματική μορφή):

Όταν χρησιμοποιούμε ιστορικά δεδομένα, συνήθως υπολογίζουμε τη διακύμανση δείγματος:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2$$

όπου:

- $\bar{R}$ = μέση ιστορική απόδοση
- n = ο συνολικός αριθμός των ιστορικών παρατηρήσεων (μέγεθος δείγματος).
- n-1 = οι βαθμοί ελευθερίας (χρησιμοποιείται για αμερόληπτη εκτίμηση δείγματος).

Διακύμανση Αποδόσεων (Variance)

2. Με βάση πιθανότητες (θεωρητική μορφή):

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \ (R_i - E(R))^2$$

όπου:

- R_i= απόδοση στο σενάριο i
- $E(R)$= αναμενόμενη απόδοση
- p_i= πιθανότητα του σεναρίου i

Τυπική Απόκλιση
(St. Deviation)

Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

- Η τυπική απόκλιση χρησιμοποιείται ευρέως ως **μέτρο κινδύνου**.
- Χρησιμοποιείται για τη σύγκριση αξιογράφων και για τον υπολογισμό του κινδύνου χαρτοφυλακίων (σε συνδυασμό με συσχέτιση (correlation) και συνδιακύμανση (covariance)).

Σύγκριση Αξιογράφων με βάση τον Κίνδυνο

- Επιτρέπουν τη **σύγκριση διαφορετικών αξιογράφων** ως προς τον κίνδυνο, ανεξάρτητα από το επίπεδο απόδοσης.
- Δύο επενδύσεις με ίδια αναμενόμενη απόδοση θεωρούνται διαφορετικές, αν έχουν διαφορετική τυπική απόκλιση.
- Προτιμάται, ceteris paribus, το αξιόγραφο με **χαμηλότερη τυπική απόκλιση**.

Σύνδεση Διακύμανσης & Τυπικής Απόκλισης με Χαρτοφυλάκιο δύο αξιογράφων

Έστω χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από δύο μετοχές A και B.

1. **Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου**

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$$

όπου:

- w_A, w_B= ποσοστά επένδυσης ($w_A + w_B = 1$)
- $E(R_A), E(R_B)$= αναμενόμενες αποδόσεις των A και B

Σύνδεση Διακύμανσης & Τυπικής Απόκλισης με Χαρτοφυλάκιο δύο αξιογράφων

2. Διακύμανση χαρτοφυλακίου δύο αξιογράφων

Η διακύμανση χαρτοφυλακίου μετρά τον συνολικό κίνδυνο (ή αβεβαιότητα) του χαρτοφυλακίου και υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις επιμέρους διακυμάνσεις (κίνδυνο) των μετοχών και τις συνδιακυμάνσεις (σχέσεις) μεταξύ τους.

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

όπου:

- σ_A, σ_B= τυπικές αποκλίσεις των A και B
- ρ_{AB}= συντελεστής συσχέτισης μεταξύ A και B

3. Τυπική απόκλιση χαρτοφυκίου

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

Σύνδεση Διακύμανσης & Τυπικής Απόκλισης με Χαρτοφυλάκιο δύο αξιογράφων

4. Συνδιακύμανση (Covariance)

Η συνδιακύμανση μετρά το πώς μεταβάλλονται ταυτόχρονα οι αποδόσεις δύο περιουσιακών στοιχείων.

Για αποδόσεις $R_\mathrm{A}, R_\mathrm{B}$:

$$\mathrm{Cov}(R_\mathrm{A}, R_\mathrm{B}) = \mathbb{E}[(R_\mathrm{A} - \mathbb{E}(R_\mathrm{A}))(R_\mathrm{B} - \mathbb{E}(R_\mathrm{B}))]$$

Ερμηνεία:

- **Θετική συνδιακύμανση**: οι αποδόσεις κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση
- **Αρνητική συνδιακύμανση**: κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις
- **Μηδενική συνδιακύμανση**: δεν υπάρχει γραμμική σχέση

Συντελεστής Συσχέτισης (correlation coefficient)

$$\rho_{AB} = \frac{\mathrm{Cov}(A, B)}{\sigma_A \ \sigma_B} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \ \sigma_B}$$

όπου:

- σ_{AB} = συνδιακύμανση (covariance) των μετοχών Α, B
- σ_{A} = τυπική απόκλιση του A
- σ_{B} = τυπική απόκλιση του B

$$\boldsymbol{-1 \leq \rho_{\mathrm{AB}} \leq 1}$$

- $\rho_{\mathrm{AB}} = 1$: Τέλεια θετική συσχέτιση
- $\rho_{\mathrm{AB}} = -1$: Τέλεια αρνητική συσχέτιση
- $\rho_{\mathrm{AB}} = 0$: Καμία γραμμική συσχέτιση

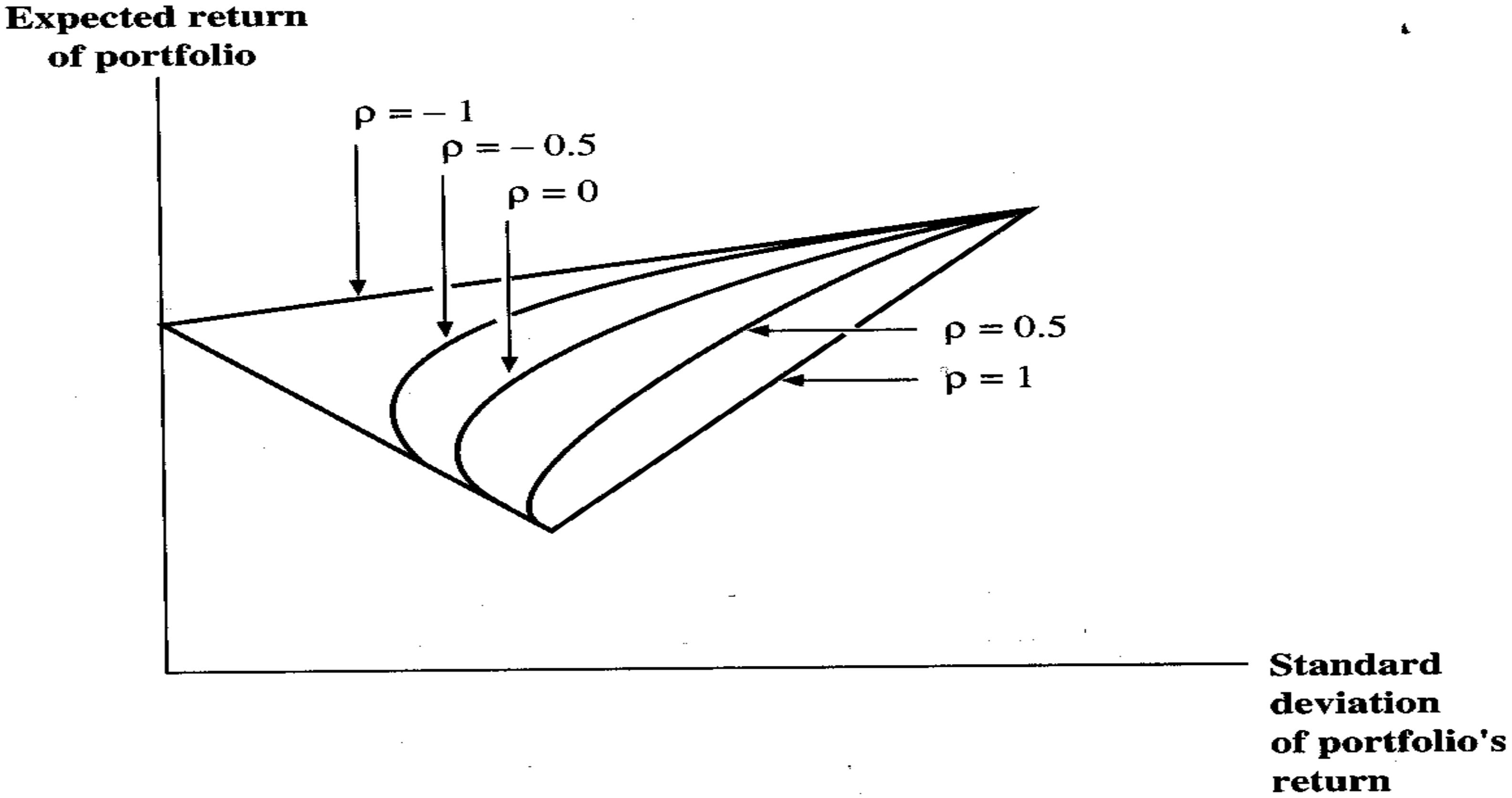
Ρόλος της συσχέτισης στη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου (Diversification effect)

- Η συσχέτιση είναι κεντρική έννοια στη διαφοροποίηση:

- **Υψηλή θετική συσχέτιση (**$\rho \approx +1$**)**
  - Μικρό ή μηδενικό όφελος διαφοροποίησης
  - Τα αξιόγραφα κινούνται μαζί
- **Χαμηλή ή μηδενική συσχέτιση (**$\rho \approx 0$**)**
  - Σημαντική μείωση κινδύνου
  - Ο κίνδυνος χαρτοφυλακίου είναι μικρότερος από τον σταθμισμένο μέσο όρο (δηλ. $\sigma_p < w_{\mathrm{A}}\sigma_{\mathrm{A}} + w_{\mathrm{B}}\sigma_{\mathrm{B}}$)
- **Αρνητική συσχέτιση (**$\rho < 0$**)**
  - Πολύ ισχυρό όφελος διαφοροποίησης
  - Σε περίπτωση $\rho = -1$→ δυνατότητα **εξάλειψης κινδύνου**

- Η συσχέτιση είναι κρίσιμη για τη μείωση του συνολικού κινδύνου.
- Στόχος του επενδυτή: συνδυασμός αξιογράφων με **χαμηλή ή αρνητική συσχέτιση**.

Ρόλος της συσχέτισης στη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου (Diversification effect)



- Το σχήμα απεικονίζει τις καμπύλες χαρτοφυλακίων για διαφορετικά επίπεδα συσχέτισης μεταξύ δύο περιουσιακών στοιχείων.
- Όσο μικρότερη είναι η συσχέτιση, τόσο μεγαλύτερο είναι το όφελος της διαφοροποίησης. Αυτό σημαίνει ότι για το ίδιο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης, ο κίνδυνος μειώνεται και η καμπύλη πλησιάζει τον άξονα Y (χαμηλότερη τυπική απόκλιση).

Ρόλος της συσχέτισης στη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου (Diversification effect)

Παράδειγμα:

- $\sigma_1 = 20\%$
- $\sigma_2 = 10\%$
- $w_1 = w_2 = 0.5$
- $\rho = 0$

Σταθμισμένος μέσος:

$$0.5(20\%) + 0.5(10\%) = 15\%$$

Κίνδυνος χαρτοφυλακίου:

$$\sigma_p = \sqrt{0.25(0.20^2) + 0.25(0.10^2)} = \sqrt{0.0125} \approx 11.2\%$$

- **11.2% < 15%** ⟶ όφελος διαφοροποίησης
- Που σημαίνει ότι όταν συνδυάζεις δύο επενδύσεις που **δεν κινούνται μαζί ($\rho = 0$):**
  - οι αυξομειώσεις της μιας μερικώς ακυρώνουν της άλλης
  - άρα ο συνολικός κίνδυνος μειώνεται

Εισαγωγή στη χρήση του Excel

- Μέση απόδοση – AVERAGE

=AVERAGE(C2:C10)

- Τυπική απόκλιση (κίνδυνος) – STDEV

Για δείγμα: STDEV.S
Για πληθυσμό: STDEV.P

=STDEV(C2:C10)

- Συνδιακύμανση – COVARIANCE

=COVARIANCE.S(C2:C10; D2:D10)

- Συντελεστής συσχέτισης – CORREL

=CORREL(C2:C10; D2:D10)

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Ορισμός Αποτελεσματικού (Efficient) Χαρτοφυλακίου:

1. Ένα χαρτοφυλάκιο είναι αποτελεσματικό όταν για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου έχει την μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.
2. Ένα χαρτοφυλάκιο είναι αποτελεσματικό όταν για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης έχει τον χαμηλότερο κίνδυνο (**Minimum Variance Portfolio – MVP**).

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Έστω δύο μετοχές A και B με:

- Τυπικές αποκλίσεις: σ_A, σ_B
- Συσχέτιση: ρ
- Βάρη στο χαρτοφυλάκιο: $w_A, w_B = 1 - w_A$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho \sigma_A \sigma_B$$

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Στόχος μας είναι να βρούμε το w_A ώστε η διακύμανση να είναι ελάχιστη:

$$\min_{w_A} \sigma_p^2$$

Αντικαθιστούμε όπου $w_B = 1 - w_A$:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + (1 - w_A)^2\sigma_B^2 + 2w_A(1 - w_A)\rho\sigma_A\sigma_B$$

Απλοποιούμε:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + (1 - 2w_A + w_A^2)\sigma_B^2 + 2w_A(1 - w_A)\rho\sigma_A\sigma_B$$
$$\sigma_p^2 = w_A^2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B) + w_A(2\rho\sigma_A\sigma_B - 2\sigma_B^2) + \sigma_B^2$$

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Παίρνουμε την 1η παράγωγο για ελαχιστοποίηση ως προς w_A και την εξισώνουμε με το 0:

$$\frac{d\sigma_p^2}{dw_A} = 2w_A(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B) + (2\rho\sigma_A\sigma_B - 2\sigma_B^2) = 0$$

Διαιρούμε δια 2:

$$w_A(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B) + (\rho\sigma_A\sigma_B - \sigma_B^2) = 0$$

Λύνουμε για w_A:

$$\boxed{w_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B}}$$

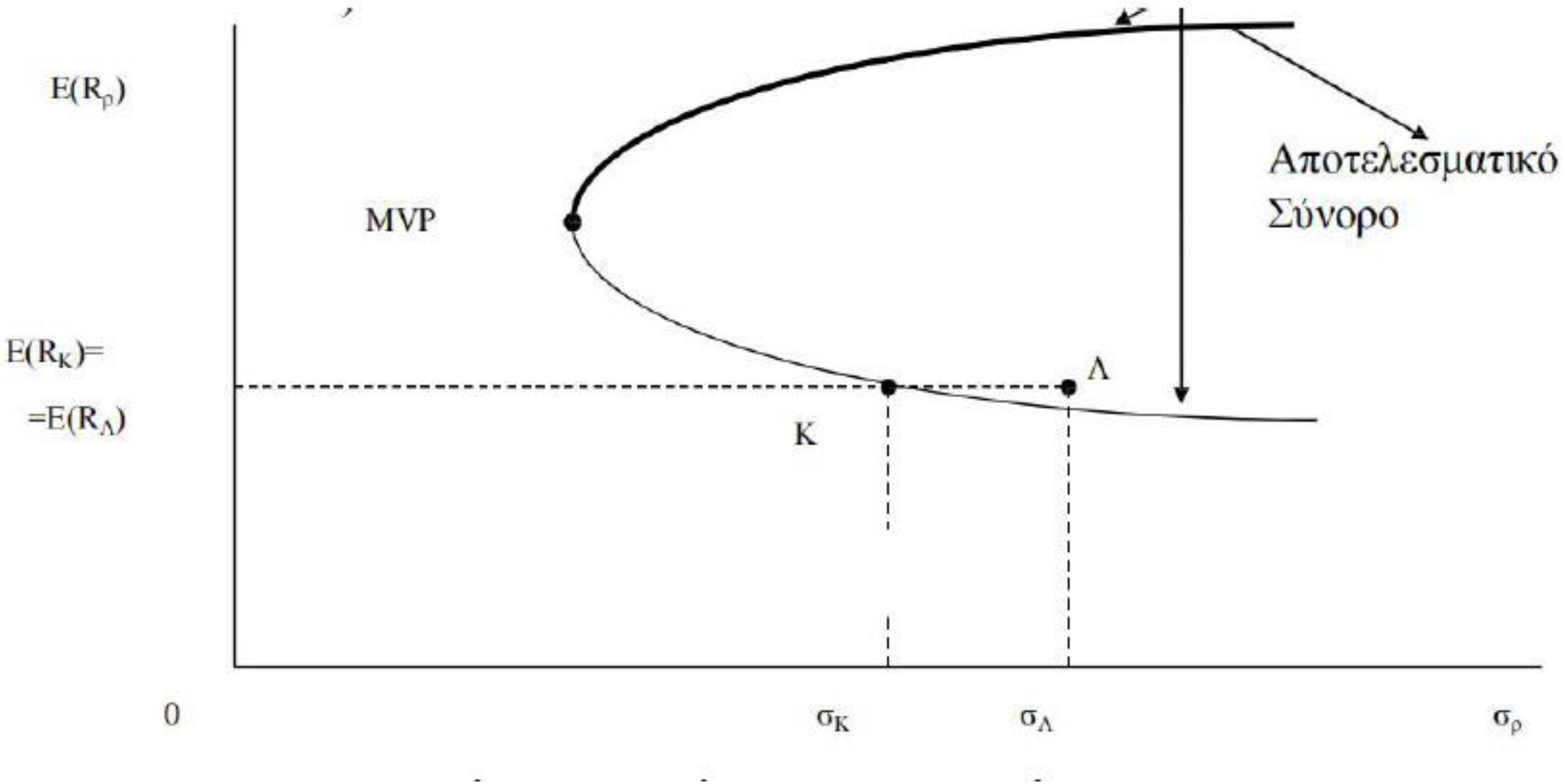
Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Και στη συνέχεια βρίσκουμε και το w_{B}:

$$w_B^* = 1 - w_A^* = \frac{\sigma_A^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B}$$

- Επομένως, τα w_A^* και w_B^* είναι τα ποσοστά που άμα τα επενδύσουμε στις μετοχές Α και Β αντίστοιχα, θα πάρουμε το Minimum Variance Portfolio (MVP).

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου



- **Γεωμετρικός Τόπος:** Είναι το σύνολο όλων των δυνατών χαρτοφυλακίων (δηλαδή όλη η καμπύλη)
- **Αποτελεσματικό Σύνορο (Efficient Frontier):** Είναι το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, δηλαδή από το Minimum Variance Portfolio και πάνω.

Εύρεση Αποτελεσματικού (Βέλτιστου) Χαρτοφυλακίου

Διακύμανση του MVP:

$$\sigma_{MVP}^2 = {w_A^*}^2\sigma_A^2 + {w_B^*}^2\sigma_B^2 + 2w_A^*w_B^*\rho\sigma_A\sigma_B$$

- Αυτή είναι η **ελάχιστη δυνατή διακύμανση** για οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο με τις δύο μετοχές.