

Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 10:

Ασφάλιστρο Κινδύνου
και Συναρτήσεις Χρησιμότητας

Ασφάλιστρο Κινδύνου (Risk Premium)

Το **ασφάλιστρο κινδύνου** είναι το ποσό που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας επενδυτής για να αποφύγει έναν κίνδυνο.

Μαθηματικά:

Είναι η διαφορά μεταξύ της **αναμενόμενης αξίας** μιας τυχαίας απόδοσης και του **βεβαίου ισοδύναμου (certainty equivalent)**.

$$RP = E(y) - CE$$

Όπου:

- $E(y)$: αναμενόμενη απόδοση
- CE : βέβαιο ισοδύναμο

Κόστος του Κινδύνου/Ρίσκου (Cost of the Gamble)

Το ***cost of the gamble*** είναι:

- Το ποσό χρημάτων που “χάνει” κάποιος επειδή αντιμετωπίζει αβεβαιότητα αντί για ένα σίγουρο αποτέλεσμα.

Η σχέση είναι:

$$\text{Cost of the gamble} = \text{Αναμενόμενη αξία} - \text{Certainty Equivalent}$$

Όπου το ***certainty equivalent wealth*** (βεβαιο ισοδύναμο εισόδημα/πλούτος) είναι:

- Το σίγουρο ποσό που δίνει στον άνθρωπο την ίδια χρησιμότητα με το ρίσκο.

Στάσεις απέναντι στον Κίνδυνο

1. Αποστροφή κινδύνου (Risk Aversion)

- Προτιμά σίγουρο αποτέλεσμα από ένα τυχαίο με ίδια αναμενόμενη αξία
- Κυρτή προς τα κάτω συνάρτηση χρησιμότητας (concave)

2. Ουδετερότητα (Risk Neutral)

- Κοιτά μόνο την αναμενόμενη τιμή
- Γραμμική χρησιμότητα

3. Προτίμηση στον κίνδυνο (Risk Loving)

- Προτιμά το ρίσκο
- Κυρτή προς τα πάνω (convex)

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε ένα αρχικό ποσό χρημάτων $Y_0 = 10$ και αντιμετωπίζουμε τον εξής κίνδυνο:

Υπάρχει 80% πιθανότητα να χάσουμε 5 και να πέσουμε στο 5, και υπάρχει και 20% πιθανότητα να κερδίσουμε άλλα 20 και στο τέλος να έχουμε 30.

Ποιό είναι το cost of the gamble?

Δίνεται λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας: $U(Y) = \ln Y$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι ο αρχικός μου πλούτος είναι 10, δηλαδή $Y_0 = 10$. Και με πιθανότητα 10% να πάμε στα 20 (δηλαδή να κερδίσω άλλα 10) και με πιθανότητα 90% να κερδίσω άλλα 100 και να πάμε στα 110.

Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι λογαριθμική.

Ποιό είναι το cost of the gamble?

Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου (Arrow–Pratt)

- Είδαμε ότι το κριτήριο που χρησιμοποιούμε είναι το $E(U(y))$.
- Θέλουμε λοιπόν να επενδύσουμε σε μια επένδυση όπου θα μας μεγιστοποιήσει το expected utility $\rightarrow \max E(U)$
- Είδαμε επίσης ότι για Risk Averse επενδυτές έχουμε $U' > 0$ και $U'' < 0$
- Ποιά είναι όμως τα **μέτρα (δείκτες)** που περιγράφουν τη στάση ενός ατόμου απέναντι στον κίνδυνο?
- Τα μέτρα **Arrow–Pratt** χρησιμοποιούνται για να ποσοτικοποιήσουν **πόσο αποστρέφεται τον κίνδυνο** κάποιος, με βάση τη συνάρτηση χρησιμότητας του $U(W)$.

Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου (Arrow–Pratt)

➤ Απόλυτη αποστροφή κινδύνου (Absolute Risk Aversion):

$$ARA(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

- Μετρά πόσο έντονα αποστρέφεται τον κίνδυνο σε **απόλυτους όρους** (π.χ. ευρώ).
- Πότε θα είναι μεγαλύτερη η αποστροφή μου, όταν είμαι φτωχός ή όταν είμαι πλούσιος? Δηλαδή πότε με νοιάζει περισσότερο για το αν θα χάσω ένα καθαρό ποσό? → Φυσικά όταν είμαι φτωχός.
- Άρα, η αποστροφή μου στο να χάσω ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων μειώνεται όσο πιο πλούσιος είμαι.

→ Οπότε θέλουμε συνάρτηση χρησιμότητας που θα μας δίνει

Decreasing Absolute Risk Aversio (DARA)

Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου (Arrow–Pratt)

➤ Σχετική αποστροφή κινδύνου (Relative Risk Aversion):

$$RRA(W) = -W \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)} \rightarrow RRA(W) = W \cdot ARA(W)$$

- Μετρά την αποστροφή κινδύνου σε **αναλογικούς όρους** (ποσοστά).
- Πιο χρήσιμη όταν εξετάζουμε επιλογές όπως επενδύσεις (% του εισοδήματος).
- Εδώ θέλουμε να είναι είτε Decreasing (DRRA) είτε Constant (CRRA) συναρτήσεις χρησιμότητας.

Μέτρα Αποστροφής Κινδύνου (Arrow–Pratt)

- Ξεκινάς με μια συνάρτηση χρησιμότητας $U(W)$
- Υπολογίζεις τα $ARA(W)$, $RRA(W)$
- Και βλέπεις τι “τύπος” επενδυτή προκύπτει:
 - Αν $ARA(W) > 0$ → αποστροφή κινδύνου (Risk Averse επενδυτής)
 - Αν $ARA(W) = 0$ → ουδέτερος στον κίνδυνο (Risk Neutral)
 - Αν $ARA(W) < 0$ → λάτρης κινδύνου (Risk Lover)

Σχέση Κινδύνου – Ασφαλίστρου – Διακύμανσης

$$RP = -\frac{1}{2}ARA(W)\sigma^2$$

Όπου:

- $ARA(W)$: απόλυτη αποστροφή κινδύνου
- σ^2 : διακύμανση αποδόσεων

Συμπέρασμα:

- Όσο μεγαλύτερος ο κίνδυνος (variance), τόσο μεγαλύτερο ασφάλιστρο
- Όσο πιο risk averse ο επενδυτής, τόσο περισσότερο πληρώνει για αποφυγή κινδύνου