

Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 11:

Στοχαστική Κυριαρχία

Προσέγγιση Μέσης Τιμής–Διακύμανσης (Mean–Variance Approach)

- Η προσέγγιση **Μέσης Τιμής–Διακύμανσης** του Harry Markowitz (1952) αποτελεί μια θεμελιώδη συμβολή στη θεωρία της βέλτιστης επιλογής χαρτοφυλακίου.
- Η **διακύμανση (variance)** είναι το πιο δημοφιλές παραμετρικό μέτρο κινδύνου, αλλά βασίζεται σε ορισμένες αρκετά περιοριστικές υποθέσεις.
- Ο Markowitz προτείνει είτε την **ελαχιστοποίηση της διακύμανσης** για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης είτε τη **μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης** για ένα δεδομένο επίπεδο διακύμανσης.
- Η διακύμανση μετρά τη διασπορά των αποδόσεων γύρω από την αναμενόμενη απόδοση.
- Πολλοί ερευνητές αμφισβητούν τη χρήση της διακύμανσης, επειδή τιμωρεί εξίσου τόσο τις αποδόσεις που βρίσκονται πάνω από την αναμενόμενη απόδοση όσο και εκείνες που βρίσκονται κάτω από αυτήν.

Κύρια Μειονεκτήματα της Προσέγγισης Markowitz

- Υποθέτει ότι η κατανομή των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων ακολουθεί την **κανονική κατανομή (normal distribution)**.
- Στο μοντέλο χαρτοφυλακίου λαμβάνονται υπόψη μόνο οι **δύο πρώτες ροπές** της κατανομής, δηλαδή η μέση τιμή και η διακύμανση.
- Το πρόβλημα Μέσης Τιμής–Διακύμανσης (Mean–Variance, MV) είναι ένα **παραμετρικό πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού (quadratic programming)** και γίνεται εξαιρετικά δύσκολο να επιλυθεί όταν εξετάζεται μεγάλος αριθμός χρεογράφων.

Παράδειγμα..

Η **διακύμανση (variance)** συνδέεται με μια περιορισμένη κατηγορία προτιμήσεων (τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας) και κατανομών πιθανότητας (κανονική κατανομή), ενώ **δεν είναι ανθεκτική στην ύπαρξη ακραίων τιμών (outliers).**

Έστω το ακόλουθο παράδειγμα:

Y	Pr(Y)	X	Pr(X)
1	0,80	10	0,99
100	0,20	1000	0,01

Τότε:

$$E(Y) = 20,8$$

$$E(X) = 19,9$$

και

$$Var(Y) = 1468$$

$$Var(X) = 9703$$

- Επομένως, σύμφωνα με το **κριτήριο Μέσης Τιμής–Διακύμανσης (Mean–Variance criterion)**, το **Y υπερέχει του X**, καθώς έχει υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση και χαμηλότερη διακύμανση.

Παράδειγμα..

Ωστόσο, για επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο και έχουν συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U(W) = \log(W)$$

το **X** προτιμάται, αφού:

$$\begin{aligned} E(U(X)) &= 1,02 \\ E(U(Y)) &= 0,40 \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$E(U(X)) > E(U(Y))$$

Ερμηνεία:

- Το παράδειγμα δείχνει ότι το κριτήριο Mean–Variance μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα όταν οι αποδόσεις δεν ακολουθούν κανονική κατανομή ή όταν υπάρχουν ακραίες τιμές.
- Παρόλο που το Y φαίνεται καλύτερο με βάση μόνο τη μέση απόδοση και τη διακύμανση, ένας επενδυτής με αποστροφή στον κίνδυνο αξιολογεί τις επενδύσεις μέσω της αναμενόμενης χρησιμότητας και τελικά προτιμά το X .
- Αυτό αποτελεί μία από τις βασικές κριτικές στην προσέγγιση του Markowitz.

Εισαγωγή στη Στοχαστική Κυριαρχία

- Οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων δεν μπορούν να περιγραφούν επαρκώς μόνο από τη μέση τιμή και τη διακύμανση.
- Τα φαινόμενα της προτίμησης για ασυμμετρία (skewness preference) και της αποστροφής στις ζημίες (loss aversion) έχουν προσελκύσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στον χρηματοοικονομικό τομέα.
- Προτείνεται η αντικατάσταση όχι μόνο του μοντέλου Μέσης Τιμής–Διακύμανσης (Mean–Variance, MV) αλλά και άλλων παραμετρικών μέτρων κινδύνου (όπως Semivariance, VaR και CVaR), με ένα πιο γενικό κριτήριο αποτελεσματικότητας που λαμβάνει υπόψη και τις υψηλότερης τάξης κεντρικές ροπές, δηλαδή την ασυμμετρία (skewness) και την κύρτωση (kurtosis).
- Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της μεθοδολογίας της **Στοχαστικής Κυριαρχίας (Stochastic Dominance – SD)**.
- Η Στοχαστική Κυριαρχία εισήχθη από τους Quirk and Saposnik (1962) και αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Hadar and Russell (1969), Hanoch and Levy (1969), καθώς και από τον Whitmore (1970), μεταξύ άλλων.
- Η **Στοχαστική Κυριαρχία (SD)** αποτελεί ένα πιο γενικό πλαίσιο σύγκρισης επενδύσεων, επειδή δεν απαιτεί αυστηρές υποθέσεις όπως η κανονικότητα των αποδόσεων και μπορεί να ενσωματώσει ευρύτερες προτιμήσεις των επενδυτών.

Στοχαστική Κυριαρχία (Stochastic Dominance – SD)

Έστω F και G οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (CDF) δύο διαφορετικών επενδυτικών επιλογών ή περιουσιακών στοιχείων.

Ορισμός: Στοχαστική Κυριαρχία Πρώτου Βαθμού (First Stochastic Dominance – FSD)

Η κατανομή F κυριαρχεί της G κατά FSD για όλες τις συναρτήσεις χρησιμότητας με:

$$U'(x) \geq 0$$

δηλαδή για όλους τους επενδυτές που προτιμούν περισσότερο πλούτο από λιγότερο, εάν:

$$F(x) \leq G(x)$$

για κάθε τιμή x , και υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 για την οποία η ανισότητα είναι αυστηρή.

Ισοδύναμα:

$$E_F[U(x)] \geq E_G[U(x)]$$

για κάθε αύξουσα συνάρτηση χρησιμότητας.

Στοχαστική Κυριαρχία (Stochastic Dominance – SD)

Ορισμός: Στοχαστική Κυριαρχία Δευτέρου Βαθμού (Second Stochastic Dominance – SSD)

Η κατανομή F κυριαρχεί της G κατά SSD για όλες τις συναρτήσεις χρησιμότητας που ικανοποιούν:

$$U'(x) \geq 0 \text{ και } U''(x) \leq 0$$

δηλαδή για όλους τους επενδυτές που προτιμούν περισσότερο πλούτο και αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk averse), εάν:

$$\int_{-\infty}^x [G(t) - F(t)] dt \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 για το οποίο η ανισότητα είναι αυστηρή.

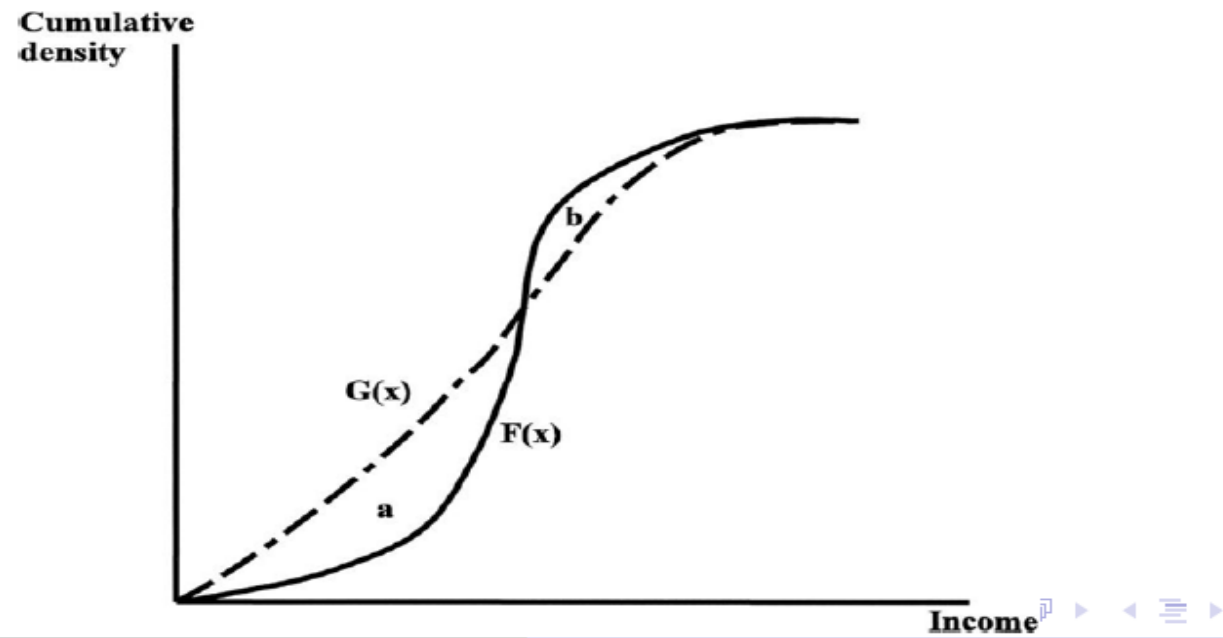
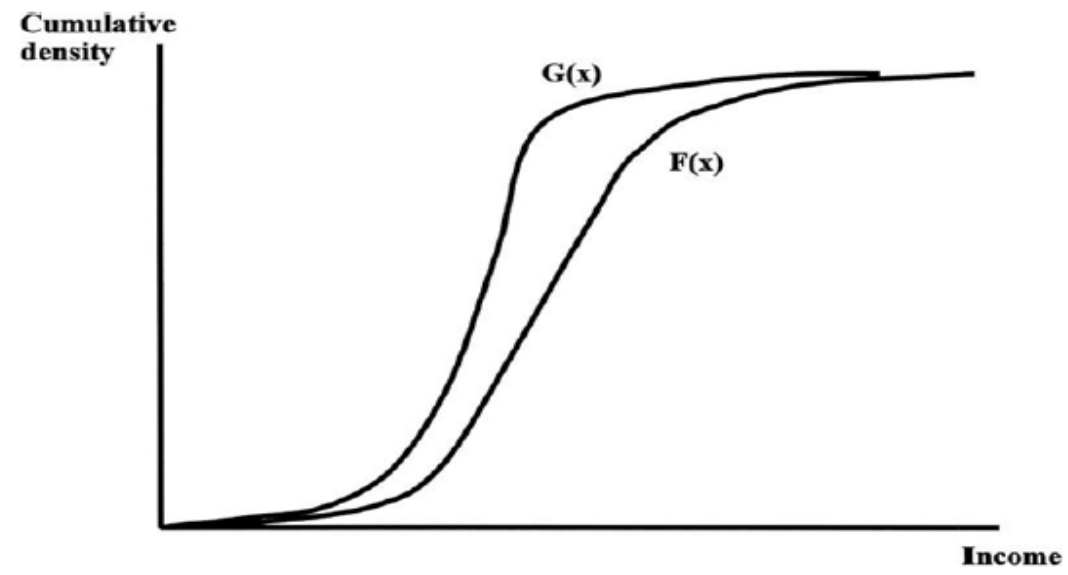
Ισοδύναμα:

$$E_F[U(x)] \geq E_G[U(x)]$$

για κάθε αύξουσα και κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας.

Βασικές Παρατηρήσεις

- Το κριτήριο **Στοχαστικής Κυριαρχίας Πρώτου Βαθμού (FSD)** είναι κατάλληλο τόσο για **risk averters** όσο και για **risk lovers** επενδυτές, αρκεί να προτιμούν υψηλότερο πλούτο.
- Το κριτήριο **Στοχαστικής Κυριαρχίας Δευτέρου Βαθμού (SSD)** προσθέτει την υπόθεση της **καθολικής αποστροφής στον κίνδυνο (global risk aversion)** και επομένως εφαρμόζεται μόνο σε επενδυτές με κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας.



Μεγαλύτερης Τάξης Στοχαστική Κυριαρχία

Τρίτης Τάξης (Third Stochastic Dominance – TSD)

Χρησιμοποιείται όταν εξετάζονται επενδυτές που:

- αποστρέφονται τον κίνδυνο,
- προτιμούν θετική ασυμμετρία (skewness).

Αφορά την τρίτη παράγωγο της συνάρτησης χρησιμότητας:

$$U'(x) > 0, U''(x) < 0, U'''(x) > 0$$

Γενικά:

Η στοχαστική κυριαρχία μπορεί να επεκταθεί σε οποιαδήποτε τάξη:

- 1η τάξη → προτίμηση για μεγαλύτερο πλούτο
- 2η τάξη → αποστροφή κινδύνου
- 3η τάξη → προτίμηση θετικής ασυμμετρίας
- υψηλότερες τάξεις → πιο σύνθετες προτιμήσεις

Στην πράξη, οι πιο συνηθισμένες είναι η FSD και η SSD.

Πλεονεκτήματα Στοχαστικής Κυριαρχίας

- Η θεωρητική ελκυστικότητα της Στοχαστικής Κυριαρχίας (Stochastic Dominance – SD) έγκειται στον μη παραμετρικό (non-parametric) χαρακτήρα της.
- Οι στοχαστικές μέθοδοι συγκρίνουν τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (cumulative distribution functions – CDFs) των αποδόσεων όλων των περιουσιακών στοιχείων.

➤ **Πλεονεκτήματα Στοχαστικής Κυριαρχίας:**

- Δεν είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας για να περιγραφούν οι προτιμήσεις των επενδυτών.
- Δεν επιβάλλουν υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.
- Η μη παραμετρική ανάλυση μπορεί να αξιοποιήσει τα μεγάλα σύνολα δεδομένων που είναι πλέον διαθέσιμα στη σύγχρονη χρηματοοικονομική ανάλυση.