ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΟΜΟΛΟΓΩΝ

Απόδοση χρονικής περιόδου (ή ορίζοντα)

Για την **αξιολόγηση της αποδοτικότητας ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της απόδοσης ενός ομολόγου για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα (ή περίοδο), έστω ένα μήνα, έτος, μια πενταετία κοκ.** Η απόδοση αυτή αναφέρεται ως *απόδοση χρονικής περιόδου* (ή ορίζοντα) και είναι διαφορετική από την απόδοση στη λήξη του ομολόγου, καθώς λαμβάνει υπόψη της την τιμή πώλησης του ομολόγου κατά το τέλος της χρονικής περιόδου για την οποία υπολογίζεται, πχ. ενός έτους. Για ένα ομόλογο λήξης n-περιόδων, η απόδοση χρονικής περιόδου που καλύπτει ένα ορίζοντα m-περιόδων, όπου $m<n$, αποτελεί την απόδοση του ομολόγου για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή αγοράς του σήμερα t, μέχρι τη μελλοντική στιγμή $t+m$, όπου εναπομένουν $(n-m)$ περίοδοι για τη λήξη του.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.1: Απόδοση χρονικής περιόδου ενός ομολόγου με κουπόνι

Τις πληρωμές των κουπονιών $(m \times C)$:

(+)

(1) Το εισόδημα από την επανεπένδυση των κουπονιών:

$$\left(C\left[\frac{(1+r)^m - 1}{r}\right] - m \times C \right)$$

(+)

(2) Την τιμή πώλησης του ομολόγου τη στιγμή $t+m$: $B_{t+m}(n-m)$.

$$C\left[\frac{(1+r)^m - 1}{r}\right]$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω πηγές εισοδήματος, που δίνονται στο Διάγραμμα 9.1, προκύπτει η συνολική μελλοντική αξία του ομολόγου τη στιγμή $t+m$, που συμβολίζεται ως TFV_{t+m} (Total Future Value), δηλ.

$$TFV_{t+m} = C\left[\frac{(1+r)^m - 1}{r}\right] + B_{t+m}(n-m).$$

Με βάση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοση χρονικής περιόδου ενός ομολόγου για m-περιόδους, $H_{t+m}(m)$, σε σχέση με την τιμή αγοράς του τη στιγμή t ως εξής:

$$H_{t+m}(m) = \frac{TFV_{t+m} - B_t(n)}{B_t(n)} = \frac{TFV_{t+m}}{B_t(n)} - 1. \qquad (1)$$

Η μέση ανά περίοδο χρονική απόδοση μπορεί να υπολογιστεί με βάση τη σχέση (1) ως εξής:

$$h = \left(\frac{TFV_{t+m}}{B_t(n)} \right)^{1/m} - 1,$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση $\left(1+h\right)^m = \left(1+H_{t+m}(m)\right) = \dfrac{TFV_{t+m}}{B_t(n)}$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό αποδεικνύεται εύκολα ότι η απόδοση χρονικής περιόδου *h* για ένα ομόλογο το οποίο κρατείται έως τη λήξη του θα ισούται με το επιτόκιο της αγοράς *r* (ή την απόδοση στη λήξη του ομολόγου *y*), αν η καμπύλη των επιτοκίων της αγοράς παραμένει επίπεδη μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$B_t(n) = C\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right] + \frac{M}{(1+r)^n},$$

οπότε έχουμε

$$\left(1+h\right)^n = \left(1+H_{t+n}(n)\right) = \frac{TFV_{t+n}}{B_t(n)} = \frac{C\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] + M}{C\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right] + \frac{M}{(1+r)^n}} = \left(1+r\right)^n \Rightarrow h = r .$$

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για την περίπτωση ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι το οποίο κρατείται ως τη λήξη του. Τότε, θα έχουμε:

$$\left(1+h\right)^n = \left(1+H_{t+n}(n)\right) = \frac{TFV_{t+n}}{B_t(n)} = \frac{M}{\frac{M}{(1+r)^n}} = \left(1+r\right)^n \ \Rightarrow\ h = r,$$

όπου $B_t(n) = \dfrac{M}{(1+r)^n}$ αποτελεί την τρέχουσα τιμή αγοράς του ομολόγου. Στη συνέχεια, για την καλύτερη κατανόηση και εφαρμογή του ορισμού της απόδοσης χρονικής περιόδου παραθέτουμε μια σειρά από παραδείγματα υπολογισμού της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.1: Έστω ένα ομόλογο με κουπόνι που έχει λήξη 7 έτη από σήμερα, καταβάλλει τα κουπόνια του σε εξαμηνιαία βάση και η ονομαστική του αξία είναι €1000. Το επιτόκιο κουπονιού είναι c = 9%, ενώ το επιτόκιο της αγοράς είναι σταθερό για όλη την περίοδο μέχρι τη λήξη του ομολόγου και ανέρχεται σε r = 5%. Το ομόλογο αυτό πωλείται στην τιμή της ονομαστικής του αξίας των €1000. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, η απόδοση χρονικής περιόδου h μέχρι τη λήξη του ομολόγου υπολογίζεται ως εξής:

$$(1+h)^n = \left(1+H_{t+n}(n)\right) = \frac{TFV_{t+n}}{B_t(n)} = \frac{45\left[\dfrac{(1+0.025)^{14}-1}{0.025}\right]+1000}{1000}$$

$$= \frac{1743.35}{1000} \Rightarrow h = 0.0405 \ \ (4.05\%)$$

όπου $C=(0.09/2)\times 1000 = 45$ αποτελεί το εξαμηνιαίο κουπόνι του ομολόγου, $r = 0.05/2 = 0.025$ είναι το επιτόκιο της αγοράς σε εξαμηνιαία βάση και $n = 7\times 2 = 14$ αποτελούν τον αριθμό των περιόδων (εξαμήνων) μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Σε ετήσια βάση, η απόδοση αυτή ανέρχεται σε ποσοστό 8.10 %, που είναι μεγαλύτερη από το επιτόκιο της αγοράς r = 5%. Η μεγαλύτερη από το επιτόκιο απόδοση του ομολόγου αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι η τρέχουσα τιμή του στην αγορά $B_t(n) = 1000$ είναι μικρότερη της δίκαιης τιμής του, που υπολογίζεται ως

$$B_t(n) = 45\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+0.025)^{14}}}{0.025}\right] + \frac{1000}{(1+0.025)^{14}} = 1233.78$$

Αν είχαμε χρησιμοποιήσει τη δίκαιη τιμή του ομολόγου 1233.78, τότε η απόδοση h θα ισούταν με το επιτόκιο της αγοράς r = 5% (ή την απόδοση στη λήξη του y), όπως προβλέπει η θεωρία όταν η καμπύλη των επιτοκίων είναι επίπεδη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.2: Έστω ένα ομόλογο με κουπόνι ονομαστικής αξίας €1000 το οποίο πωλείται σήμερα στην τιμή των €979.82 και πληρώνει τα κουπόνια του σε εξαμηνιαία βάση. Το χρονικό διάστημα ως τη λήξη του ομολόγου αυτού είναι 7 έτη, το επιτόκιο κουπονιού του είναι c = 9%, ενώ το επιτόκιο της αγοράς είναι σταθερό και ισούται με r = 9.4% σε ετήσια βάση. Αν μετά από περίοδο 5 ετών το επιτόκιο της αγοράς συμβεί να αυξηθεί στο επίπεδο r = 11.2%, τότε ποια θα είναι η αναμενόμενη απόδοση χρονικής περιόδου h του ομολόγου αυτού για πέντε έτη από σήμερα;

Η απόδοση αυτή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:[1]

[1] Σημειώστε ότι η τιμή 979.82 αποτελεί τη δίκαιη τιμή του ομολόγου. Αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$(1+h)^m = \left(1+H_{t+m}(m)\right) = \frac{TFV_{t+m}}{B_t(n)}$$

$$= \frac{45\left[\dfrac{(1+0.047)^{10}-1}{0.047}\right] + B_{t+m}(n-m)}{979.82} = \frac{558.14 + B_{t+m}(n-m)}{979.82},$$

όπου m = 2x5 = 10 αποτελεί το σύνολο των εξαμήνων έως την πώληση του ομολόγου, r = 0.094/2 = 0.047 αποτελεί το επιτόκιο της αγοράς για την περίοδο των πρώτων 5 ετών σε εξαμηνιαία βάση και $B_{t+m}(n\text{-}m)$ αποτελεί την τιμή πώλησης του ομολόγου σε 5 έτη από σήμερα, όπου απομένουν 2 ακόμα έτη έως τη λήξη του. Αν το επιτόκιο της αγοράς r μετά από 5 έτη ανέλθει στο επίπεδο r = 11.2%, η τιμή πώλησης του ομολόγου στην αγορά $B_{t+m}(n\text{-}m)$ μετά από 5 έτη βρίσκεται ως εξής:

$$B_{t+m}(n-m) = 45\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+0.056)^4}}{0.056}\right] + \frac{1000}{(1+0.056)^4} = 961.53,$$

όπου (n-m) = 2x2 = 4 αποτελεί τον αριθμό των εξαμήνων μέχρι τη λήξη του ομολόγου μετά την περίοδο των πρώτων 5 ετών και r = 0.112/2=0.056 αποτελεί το νέο επιτόκιο της αγοράς σε εξαμηνιαία βάση μετά την περίοδο αυτή. Αντικαθιστώντας την τιμή $B_{t+m}(n-m) = 961.53$ στον τύπο της απόδοσης χρονικής περιόδου έχουμε

$$(1+h)^{10} = \left(1+H_{t+m}(m)\right) = \frac{558.14+961.53}{979.82} \;\Rightarrow\; h = 0.045 \;\; (4.45\%),$$

που σημαίνει ότι η μέση απόδοση χρονικής περιόδου είναι 4.45% σε εξαμηνιαία βάση (δηλαδή 9.0% ανά έτος).

$$979.82 = B_{t+m}(n-m) = 45\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+0.047)^{14}}}{0.047}\right] + \frac{1000}{(1+0.047)^{14}}.$$

Παράγοντες προσδιορισμού της διακύμανσης της τιμής των ομολόγων και η ωφέλιμη διάρκεια (D) ενός ομολόγου

Η διακύμανση της τιμής ενός ομολόγου **(bond price volatility) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του στην αγορά που προκύπτει από τη μεταβολή της απόδοσης του στη λήξη *y* κατά μία μονάδα βάσης, δηλ. 0.01.** Η τελευταία προέρχεται αποκλειστικά από μια μεταβολή στο επιτόκιο της αγοράς *r*, καθώς όλες οι άλλες παράμετροι προσδιορισμού της τιμής του ομολόγου, όπως είναι το κουπόνι ή η περίοδος λήξης, είναι προκαθορισμένες. Σημειώστε ότι αν η καμπύλη των επιτοκίων είναι επίπεδη, η μεταβολή στην απόδοση θα είναι ανάλογη εκείνης στο επιτόκιο της αγοράς.

Ως παράδειγμα του παραπάνω ορισμού της διακύμανσης της τιμής ενός ομολόγου, θεωρήστε την ακόλουθη μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου που πωλείται στο άρτιο λόγω μιας αύξηση της απόδοσης *y* από 10% σε 11%:

$$\frac{B(11\%)-B(10\%)}{B(10\%)}=\frac{78.2-84.63}{84.63}=-0.076,$$

όπου $B(11\%)=78.2$ είναι η τιμή του ομολόγου που αντιστοιχεί στην απόδοση *y*=11%. Επειδή, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η διακύμανση της τιμής του ομολόγου θα είναι πάντοτε αρνητικός αριθμός σε μια αύξηση του επιτοκίου, όταν αναφερόμαστε σε αύξηση της διακύμανσης θα εννοούμε σε απόλυτες τιμές.

Από τον παραπάνω ορισμό της διακύμανσης της τιμής ενός ομολόγου ως της σχετικής μεταβολής της τιμής του, είναι προφανές ότι **αυτή αποτελεί και ένα μέτρο του κινδύνου που ενσωματώνεται στην τιμή ενός ομολόγου, λόγω μιας πιθανής μεταβολής των επιτοκίων. Εκτός από μια μεταβολή της απόδοσης στη λήξη (ή το επιτόκιο της αγοράς) που προκαλεί άμεση μεταβολή στην τιμή του ομολόγου, άλλοι παράγοντες που έμμεσα επηρεάζουν τη διακύμανση της τιμής του αποτελούν τα κουπόνια του, το επίπεδο της απόδοσής του και οι περίοδοι ως προς τη λήξη του.** Για να βρούμε αναλυτικά πώς οι παραπάνω παράγοντες επηρεάζουν τη διακύμανση της τιμής ενός ομολόγου, στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε τη σχετική μεταβολή της τιμής του ομολόγου που προκαλείται από μια διακριτή μεταβολή της απόδοσης Δy, δηλ. $\frac{\Delta B/\Delta y}{B}$ χρησιμοποιώντας την παράγωγο $dB/\partial y$ της συναρτησιακής σχέσης ανάμεσα στην τιμή και την απόδοση του ομολόγου. Δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι

$$\frac{\Delta B/\Delta y}{B} \approx \frac{dB/\partial y}{B}.$$

Για λόγους ευκολίας, στην ανάλυσή μας θα υποθέσουμε ότι τα τρέχοντα επιτόκια είναι επίπεδα για όλο το χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Όπως τονίστηκε προηγουμένως, αυτό σημαίνει ότι μεταβολές στην απόδοση στη λήξη y του ομολόγου αντιστοιχούν σε παράλληλες μεταβολές στο επιτόκιο της αγοράς r. **Αν θεωρήσουμε αρχικά ένα ομόλογο με μηδενικό κουπόνι λήξης *n*-περιόδων**, τότε η διακύμανση της τιμής του με βάση την παραπάνω προσέγγιση της σχετικής μεταβολής της τιμής του, $\frac{\Delta B/\Delta y}{B}$, μπορεί να υπολογιστεί με βάση την πρώτη παράγωγο $dB/\partial y$ ως εξής:

$$\frac{\frac{dB}{dy}}{B} = \frac{\frac{-Mn(1+y)^{n-1}}{(1+y)^{2n}}}{\frac{M}{(1+y)^n}} = -\frac{n}{(1+y)}, \qquad (2)$$

όπου $B = \frac{M}{(1+y)^n}$ αποτελεί την τρέχουσα τιμή του ομολόγου και $\frac{dB}{dy} = \frac{-Mn(1+y)^{n-1}}{(1+y)^{2n}}$.

Η σχέση (2) δείχνει ότι το απόλυτο μέγεθος της διακύμανσης της τιμής ενός ομολόγου αποτελεί θετική συνάρτηση των *n*-περιόδων ως προς τη λήξη του και είναι αντίστροφη του επιπέδου της απόδοσης στη λήξη *y*.

Ανάλογα με το ομόλογο χωρίς κουπόνι, μπορεί να υπολογιστεί και η διακύμανση της τιμής ενός ομολόγου με κουπόνι λήξης *n*-περιόδων. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο

$$B = \frac{C}{(1+y)} + \frac{C}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{C+M}{(1+y)^n},$$

η διακύμανσή της τιμής του ομολόγου B μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{dB}{dy}}{B} &= \frac{-\frac{C}{(1+y)^2} - \frac{2C(1+y)}{(1+y)^4} - \frac{3C(1+y)^2}{(1+y)^6} - \ldots - \frac{n(C+M)(1+y)^{n-1}}{(1+y)^{2n}}}{B} \\ &= \frac{-\frac{1}{(1+y)}\left[1\left(\frac{C}{(1+y)^1}\right) + 2\left(\frac{C}{(1+y)^2}\right) + 3\left(\frac{C}{(1+y)^3}\right) + \ldots + n\left(\frac{(C+M)}{(1+y)^n}\right)\right]}{B} \\ &= -\frac{D}{(1+y)}, \end{aligned} \qquad (3)$$

όπου

$$D = \frac{\left[1\left(\frac{C}{(1+y)^1}\right) + 2\left(\frac{C}{(1+y)^2}\right) + 3\left(\frac{C}{(1+y)^3}\right) + ... + n\left(\frac{(C+M)}{(1+y)^n}\right)\right]}{B}$$

αποτελεί τον ορισμό της *ωφέλιμης διάρκειας ενός ομολόγου με κουπόνι κατά Macaulay*. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, η ωφέλιμη διάρκεια (ή απλά διάρκεια) ενός ομολόγου αποτελεί το σταθμισμένο μέσο των μελλοντικών περιόδων τ=1,2,3…n από σήμερα όπου το ομόλογο πληρώνει κουπόνι χρησιμοποιώντας ως βάρη (w_i) την παρούσα αξία του κουπονιού της αντίστοιχης περιόδου τ ως προς την τιμή του ομολόγου $B(n)$, δηλαδή

$$w_1 = \frac{\frac{C}{(1+y)^1}}{B(n)},\ w_2 = \frac{\frac{C}{(1+y)^2}}{B(n)}, \ldots, w_n = \frac{\frac{C+M}{(1+y)^n}}{B(n)},$$

όπου $w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$. Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι η διάρκεια ενός ομολόγου D σταθμίζει περισσότερο τις πιο κοντινές στο μέλλον περιόδους όπου το ομόλογο καταβάλλει τα κουπόνια του, καθώς μπορούν να επενδυθούν ξανά στο μέλλον για μεγάλο χρονικό ορίζοντα μέχρι την ημερομηνία λήξης του ομολόγου. Με βάση τη σχέση (3), μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι ομόλογα με μικρή διάρκεια D θα έχουν μικρότερες σε μέγεθος διακυμάνσεις της τιμής τους λόγω μιας μεταβολής της απόδοσής τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.3: Έστω ένα ομόλογο λήξης 5 ετών που πωλείται στο άρτιο στην τιμή των €100, έχει επιτόκιο κουπονιού c=9% σε ετήσια βάση, αλλά πληρώνει κουπόνια ανά εξάμηνο. Με βάση τα στοιχεία αυτά, η διάρκεια D του ομολόγου αυτού υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις ροές του ακόλουθου πίνακα:

T	C	$\frac{C}{(1.045)^{T}}$	$T\times\frac{C}{(1.045)^{T}}$
1	4.5	4.30622	4.30622
2	4.5	4.120785	8.24157
3	4.5	3.943335	11.83
4	4.5	3.773526	15.0941
5	4.5	3.61103	18.05515
6	4.5	3.455531	20.73318
7	4.5	3.306728	23.1471
8	4.5	3.164333	25.31466
9	4.5	3.02807	27.25263
10	104.5	67.29044	672.9044
Σύνολο		100	826.879

όπου C=(0.09/2)x100=€4.5 αποτελεί την εξαμηνιαία δόση του κουπονιού και r=0.045=0.09/2 αποτελεί το επιτόκιο της αγοράς ανά εξάμηνο. Με βάση τα στοιχεία αυτά, η διάρκεια D υπολογίζεται ως εξής:

$$D=\frac{\left[1\frac{C}{(1+y)^{1}}+2\frac{C}{(1+y)^{2}}+3\frac{C}{(1+y)^{3}}+\ldots+n\frac{(C+M)}{(1+y)^{n}}\right]}{B}=\frac{826.879}{100}=8.27 \text{ εξάμηνα}$$

ή D=4.13 έτη.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό διάρκειας D, *η διακύμανση της τιμής ενός ομολόγου* για μια διακριτή μεταβολή της απόδοσης του y, Δy, μπορεί να προσεγγιστεί ως ακολούθως:

$$\frac{\Delta B}{B}\approx\frac{\frac{dB}{dy}}{B}dy=\left(-\frac{D}{(1+y)}\right)dy$$

$$\approx\left(-\frac{D}{(1+y)}\right)\times\Delta y \;=\; -MD\times\Delta y,$$

όπου $MD=\frac{D}{(1+y)}$ ορίζεται ως *η τροποποιημένη διάρκεια* (modified duration). Πολλαπλασιάζοντας με την τιμή του ομολόγου B και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός της Ευρώ-Διάρκειας (Euro-Duration):

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -MD \times \Delta y \quad \Rightarrow \quad \Delta B \approx (-B \times MD) \times \Delta y = (\text{Ευρώ-Διάρκεια}) \times \Delta y \,,$$

όπου $\text{Ευρώ-Διάρκεια} = -P \times MD$ μετρά την απόλυτη μεταβολή της τιμής του ομολόγου σε ευρώ λόγω μιας μοναδιαίας μεταβολής της απόδοσης του y.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.4: Με βάση τα στοιχεία του ομολόγου του προηγούμενου παραδείγματος, υπολογίστε τη διακύμανση της τιμής του και τη μεταβολή αυτής σε ευρώ αν η απόδοση αυξηθεί κατά 0.1% σε εξαμηνιαία βάση.

Έχοντας υπολογίσει τη διάρκεια του ομολόγου D=8.27 σε εξάμηνα, η διακύμανση της τιμής του όταν η μεταβολή της απόδοσης είναι Δy=0.001 υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\frac{\Delta B}{B} \approx \left(-\frac{1}{(1+y)} D \right) \times \Delta y = \left(-\frac{1}{(1+0.045)} 8.27 \right) \times 0.001 = -0.0079 \text{ (ή -0.79\%).}$$

Η δε απόλυτη σε ευρώ μεταβολή της τιμής B δίνεται ως εξής:

$$\Delta B \approx B \left(-\frac{1}{(1+y)} D \right) \times \Delta y = 100 \left(-\frac{1}{(1+0.045)} 8.27 \right) \times 0.001 = -0.79 \,,$$

που σημαίνει μια πτώση της κατά €0.79.

Εκτός για ατομικά ομόλογα, η έννοια της διάρκειας D μπορεί να εφαρμοστεί και για χαρτοφυλάκια ομολόγων. Αυτή υπολογίζεται ως ο σταθμικός μέσος των διαρκειών D_i (i=1,2,…,K) των ομολόγων του χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιώντας ως βάρη τη αξία (τιμή) κάθε ομολόγου ως προς τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου, δηλαδή

$$D_P = w_1 D_1 + w_2 D_2 + \ldots + w_K D_K \,,$$

όπου $w_i = \dfrac{\text{Αξια ομόλογου } i}{\text{Συνολικη αξια χαρτοφυλακίου}}$, για i=1,2,…,K. Στο επόμενο παράδειγμα υπολογίζουμε τη διάρκεια ενός χαρτοφυλακίου K=3 ομολόγων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5: Θεωρήστε τον ακόλουθο πίνακα που δίνει τα στοιχεία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από τρία ομόλογα με διαφορετικές διάρκειες D_i:

Ομόλογο	Επιτόκιο Κουπονιού	Έτη έως τη λήξη (τ)	Απόδοση στη λήξη (y)	Τιμή ομολόγου (B)	Διάρκεια D_i
Α	10%	5	10%	4.000.000	3.86
Β	8%	15	10%	4.231.375	8.047
Γ	14%	30	10%	1.378.586	9.16
Συνολική αξία χαρτοφυλακίου:				9.609.961	

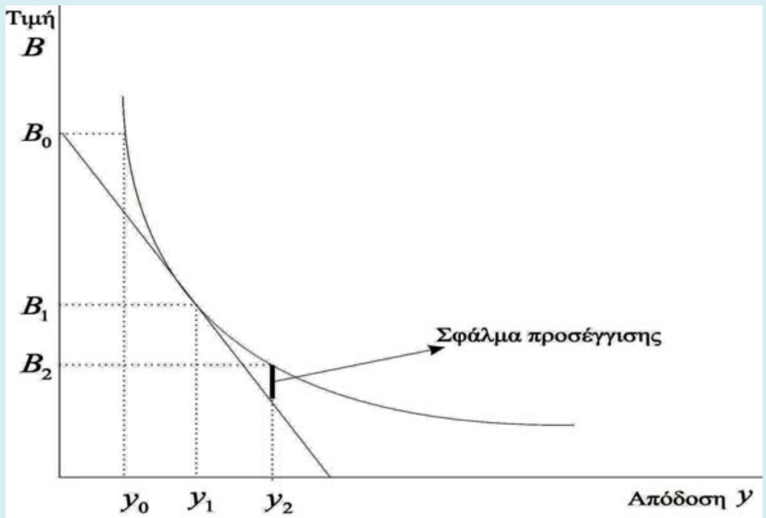
Η διάρκεια του χαρτοφυλακίου αυτού, που συμβολίζεται ως D_P, υπολογίζεται ως

$$D_P = \frac{4000000}{9609961}(3.86) + \frac{4231375}{9609961}(8.047) + \frac{1378586}{9609961}(9.16) = 6.47 \text{ έτη} .$$

Αυτή αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο της διάρκειας των ομολόγων Α, Β και Γ.

Κυρτότητα (Convexity) (*)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 9.3: Κυρτότητα και σφάλμα προσέγγισης



Στο προηγούμενο τμήμα εισαγάγαμε τον ορισμό της διάρκειας D κατά Macaulay και εξηγήσαμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της διακύμανσης της τιμής ενός ομολόγου. **Η προσέγγιση όμως αυτή μπορεί να μην είναι ικανοποιητική, αν η κυρτότητα της συνάρτησης μεταξύ τιμής και της απόδοσης του ομολόγου είναι υψηλή, όπως γίνεται για πολύ μικρά επίπεδα της απόδοσης (βλέπε Διάγραμμα 9.3).** Αυτό συμβαίνει γιατί, για τον υπολογισμό της σχετικής μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου λόγω μιας διακριτής μεταβολής της απόδοσης y, η προσέγγιση που υποθέσαμε και στηρίζεται στη διάρκεια D χρησιμοποιεί την πρώτη παράγωγο για τον υπολογισμό της μεταβολής της τιμής του ομολόγου σε σχέση με την απόδοση αυτού για κάποια αρχικά επίπεδα της τιμής και απόδοσης του ομολόγου, που συμβολίζονται ως B_1 και y_1, αντίστοιχα. Αν η κυρτότητα στο σημείο αυτό, (y_1,B_1) της συνάρτησης μεταξύ της τιμής και της απόδοσης του ομολόγου είναι μεγάλη, τότε θα διαπράξουμε ένα σημαντικό σφάλμα προσέγγισης όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 9.3. **Το σφάλμα αυτό συμβολίζεται με την κάθετη πιο έντονα μαυρισμένη γραμμή στο διάγραμμα.**

Για τη διόρθωση του σφάλματος αυτού μπορούμε να προσθέσουμε ένα ακόμα όρο στην προσέγγιση πρώτου βαθμού που υποθέσαμε στην προηγούμενη ανάλυσή μας για τη διάρκεια D. **Η διόρθωση αυτή αναφέρεται ως *κυρτότητα*.** Αυτή λαμβάνει υπόψη της και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης μεταξύ της τιμής ενός ομολόγου και της απόδοσης του στο σημείο της προσέγγισης (y_1,B_1), με συνέπεια το σφάλμα προσέγγισης να μειώνεται. Μαθηματικά, η προσέγγιση αυτή αποτελεί το ανάπτυγμα της σειράς του Taylor δευτέρας τάξης της συνάρτησης μεταξύ τιμής και απόδοσης του ομολόγου γύρω από την αρχική τιμή της απόδοσης y_1, δηλ.

$$dB \approx \frac{dB}{dy}dy + \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dy^2}dy^2 .$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με την τιμή B δίνει τη σχετική μεταβολή αυτής για μια μοναδιαία μεταβολή της απόδοσης y, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dy}\frac{1}{B} &\approx \frac{dB}{dy}\frac{1}{B}dy + \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dy^2}\frac{1}{B}dy^2 \\ &\approx (MD)dy + \frac{1}{2}(\text{Κυρτοτητα})dy^2, \end{aligned} \tag{4}$$

όπου MD αποτελεί την τροποποιημένη διάρκεια και $\frac{d^2B}{dy^2}\frac{1}{B}$ αποτελεί τον όρο που διορθώνει για την κυρτότητα της σχέσης ανάμεσα στην τιμή και την απόδοση του ομολόγου. Αυτός αναφέρεται ως κυρτότητα. Με βάση τη σχέση (4), μια σχετική μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου λόγω μιας διακριτής μεταβολής της απόδοσης μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\Delta B}{B} \approx (MD)\Delta y + \frac{1}{2}(\text{Κυρτοτητα})\Delta y^2 .$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της τιμής ενός ομολόγου με κουπόνι, η κυρτότητα $\frac{d^2B}{dy^2}\frac{1}{B}$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα υπολογίζοντας πρώτα τη δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2B}{dy^2}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d^2B}{dy^2} &= \frac{1(1+1)C}{(1+y)^{1+2}} + \frac{2(2+1)C}{(1+y)^{2+2}} + \frac{3(3+1)C}{(1+y)^{3+2}} + \dots + \frac{n(n+1)C}{(1+y)^{n+2}} \\ &= \sum_{\tau=1}^{n}\frac{\tau(\tau+1)C}{(1+y)^{\tau+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}} . \end{aligned}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου $\frac{d^2B}{dy^2}$ στην πράξη. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την κυρτότητα ενός ομολόγου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6: Θεωρήστε το ομόλογο με τα στοιχεία του προηγούμενου παραδείγματος, όπου η τροποποιημένη διάρκεια είχε βρεθεί ως $MD = \frac{1}{(1+0.045)}8.27$ =7.9140 (ή 3.96 έτη). Η διόρθωση για κυρτότητα της διακύμανσης της τιμής του ομολόγου αυτού μπορεί να επιτευχθεί με βάση τα στοιχεία του ακόλουθου πίνακα:

τ	C	$\frac{\tau(\tau+1)C}{(1+y)^{\tau+2}}$
1	4.5	7.886
2	4.5	22.641
3	4.5	43.332
4	4.5	69.110
5	4.5	99.201
6	4.5	132.901
7	4.5	169.571
8	4.5	208.632
9	4.5	249.560
10	104.5	6678.186
Άθροισμα		7781.020

Με βάση αυτά, η κυρτότητα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$Κυρτότητα = \frac{d^2B}{dy^2}\frac{1}{B} = \left[\sum_{\tau=1}^{n}\frac{\tau(\tau+1)C}{(1+y)^{\tau+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+y)^{n+2}}\right]\frac{1}{B} = 7781.02\frac{1}{100} = 77.81.$$

Σε ετήσια βάση αυτή δίνεται ως $\frac{77.81}{2^2} = 19.45$, όπου 2 αποτελεί τον αριθμό εξαμήνων του έτους. Έχοντας υπολογίσει την τροποποιημένη διάρκεια (*MD*) και την κυρτότητα, στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διακύμανση της τιμής του ομολόγου σε ετήσια βάση για μια αύξηση του επιτοκίου κατά 1% την περίοδο (εδώ εξάμηνο). Τότε, η διακύμανση του ομολόγου υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta B}{B} &\approx (-MD)\Delta y + \frac{1}{2}\text{Κυρτοτητα}(\Delta y)^2 \\ &\approx (-7.9140)(0.01) + \frac{1}{2}(77.81)(0.01)^2 = -0.07914 + 0.00389 = -0.07525.\end{aligned}$$

Σε ευρώ, η διακύμανση αυτή συνεπάγεται μια πτώση της τιμής του ομολόγου κατά το ακόλουθο ποσό: €100(-0.07914+0.00389) = -€7.914+0.389 = -€7.525. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω αποτελέσματα, η κυρτότητα διορθώνει κατά πολύ μικρό βαθμό τη διακύμανση της τιμής του ομολόγου στο παραπάνω παράδειγμα.

Στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων

Τις στρατηγικές διαχείρισης (ή επενδύσεων) χαρτοφυλακίων ομολόγων μπορούμε να τις ταξινομήσουμε σε δύο ευρύτερες κατηγορίες: **τις αμυντικές (ή παθητικές -passive) και τις επιθετικές (ή ενεργητικές - active)**.

Αμυντικές στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων

Μια συχνά εφαρμοσμένη στην πράξη ***αμυντική στρατηγική διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων*** **αποτελεί η επένδυση σε κάποιο χαρτοφυλάκιο που έχει την ίδια απόδοση χρονικής περιόδου σε σχέση με εκείνη κάποιου γνωστού χαρτοφυλακίου ομολόγων της αγοράς, πχ** εκείνων των γενικών δεικτών των Lehman Brothers ή της Merril Lynch. Καθένας από τους δείκτες αυτούς κατασκευάζεται με βάση 5000 ομόλογα που έχουν ημερομηνία λήξης μεγαλύτερη του ενός έτους και έχουν ταξινομηθεί όσον αφορά το βαθμό αξιοπιστίας τους στις κατηγορίες ομολόγων από BBB και πάνω. Η παραπάνω αμυντική στρατηγική διαχείρισης ενός χαρτοφυλακίου στηρίζεται στην υπόθεση ότι ισχύει η υπόθεση της αποτελεσματικότητας των αγορών. Κάτω από την υπόθεση αυτή, κανένας επενδυτής ή διαχειριστής στην αγορά ομολόγων δεν μπορεί να επιτύχει αποδόσεις χρονικής περιόδου μεγαλύτερες από αυτές των παραπάνω χαρτοφυλακίων. Οι αποδόσεις αυτές είναι σύμφωνες με τη θεωρία των ορθολογικών προσδοκιών με κίνδυνο, όπου η απόδοση χρονικής περιόδου h (έστω ενός μήνα) θα πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο επιτόκιο της αγοράς r συν ένα ποσοστό κινδύνου φ, που προκύπτει λόγω μεταβολών στις τιμές των ομολόγων και έλλειψης ρευστότητας.

Τα χαρτοφυλάκια ομολόγων που έχουν αποδόσεις ανάλογες με αυτές των παραπάνω δεικτών κατασκευάζονται έτσι ώστε να έχουν τις ίδιες αναλογίες (διαστρωμάτωση) με εκείνα του δείκτη αναφοράς (stratified sampling), όσον αφορά το διάστημα λήξης τους, το βαθμό αξιοπιστίας τους, τον κλάδο που τα εκδίδει κ.ο.κ. Μια άλλη μέθοδος επιλογής των ομολόγων των χαρτοφυλακίων αυτών στηρίζεται στη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος ελαχιστοποίησης των αποστάσεων (ή της διακύμανσης) της απόδοσης χρονικής περιόδου του υπό κατασκευή χαρτοφυλακίου από την μέση απόδοση του δείκτη αναφοράς, χρησιμοποιώντας την τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού.

Ανοσοποίηση χαρτοφυλακίου στον κίνδυνο

Πολλές φορές όμως στην πράξη η επιλογή του χαρτοφυλακίου ομολόγων δεν εξαρτάται από τις προτιμήσεις του επενδυτή ή του διαχειριστή του, ως προς τον κίνδυνο, αλλά από τις μελλοντικές ταμειακές υποχρεώσεις του (ή τα χρέη του) που θα πρέπει να ικανοποιηθούν πλήρως. Σε μια τέτοια περίπτωση, **μια αμυντική στρατηγική επιλογής ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων θα ενδιαφερόταν στο να εξασφαλίσει τις μελλοντικές ταμειακές ροές του χαρτοφυλακίου αυτού από τυχόν απώλειες που θα προκαλούσε μια δυσμενής μεταβολή των επιτοκίων στο μέλλον.** Η τεχνική που εξασφαλίζει τη στρατηγική αυτή αναφέρεται ως *ανοσοποίηση* (immunization) του χαρτοφυλακίου στις μεταβολές των επιτοκίων.

Για την καλύτερη κατανόηση της τεχνικής της ανοσοποίησης, στη συνέχεια του κεφαλαίου παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ο διαχειριστής κάποιου χαρτοφυλακίου ομολόγων θέλει να εξασφαλίσει από αυτό ποσό αξίας €1000. Το ποσό αυτό πρέπει να καταβληθεί μετά από δύο χρόνια στους δανειστές του. Υποθέστε ότι για να επιτύχει το στόχο του, αυτός έχει δύο επιλογές. Η πρώτη (i) είναι να επενδύσει σε ένα ομόλογο που λήγει μετά από τρία έτη. Έστω ότι το ομόλογο αυτό έχει ονομαστική αξία M=€1000, επιτόκιο κουπονιού c=8% και τιμής αγοράς B=€950.25. Η απόδοση στη λήξη (yield to maturity) του ομολόγου αυτού υπολογίζεται ως y=10% και ισούται με το επιτόκιο της αγοράς r, το οποίο στο θεωρείται το ίδιο για τις περιόδους μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Η διάρκειά του ομολόγου αυτού D υπολογίζεται στον Πίνακα 9.1 και δίνεται ως D=2.78 έτη. Εφόσον το επιτόκιο της αγοράς r είναι το ίδιο για τις επόμενες χρονικές περιόδους, πουλώντας το ομόλογο αυτό μετά από δύο χρόνια ο διαχειριστής του μπορεί να εξασφαλίσει το ποσό των €1000, που αποτελεί τη μελλοντική ταμειακή του υποχρέωση. Αυτό συμβαίνει γιατί από την πώληση του τριετούς ομολόγου μετά από δύο χρόνια αυτός θα λάβει εισόδημα $€981.82 = \dfrac{1080}{1+0.10}$, ενώ από την επανεπένδυση των κουπονιών θα λάβει $€168.00 = 80(1+0.10)+80$. Το σύνολο του εισοδήματος του διαχειριστή που προκύπτει από τις δύο παραπάνω πηγές ανέρχεται σε $€1149.82 = 981.82 + 168.00$, που καλύπτει τις υποχρεώσεις του.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.1: Διάρκεια Ομολόγου $D = \sum_{\tau=1}^{3} PV(CF_\tau)\times\tau \Big/ P$

Χρόνος (τ)	Ροή (CF)	PV ροών	(PV ροών)$\times$Χρόνος
1	80	72.73	72.3×1=72.73
2	80	66.12	66.12×2=132.23
3	1000+80	811.40	811.40×3=2434.21
		Άθροισμα = 2539.17	
		$D = 2639.17/950.25 = 2.78$ έτη	

Η δεύτερη (ii) επιλογή του διαχειριστή είναι να επενδύσει διαδοχικά σε καθένα από τα δύο επόμενα έτη σε κάποιο βραχυπρόθεσμο ομόλογο λήξης ενός έτους. Έστω, ότι ένα ετήσιο ομόλογο που είναι διαθέσιμο στην αγορά για το σκοπό αυτό, έχει ονομαστική αξία που συμπεριλαμβάνει και εκείνη της πληρωμής του κουπονιού €70, δηλ. M=€1000+ €70=€1070. Αν η τρέχουσα τιμή του ομολόγου αυτού είναι B=€972.75, τότε η απόδοσή στη λήξη του υπολογίζεται ως y=10%, όσο δηλαδή είναι και το επιτόκιο της αγοράς r. Επενδύοντας το ποσό των €1070 σε ένα αντίστοιχο ομόλογο λήξης ενός έτους που εκδίδεται την επόμενη περίοδο (έτος), ο διαχειριστής θα εξασφαλίσει το ποσό των €1000 που απαιτεί για να καλύψει τις ταμειακές του ανάγκες μετά το δεύτερο έτος.

Και οι δύο παραπάνω επενδυτικές επιλογές (i) και (ii) ενέχουν κίνδυνο απώλειας εισοδήματος, όταν το επιτόκιο της αγοράς μεταβληθεί στο μέλλον. Αν αυτό αυξηθεί μετά από ένα χρόνο, τότε η τιμή του τριετούς ομολόγου θα πέσει και έτσι, η στρατηγική (i) μπορεί να μην εξασφαλίσει το απαιτούμενο ποσό των €1000 μετά από δύο χρόνια. Από την άλλη μεριά, η επενδυτική επιλογή (ii) θα αποφέρει μεγαλύτερη αύξηση του εισοδήματος από την αναμενόμενη, καθώς το επιτόκιο επανεπένδυσης θα αυξηθεί. Τα αντίστροφα θα συμβούν, αν το επιτόκιο μειωθεί μετά τον πρώτο χρόνο. Τότε, η στρατηγική (ii) θα οδηγήσει σε μείωση του εισοδήματος του χαρτοφυλακίου από την επανεπένδυση του κεφαλαίου, αλλά η στρατηγική (i) θα αποδειχθεί πιο προσοδοφόρα καθώς οι μελλοντικές τιμές των ομολόγων θα αυξηθούν. Η παραπάνω ανάλυση δείχνει καθαρά ότι καμία από τις δύο παραπάνω επιλογές δεν είναι ουδέτερη στο κίνδυνο, όταν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την κατεύθυνση μεταβολής των επιτοκίων.

Μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα της επιλογής της κατάλληλης επενδυτικής πολιτικής είναι να επενδύσουμε ένα μέρος του χαρτοφυλακίου στο τριετές ομόλογο και ένα άλλο στο μονοετές. Η τεχνική αυτή είναι γνωστή ως *ανοσοποίηση* ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων. Σύμφωνα με αυτή θα πρέπει να επιλεγούν τα βάρη των ομολόγων του χαρτοφυλακίου έτσι ώστε η διάρκεια του D να αντιστοιχεί με εκείνη του χρονικού διαστήματος των υποχρεώσεων του επενδυτή (στο παράδειγμά μας τα δύο έτη). Στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα, αν w_1 αποτελεί το βάρος του χαρτοφυλακίου για το τριετές ομόλογο και w_2 για το μονοετές, τότε η άριστη επιλογή τους για την επίτευξη της ανοσοποίησης του χαρτοφυλακίου ομολόγων καθορίζεται λύνοντας το ακόλουθο σύστημα δύο εξισώσεων:

1η $\qquad w_1+w_2=1$, που αποτελεί τον *εισοδηματικό περιορισμό*,

2η $\qquad D=(w_1\times D_1)+(w_2\times D_2)=2.0$ ή $D=(w_1\times 2.78)+(w_2\times 1.0)=2.0$,

όπου D_1, D_2 αποτελούν τις διάρκειες του τριετούς και μονοετούς ομολόγου.

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει: w_1=0.56 και w_2=0.44. Για την εύρεση των μεριδίων που θα πρέπει να αγοραστούν από κάθε ομόλογο του χαρτοφυλακίου αυτού, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το χρηματικό ποσό που χρειάζεται να επενδύσει σήμερα στην αγορά ο διαχειριστής για την κάλυψη του ποσού των υποχρεώσεών του €1000 μετά από δύο χρόνια. Το ποσό αυτό δίνεται ως $€826.45=1000\big/(1+0.10)^2$ και αποτελεί την τιμή ενός διετούς ομολόγου χωρίς κουπόνι.

Σύμφωνα με τα άριστα βάρη του ανοσοποιημένου χαρτοφυλακίου που βρέθηκαν πιο πάνω (δηλ. w_1=0.56 και w_2=0.44), το χρηματικό ποσό €826.45 θα πρέπει να κατανεμηθεί ως €464.30 = €826.45$\times$0.56 στο τριετές ομόλογο και ως €362.15 = €826.45$\times$0.44 στο μονοετές. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να αγοραστούν 0.489= €464.30/€950.25 μερίδια από το τριετές ομόλογο και 0.372=€362.15/€972.75 από το μονοετές, όπου €950.25 αποτελεί την αγοραία τιμή του πρώτου ομολόγου και €972.75 του δευτέρου.

Για να διαπιστωθεί ότι πράγματι το παραπάνω ανοσοποιημένο χαρτοφυλάκιο δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές μεταβολές των επιτοκίων της αγοράς, στον Πίνακα 9.2 παρουσιάζουμε την αξία αυτού μετά από δύο χρόνια (n=2), δηλαδή τη χρονική στιγμή t+2 όπου ο διαχειριστής χρειάζεται να εκταμιεύσει το ποσό των €1000. Αυτό γίνεται για τρία διαφορετικά σενάρια επιτοκίων r. Αν το επιτόκιο μετά το πέρας του πρώτου έτους παραμένει το ίδιο, δηλαδή r=10%, αν μειωθεί στο επίπεδο 9% και τέλος, αν αυξηθεί στο επίπεδο 11%.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2: Αξία ανοσοποιημένου χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου t+2

	R		
Αξία στο τέλος της περιόδου t+2	9%	10%	11%
Μονοετές ομόλογο: $€1070 \times 0.372 \times (1+r)$	433.860	437.84	441.82
Τριετές ομόλογο: Από κουπόνια του έτους t+1 $€80 \times 0.489 \times (1+r)$	42.64	43.03	43.42
Από κουπόνια του έτους t+2 $€80 \times 0.489$	39.12	39.12	39.12
Από την πώληση το έτος t+2 $€\, P = \frac{1080}{(1+r)} \times 0.489$	484.51	480.11	475.78
Συνολική Αξία χαρτοφυλακίου	1000.13	1000.10	1000.14

Αντιστάθμιση του κινδύνου πτώσης των τιμών των ομολόγων

Για να περιορίσουν τις ζημιές από πιθανές δυσμενείς μεταβολές των τιμών των ομολόγων, πολλοί επενδυτές ή διαχειριστές χαρτοφυλακίων ομολόγων καταφεύγουν στην *αντιστάθμιση* (hedging) τους. Δηλαδή, για μια πώληση κάποιου ομολόγου (ή μεριδίου χαρτοφυλακίου), που πιθανά να αποβεί ζημιογόνα λόγω πτώσης των τιμών των ομολόγων, αυτοί προγραμματίζουν παράλληλα την αγορά κάποιου άλλου ομολόγου. Με την αντίθετη κίνηση αυτή, αντισταθμίζουν τις ζημίες που θα προκύψουν από την πώληση των ομολόγων σε μικρότερη τιμή με κέρδη από την αγορά ομολόγων σε μικρότερη τιμή από την τρέχουσα.

Ένα ερώτημα που αφορά την αντιστάθμιση είναι τι ποσό θα πρέπει να αντισταθμίσουμε για κάθε ένα ευρώ (€1) της θέσης αγοράς ή της πώλησης ομολόγων που θέλουμε να πάρουμε. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να βρούμε *το λόγο αντιστάθμισης* (hedge ratio - *HR*) ανάμεσα στο ομόλογο που θέλουμε να αντισταθμίσουμε την αγορά (ή πώλησή του), που θα συμβολίζεται ως *TBH* (από την αγγλική ορολογία to be hedged -*TBH*), και εκείνο που χρησιμοποιείται ως αντισταθμιστικό μέσο, που συμβολίζεται ως *HI* (από την αγγλική ορολογία to hedging instrument - *HI*). Για την εύρεση του λόγου *HR*, θεωρήστε ότι σε απόλυτο μέγεθος οι μεταβολές της τιμής του *TBH* ομολόγου ισούνται με εκείνες του *HI*, δηλαδή ισχύει

$$\Delta B^{TBH} = \Delta B^{HI} .$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις ακόλουθες σχέσεις της Ευρώ-Διάρκειας έχουμε:

$$\Delta B^{TBH} = \left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{TBH}\right)\Delta y^{TBH} \quad \text{και} \quad \Delta B^{H} = \left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{HI}\right)\Delta y^{HI} ,$$

όπου Ευρώ-Διάρκεια$^{(j)}$ (*j*={*TBH*,*HI*}) αποτελεί την Ευρώ-διάρκεια για κάθε ένα απο τα δύο ομόλογα που εμπλέκονται στην αντιστάθμιση. Διαιρώντας κατά μέλη την τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$\frac{\Delta B^{TBH}}{\Delta B^{HI}} = \frac{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{\text{TBH}}\right)\Delta y^{TBH}}{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{HI}\right)\Delta y^{HI}} \;\Rightarrow\; \Delta B^{TBH} = HR \times \Delta B^{HI} ,$$

όπου

$$HR = \frac{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{TBH}\right)}{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{HI}\right)} \times YIELD\ BETA$$

αποτελεί το λόγο αντιστάθμισης και $YIELD\ BETA = \dfrac{\Delta y^{TBH}}{\Delta y^{HI}}$ είναι ο συντελεστής απόδοσης βήτα που μετρά τη σχετική ευαισθησία μεταξύ των μεταβολών της απόδοσης στη λήξη Δy^{TBH} και Δy^{H}. Αυτός μπορεί να υπολογιστεί ως ο συντελεστής κλίσης (βήτα) της παλινδρόμησης της μεταβλητής Δy^{TBH} πάνω στη μεταβλητή Δy^{HI}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.7: Έστω ότι επιθυμούμε να αντισταθμίσουμε τον κίνδυνο αύξησης της τιμής αγοράς ενός ομολόγου λήξης 5-ετών το οποίο πωλείται στο άρτιο και έχει ονομαστική αξία €100 με ένα άλλο ομόλογο πενταετίας του οποίου η τιμή αγοράς είναι €115.44. Η τροποποιημένη διάρκεια (*MD*) για το πρώτο ομόλογο βρέθηκε ως *MD*=8.11 ενώ για το δεύτερο δίνεται ως *MD*=7.11. Ο συντελεστής απόδοσης-βήτα για τα δύο ομόλογα αυτά εκτιμήθηκε ότι ισούται με τη μονάδα.

Η Ευρώ-διάρκεια καθενός από τα δύο ομόλογα που εμπλέκονται στην αντιστάθμιση υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{TBH} = -8.11 \times (100) = 811$$

και

$$\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{H} = -7.71\times(115.44) = 890.04,$$

αντιστοίχως. Επομένως, ο λόγος αντιστάθμισης HR υπολογίζεται ως

$$HR = \frac{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{TBH}\right)}{\left(\text{Ευρώ-Διάρκεια}^{HI}\right)}\times YIELD\ BETA = \frac{811.0}{890.04}\times 1.0 = 0.91.$$

Η τιμή αυτή του λόγου HR σημαίνει ότι για κάθε €1 που θα αγοράσουμε από το *TBH*-ομόλόγο, θα πρέπει να πουλήσουμε €0.91 από το *HI*-ομόλογο, που αποτελεί το μέσο αντιστάθμισης.

Επιθετικές στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων

Βασιζόμενοι στη υπόθεση ότι η αγορά των ομολόγων δεν είναι αποτελεσματική, μια *επιθετική στρατηγική διαχείρισης* ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων μπορεί να αποφέρει επιπλέον κέρδη από αυτά που αποδίδονται στον κίνδυνο στην αγορά και προέρχονται από μεταβολές στα επιτόκια. Μεταξύ άλλων, επιθετικές στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων συνήθως περικλείουν την αγοραπωλησία ομολόγων που είναι υποτιμημένα ή υπερτιμημένα με βάση το σύνολο πληροφοριών της αγοράς. Επίσης, περικλείουν τη χρονολογική πρόβλεψη γενικών μεταβολών στα επιτόκια της αγοράς στο μέλλον και την αγοραπωλησία ομολόγων στα σημεία των μεταβολών αυτών. Και οι δύο παραπάνω στρατηγικές επιθετικής διαχείρισης χαρτοφυλακίων θεωρούν ότι ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου διαθέτει το πλεονέκτημα της καλύτερης πληροφόρησης και πρόβλεψης σε σχέση με την αγορά.

Επιθετικές στρατηγικές στηριζόμενες στην απόδοση χρονικής περιόδου

Πολλές επιθετικές στρατηγικές διαχείρισης χαρτοφυλακίων ομολόγων στηρίζονται στον υπολογισμό και την παρακολούθηση της *απόδοσης χρονικής περιόδου* ενός ομολόγου ή ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων για ένα μήνα, ένα χρόνο, μια πενταετία κ.ο.κ. Με βάση αυτή, μπορεί να αξιολογηθεί διαχρονικά η συνολική αποδοτικότητα ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων και να προταθεί η ανασύνθεσή του. Αυτό μπορεί να γίνει αντικαθιστώντας ομόλογα με μικρότερη της αναμενομένης απόδοση χρονικής περιόδου με κάποια που έχουν (ή προβλέπονται να έχουν) υψηλότερες αποδόσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρήστε ένα δεκαετές ομόλογο (n=10 έτη), ονομαστικής αξίας M=€100, με απόδοση κουπονιού c=4% ανά έτος (δηλαδή αξία κουπονιού C=€4=0.04×100 το έτος, ή €2 το εξάμηνο) και τιμή αγοράς $B_t(10\ έτη)$=€67.48. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι πληρωμές των κουπονιών καταβάλλονται ανά εξάμηνο, η απόδοση του ομολόγου αυτού υπολογίζεται ως y=9% ετησίως (δηλαδή 4.5% ανά εξάμηνο). Αν θεωρηθεί ότι η χρονική περίοδος που μας ενδιαφέρει για τη μέτρηση της απόδοσης του συγκεκριμένου ομολόγου είναι πέντε χρόνια από σήμερα και ότι προβλέπεται μια παράλληλη/επίπεδη μείωση των επιτοκίων από 9% σε 8% με το τέλος της πενταετίας, τότε η απόδοση χρονικού ορίζοντα του ομολόγου για *m*=10 εξάμηνα (ή 5 έτη) υπολογίζεται ως εξής:

$$(1+H_{t+m}(m)) = (1+h)^m = \frac{TFV_{t+m}}{B_t(n)} = \frac{C\left[\dfrac{(1+r)^m - 1}{r}\right] + B_t(n-m)}{B_t(n)},$$

όπου $B_{t+m}(n\text{-}m)$ αποτελεί την τιμή πώλησης του ομολόγου μετά από *m*=5 χρόνια, όπου απομένουν 5=10-5 έτη ως τη λήξη του. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση *r*=0.04, που είναι το επιτόκιο της αγοράς μετά από 5 έτη (*m=10* εξάμηνα), *C*=2, $B_t(n)$=67.48 δίνει την τιμή πώλησης του $B_{t+m}(n\text{-}m)$ ως

$$B_{t+m}(n-m) = 2\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+0.04)^{10}}}{0.04}\right] + \frac{100}{(1+0.04)^{10}} = 83.78.$$

Με βάση αυτή η απόδοση χρονικού ορίζοντα πενταετίας υπολογίζεται ως

$$(1+H) = (1+h)^{10} = \frac{2.0\left[\dfrac{(1+0.045)^{10} - 1}{0.045}\right] + 83.78}{67.48} = 1.60 \;\;\Rightarrow\;\; H\text{=}0.60,$$

η οποία συνεπάγεται μια μέση απόδοση για κάθε εξάμηνο της πενταετίας η οποία δίνεται ως $h = (1.60)^{1/10} - 1 = 0.048$ (περίπου 10% ανά έτος). Η απόδοση αυτή είναι μεγαλύτερη από την απόδοση στη λήξη του ομολόγου (που είναι 9% ανά έτος). Αυτό οφείλεται στην πτώση του επιτοκίου μετά το πέμπτο έτος από 9% σε 8%. Η πτώση αυτή οδηγεί σε αύξηση της τιμής του ομολόγου σε σχέση με εκείνη αν το επιτόκιο παρέμενε σταθερό στο επίπεδο 9%. Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα του παραπάνω παραδείγματος δείχνουν καθαρά ότι η σωστή πρόβλεψη της μεταβολής των επιτοκίων μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση των αποδόσεων ενός ομολόγου. Το ίδιο μπορεί να ισχυριστεί κάποιος και για ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων.

Η στρατηγική παραμονής στην καμπύλη των επιτοκίων (Riding the yield curve)

Η *στρατηγική παραμονής στην καμπύλη των επιτοκίων* (ή των αποδόσεων στη λήξη) (riding the yield curve), είναι μια επιθετική στρατηγική που ακολουθείται συχνά στη πράξη όταν η κλίση της καμπύλης των επιτοκίων είναι σήμερα ανοδική και αναμένεται να γίνει επίπεδη στο μέλλον. Η ανοδική κλίση της καμπύλης των επιτοκίων σημαίνει ότι τα μακροπρόθεσμα ομόλογα κοστίζουν λιγότερο από τα βραχυπρόθεσμα. Έτσι, σύμφωνα με τη στρατηγική παραμονής στην καμπύλη επιτοκίων, πουλώντας βραχυπρόθεσμα ομόλογα και τοποθετώντας τα χρήματα από αυτή τη συναλλαγή στην αγορά μακροπρόθεσμων ομολόγων, ο διαχειριστής ομολόγων μπορεί να επιτύχει υψηλότερες αποδόσεις και κέρδη για το χαρτοφυλάκιό του, αν κατά τη χρονική στιγμή πώλησης των μακροπρόθεσμων ομολόγων η καμπύλη των επιτοκίων γίνει επίπεδη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρήστε ένα διαχειριστή χαρτοφυλακίου ο οποίος προτιμά για ταμειακούς λόγους να επενδύσει σε ένα έντοκο γραμμάτιο τριών μηνών. Το γραμμάτιο αυτό έχει τιμή αγοράς €98.25 και ονομαστική αξία €100. Η απόδοση του σε ετήσια βάση είναι 7.00%. Στην αγορά υπάρχει και κάποιο άλλο ομόλογο έξι μηνών που έχει την ίδια ονομαστική αξία άλλα η τιμή αγοράς του είναι πολύ μικρότερη και ανέρχεται σε €96.00. Η μικρότερη τιμή του ομολόγου αυτού σημαίνει ότι η απόδοσή του είναι μεγαλύτερη εκείνου με διάστημα λήξης τριών μηνών και ανέρχεται σε 8.0%. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία, αν ο διαχειριστής επενδύσει στο τριμηνιαίο ομόλογο, τότε θα λάβει ως απόδοση στο τέλος του τριμήνου την ακόλουθη:

$$\frac{100-98.25}{98.25}\times\frac{365}{90}=0.0722\ (7.22\%)\,.$$

Αν όμως επενδύσει στο πιο μακροπρόθεσμο ομόλογο των έξι μηνών και το πωλήσει στη τιμή των €98.25 μετά από τρεις μήνες, τότε η απόδοσή του θα είναι:

$$\frac{98.25-96.00}{96.00}\times\frac{365}{90}=0.095\ (9.50\%)\,.$$

Η απόδοση αυτή θα είναι υψηλότερη της επένδυσης στο τριμηνιαίο έντοκο γραμμάτιο. Σημειώστε ότι η τιμή πώλησης των €98.25 θεωρεί ότι ή απόδοση του τριμηνιαίου ομολόγου θα παραμείνει η ίδια κατά το επόμενο τρίμηνο.

Συμφωνίες ανταλλαγής (Bond Swaps)

Με τις *συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων* ανάμεσα σε δύο μέρη, το ένα μπορεί ανταλλάξει μακροπρόθεσμα (ή βραχυπρόθεσμα) ομόλογα με το άλλο, χωρίς να πραγματοποιηθεί φυσική συναλλαγή. Μέσω των συμφωνιών αυτών, μπορεί να αναπροσαρμοστεί η σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων χωρίς να υπάρξουν κόστη συναλλαγής παρά μόνο ένα μικρό αντίτιμο που θα πρέπει να καταβληθεί από κάθε αντισυμβαλλόμενο μέρος στη τράπεζα που θέτει την συμφωνία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ως παράδειγμα μιας συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίων, θεωρήστε την περίπτωση όπου το μέρος Α συμφωνεί να καταβάλει στο Β για τα επόμενα τέσσερα τρίμηνα ένα μεταβλητό χρηματικό που υπολογίζεται ως η απόδοση ενός ονομαστικού ποσού (έστω €10 εκατομμύρια) με βάση το τριμηνιαίο επιτόκιο της διατραπεζικής αγοράς δανεισμού του Λονδίνου λίμπορ (libor), που θα ισχύει στην αγορά με το πέρας κάθε τριμήνου. Σε ανταπόδοση της πληρωμής αυτής, το μέρος Β συμφωνεί να πληρώνει στο Α ένα ποσό που υπολογίζεται ως η απόδοση του ονομαστικού ποσού των €10 εκατομμυρίων με βάση ένα σταθερό επιτόκιο 2%, για κάθε τρίμηνο. Με την παραπάνω συμφωνία, το μέρος Α ουσιαστικά πουλά βραχυπρόθεσμα ομόλογα (ή κυμαινόμενου επιτοκίου ομόλογα, όπως αναφέρονται διαφορετικά) αξίας €10 εκατομμυρίων στο μέρος Β και αγοράζει από αυτό μακροπρόθεσμα ομόλογα (ή ομόλογα σταθερού επιτοκίου, όπως αναφέρονται διαφορετικά) χωρίς να λάβει μέρος κάποια φυσική συναλλαγή. Από τη συμφωνία αυτή το μέρος Α θα βγει κερδισμένο αν συμβεί (όπως αυτό αναμένει) μια μελλοντική πτώση στα επιτόκια, ενώ το Β αν συμβεί το αντίθετο, δηλαδή μια άνοδος των επιτοκίων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3: Ροές Συμφωνίας ανταλλαγής μεταξύ των μερών Α και Β

		Ροές Α			Ροές Β		
Τρίμηνο	LIBOR	Εισροές από Β	Εκροές στο Β	Καθαρή ροές	Εισροές από Α	Εκροές στο Α	Καθαρές ροές
I	1.5%	200000	150000	50000	150000	200000	-50000
II	2.0%	200000	200000	0	200000	200000	0
III	2.0%	200000	200000	0	200000	200000	0
IV	2.5%	200000	250000	-50000	250000	200000	50000

Οι ροές της παραπάνω συμφωνίας ανταλλαγής παρουσιάζονται στον Πίνακα 9.3, για επίπεδα επιτοκίων 1.5%, 2.0%, 2.0% και 2.5% που αντιστοιχούν σε καθένα από τα επόμενα τέσσερα τρίμηνα. Επειδή ο τρόπος που καταβάλλονται οι πληρωμές σε μια συμφωνία ανταλλαγής είναι μόνο από την πλευρά που χρεώνεται τη διαφορά στις καθαρές ροές, το πρώτο τρίμηνο το μέρος Β θα καταβάλλει στο Α το ποσό των €50000, το δεύτερο και τρίτο τρίμηνο κανένα μέρος δεν θα καταβάλλει στον άλλο οποιοδήποτε ποσό και το τέταρτο το Α θα καταβάλλει στο Β το ποσό των €50000.