

Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 5:

Θεωρία Χαρτοφυλακίου του Markowitz

Θεωρία Χαρτοφυλακίου του Harry Markowitz

- Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου του **Harry Markowitz (1952)** αποτελεί τη βάση της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας και εξετάζει πώς οι επενδυτές μπορούν να **μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη απόδοση** ενός χαρτοφυλακίου για **δεδομένο (σταθερό) επίπεδο κινδύνου**, ή αντίστροφα, δηλαδή να **ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο για ένα δεδομένο (σταθερό) επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης**.

Υποθέσεις του Υποδείγματος Markowitz

Το υπόδειγμα βασίζεται σε ορισμένες βασικές υποθέσεις:

- Οι επενδυτές είναι **ορθολογικοί (*rational*)** και αποστρέφονται τον κίνδυνο (**risk aversion**)
- Η απόδοση των επενδύσεων περιγράφεται πλήρως από:
 - την **αναμενόμενη απόδοση**
 - τη **διακύμανση / τυπική απόκλιση** (κίνδυνος)
- Οι αγορές είναι **τέλειες** (χωρίς φόρους, κόστη συναλλαγών)
- Οι επενδυτές μπορούν να δανείζονται και να δανείζουν στο ίδιο επιτόκιο
- Οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν **κανονική κατανομή (*normal distribution*)**
- Οι συσχετίσεις μεταξύ αποδόσεων είναι γνωστές και σταθερές

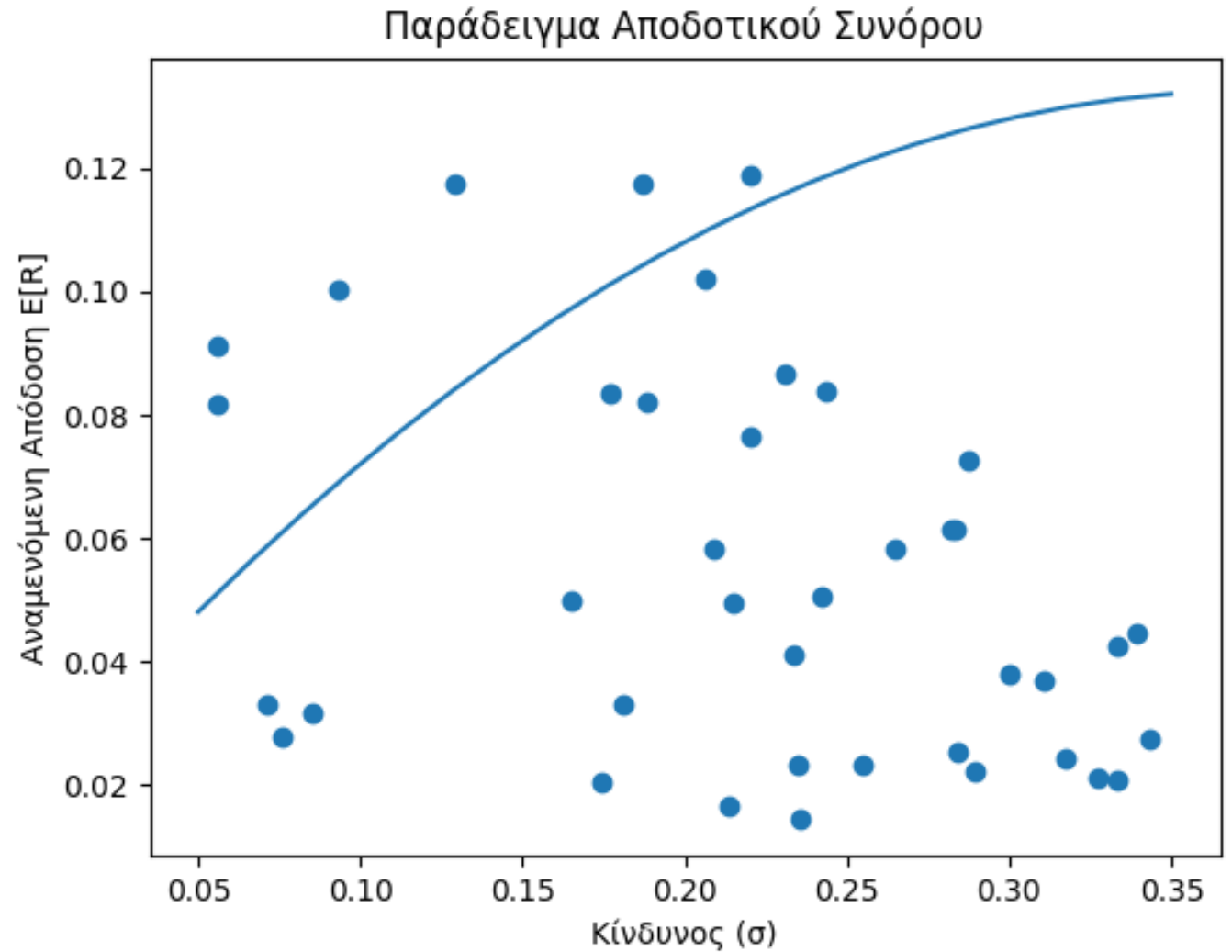
Αποτελεσματικά Χαρτοφυλάκια (Efficient Frontier)

- Ένα χαρτοφυλάκιο θεωρείται **αποτελεσματικό (efficient)** όταν:
 - προσφέρει τη **μέγιστη δυνατή απόδοση** για δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή
 - τον **ελάχιστο δυνατό κίνδυνο** για δεδομένη απόδοση
- Το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων σχηματίζει το **Αποτελεσματικό Σύνορο (Efficient Frontier)**
- Κάθε χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται **κάτω** από το αποτελεσματικό σύνορο θεωρείται **μη αποδοτικό**, επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένα άλλο χαρτοφυλάκιο με:
 - είτε **υψηλότερη απόδοση για τον ίδιο κίνδυνο**,
 - είτε **χαμηλότερο κίνδυνο για την ίδια απόδοση**

Αποτελεσματικό Σύνορο Γραφικά

Γραφικά:

- **Οριζόντιος άξονας:** Κίνδυνος (σ)
- **Κατακόρυφος άξονας:** Αναμενόμενη απόδοση $E[R]$
- **Καμπύλη:** το αποτελεσματικό σύνορο
- **Διάσπαρτα σημεία κάτω από την καμπύλη:** μη αποδοτικά χαρτοφυλάκια



Διαφοροποίηση και Μείωση Κινδύνου

- Η διαφοροποίηση (diversification) είναι κεντρική έννοια στη θεωρία Markowitz.
- Η θεωρία Markowitz δείχνει ότι ο συνολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου **δεν** είναι απλώς ο μέσος όρος των κινδύνων των επιμέρους τίτλων.
- Μέσω της **διαφοροποίησης** (δηλαδή όχι επένδυση σε ένα μόνο περιουσιακό στοιχείο αλλά σε συνδυασμό τίτλων με χαμηλή ή αρνητική συσχέτιση), ο επενδυτής μπορεί να:
 - μειώσει τον κίνδυνο
 - χωρίς απαραίτητα να μειώσει την αναμενόμενη απόδοση.
- Η **συσχέτιση (ρ)** μεταξύ αποδόσεων παίζει κρίσιμο ρόλο:
 - $\rho < 1 \rightarrow$ μείωση κινδύνου
 - $\rho = -1 \rightarrow$ τέλεια διαφοροποίηση

➤ Σημείωση:

Η διαφοροποίηση **δεν εξαλείφει τον συστηματικό κίνδυνο**, μόνο τον **μη συστηματικό**.

➤ Συμπέρασμα:

Η σωστή κατανομή κεφαλαίων μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο **χωρίς** απαραίτητα να μειωθεί η απόδοση.

Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου με Περιορισμούς (Πολυμετοχικό Χαρτοφυλάκιο)

Η βελτιστοποίηση περιλαμβάνει την επίλυση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς:

- **Στόχος** (για παράδειγμα) → **Ελαχιστοποίηση διακύμανσης:**

$$\min \sigma_p^2 = w' \Sigma w$$

- **Περιορισμοί:**

- w_1, w_2, \dots, w_N με $\sum w_i = 1$ (πλήρης επένδυση)
- $E(R_p) = \sum w_i E(R_i)$
- $w_i \geq 0$ (χωρίς ανοικτές πωλήσεις, αν ισχύει)

Οι περιορισμοί αντικατοπτρίζουν πραγματικές συνθήκες αγοράς.

Ανάλυση Περιορισμών

1. $\sum w_i = 1$ (πλήρης επένδυση)

Αυτός ο περιορισμός σημαίνει ότι:

- Όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο του επενδυτή είναι **πλήρως κατανεμημένο** στα επιμέρους περιουσιακά στοιχεία.
- Δεν κρατά ρευστό εκτός χαρτοφυλακίου και δεν επενδύει περισσότερα από όσα διαθέτει.

2. $E(R_p) = \sum w_i E(R_i)$

Αυτός είναι ο ορισμός της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου (δηλ. είναι **ο σταθμισμένος μέσος όρος** των αναμενόμενων αποδόσεων των τίτλων).

3. $w_i \geq 0$ (χωρίς ανοικτές πωλήσεις – no short selling)

Αυτός ο περιορισμός σημαίνει ότι:

- Ο επενδυτής **δεν επιτρέπεται να πουλήσει τίτλους που δεν κατέχει**.
- Κάθε βάρος πρέπει να είναι μη αρνητικό.

Όταν **δεν ισχύει** αυτός ο περιορισμός:

- επιτρέπονται ανοικτές πωλήσεις
- κάποια w_i μπορεί να είναι **αρνητικά**
- το χαρτοφυλάκιο μπορεί να περιλαμβάνει μόχλευση

Σημείωση:

- Η απαγόρευση short selling είναι θεσμικός / πρακτικός περιορισμός, όχι θεωρητικός.
- Στην «καθαρή» θεωρία Markowitz συχνά επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις.

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Διακύμανσης

Γραμμική Άλγεβρα

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Διακύμανσης

Θέλουμε να βρούμε τα βάρη w που ελαχιστοποιούν τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου:

$$\min \sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

Όπου:

- $w \in \mathbb{R}^n$: διάνυσμα βαρών χαρτοφυλακίου
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$: πίνακας συνδιακυμάνσεων (Variance-Covariance Matrix)
 - συμμετρικός: $\Sigma = \Sigma^T$
 - θετικά ορισμένος (ή ημιορισμένος)
- $w^T \Sigma w$: τετραγωνική μορφή (quadratic form), όπου το αποτέλεσμα είναι πραγματικός αριθμός (scalar)

Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Διακύμανσης

Γραμμική Άλγεβρα

Πιο συγκεκριμένα: $w^T \Sigma w$

- $w = (w_1, \dots, w_n)^T$
- $\Sigma = (\sigma_{ij})$ πίνακας συνδιακυμάνσεων

Αναπτύσσοντας:

$$w^T \Sigma w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j$$

Δηλαδή:

$$\sigma_p^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{i < j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

→ Ακριβώς ο τύπος της διακύμανσης χαρτοφυλακίου.

Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος Markowitz

Mean–Variance Model

Έστω:

- n : αριθμός αξιογράφων
- $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$: διάνυσμα βαρών χαρτοφυλακίου
- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$: αναμενόμενες αποδόσεις
- Σ : πίνακας συνδιακυμάνσεων αποδόσεων
- $\mathbf{1}$: διάνυσμα μονάδων

Τότε:

- **Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου**

$$E(R_p) = \mu^T w$$

- **Κίνδυνος χαρτοφυλακίου (διακύμανση)**

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος Markowitz

Mean–Variance Model

Model 1: Ελαχιστοποίηση κινδύνου για δεδομένη απόδοση

\min_w
υπό τους περιορισμούς:

$$\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}$$

$$\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{w} = \mu_p$$

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$$

$$w_i \geq 0$$

(αν δεν επιτρέπεται short selling)

- Ελαχιστοποίηση κινδύνου για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης ($\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{w} = \mu_p$)
- Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται για την κατασκευή του αποτελεσματικού συνόρου.

Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος Markowitz Mean–Variance Model

Model 2: Μεγιστοποίηση απόδοσης για δεδομένο κίνδυνο

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{w}} && \mu^\top \mathbf{w} \\ & \text{υπό τους περιορισμούς:} && \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \leq \sigma_p^2 \\ & && \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1 \\ & && \mathbf{w}_i \geq 0 \end{aligned}$$

- Μεγιστοποίηση αναμενόμενης απόδοσης για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου ($\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \leq \sigma_p^2$)
- Ισοδύναμο πρόβλημα.

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου

- Το πάνω άκρο θα περιλαμβάνει μόνο τη μετοχή με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση. Οπότε το βρίσκω κάνοντας μόνο:

$$\max E(R_p)$$

(Αγνοώντας πλήρως τον κίνδυνο από τον περιορισμό)

- Το κάτω άκρο το βρίσκω κάνοντας μόνο ελαχιστοποίηση του κινδύνου. Δηλαδή:

$$\min Var$$

(Αγνοώντας πλήρως την απόδοση από τον περιορισμό)

Θα είναι το Minimum Variance Portfolio (MVP) και θα περιέχει πάντα πολλές μετοχές (διότι όταν περιλαμβάνονται πολλές μετοχές τότε μπορείς να κάνεις διαφοροποίηση και έτσι να πετύχεις μικρότερο κίνδυνο)

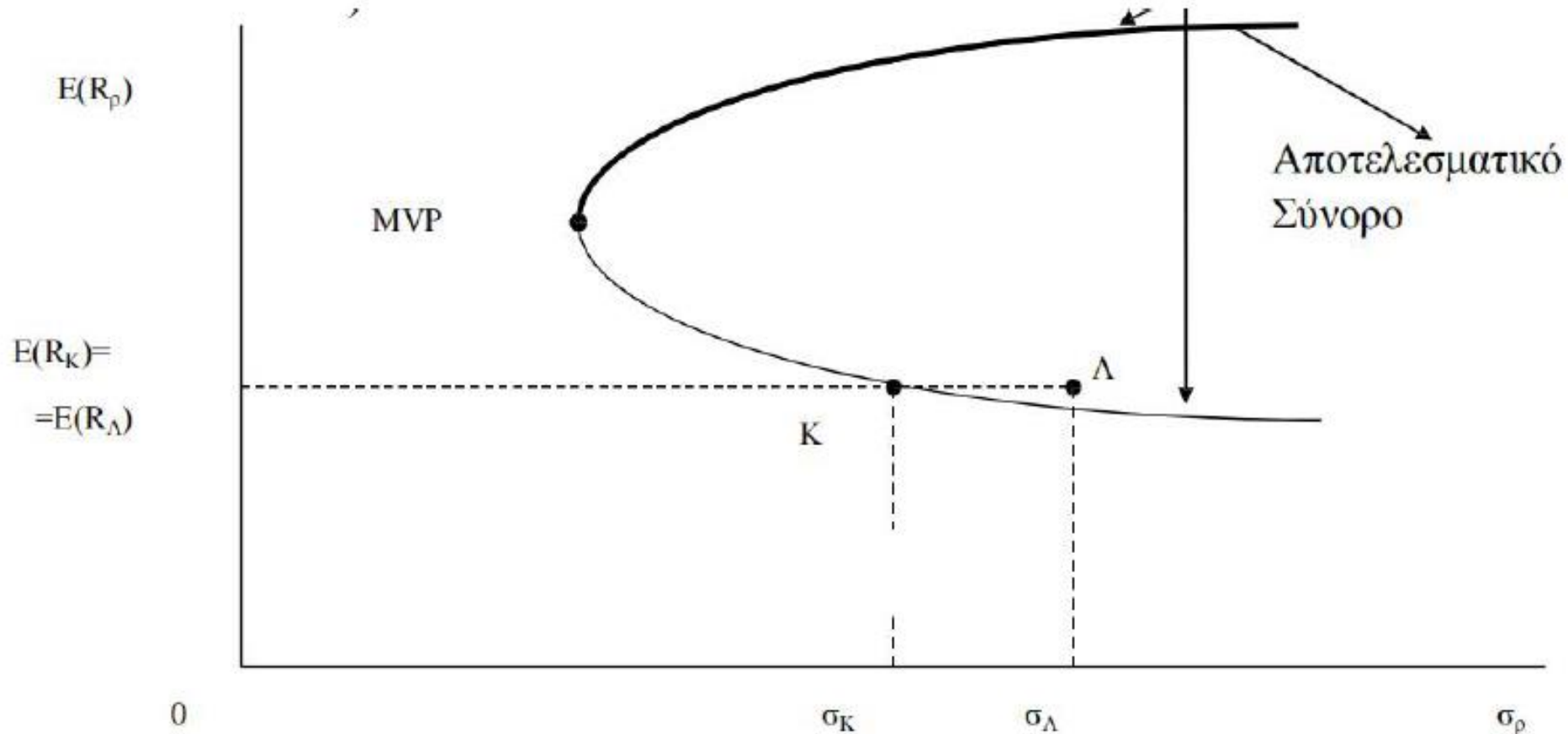
- Τα ενδιάμεσα σημεία για να βρεθούν θα πρέπει να κάνουμε:

$$\min Var (R_p)$$

$$st. E(R_p) = \mu$$

Δηλαδή θέλουμε τον χαμηλότερο κίνδυνο για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης (μ), και έτσι αλλάζοντας κάθε φορά το μ , παίρνουμε διαφορετικά αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια τα οποία, ενωμένα, σχηματίζουν το **Αποτελεσματικό Σύνορο (Efficient Frontier)**

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου



- **Γεωμετρικός Τόπος:** Είναι το σύνολο όλων των δυνατών χαρτοφυλακίων (δηλαδή όλη η καμπύλη)
- **Αποτελεσματικό Σύνορο (Efficient Frontier):** Είναι το σύνολο όλων των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, δηλαδή από το Minimum Variance Portfolio και πάνω.

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου με Excel

Η διαδικασία στο Excel περιλαμβάνει:

Βήματα:

1. Υπολογισμός:

- μέσων αποδόσεων μετοχών
- διακυμάνσεων & συνδιακυμάνσεων

2. Δημιουργία πίνακα βαρών (w) χαρτοφυλακίου

3. Υπολογισμός:

- αναμενόμενης απόδοσης χαρτοφυλακίου
- κινδύνου (τυπική απόκλιση)

4. Χρήση του **Solver**:

- Στόχος: ελαχιστοποίηση κινδύνου
- Περιορισμοί: άθροισμα βαρών = 1, δεδομένη απόδοση

5. Επανάληψη για διαφορετικά επίπεδα απόδοσης

6. Γραφική απεικόνιση του αποδοτικού συνόρου

Το αποτέλεσμα είναι η καμπύλη **Efficient Frontier** στο διάγραμμα κινδύνου–απόδοσης.

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου με Excel

Συγκεκριμένο Παράδειγμα

Excel → *Markowitz_Efficient_Frontier (ΕΝΟΤΗΤΑ 5)*

Στο φύλλο “**Markowitz Portfolio**” θα βρεις:

- **Δεδομένα 3 μετοχών (Α, Β, Γ)**
 - Αναμενόμενες αποδόσεις μετοχών (έτοιμες)
 - Τυπικές αποκλίσεις μετοχών (έτοιμες)
- **Πίνακα συνδιακυμάνσεων (έτοιμο)**
- **Κελιά βαρών χαρτοφυλακίου (αυτά θα αλλάζει ο Solver!)**
- **Έτοιμους τύπους για:**
 - Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου [`=SUMPRODUCT(B2:B4; B7:B9)`]
 - Διακύμανση [`=MMULT(TRANSPOSE(B7:B9); MMULT(F2:H4; B7:B9))`]
 - Τυπική απόκλιση (κίνδυνος) [`=SQRT(B12)`]

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου με Excel

Συγκεκριμένο Παράδειγμα

Excel → *Markowitz_Efficient_Frontier (ΕΝΟΤΗΤΑ 5)*

Πώς το χρησιμοποιείς:

- Άνοιξε το αρχείο
- Πήγαινε: **Δεδομένα (Data) → Solver**
- Ρυθμίσεις:
 - **Set Objective:** κελί διακύμανσης
 - **To:** Min
 - **By Changing Cells:** βάρη χαρτοφυλακίου
- Περιορισμοί:
 - άθροισμα βαρών = 1 ($B7 + B8 + B9 = 1$)
 - απόδοση χαρτοφυλακίου = π.χ. 10% ($B11 = 10\%$ (ή όποια απόδοση θες))
 - βάρη ≥ 0 ($B7:B9 \geq 0$ (χωρίς short selling))
- Πάτα **Solve**
- Επανάλαβε για διαφορετικές αποδόσεις → φτιάχνεις **efficient frontier**

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου με Excel Συγκεκριμένο Παράδειγμα

Excel → *Markowitz_Efficient_Frontier (ΕΝΟΤΗΤΑ 5)*

Δημιουργία Αποτελεσματικού Συνόρου (Efficient Frontier) → Για τα ενδιάμεσα σημεία..

- Άλλαξε την τιμή του περιορισμού απόδοσης:
 - 9%, 10%, 11%, 12%
(Δηλαδή B11 = 9% ή 11% ή 12%)
- Κάθε φορά:
 - αποθήκευσε:
 - Απόδοση (B11)
 - Κίνδυνο (B13)
- Φτιάξε πίνακα Απόδοσης-Κινδύνου

ΚΙΝΔΥΝΟΣ	ΑΠΟΔΟΣΗ
12%	9%
13%	10%
15.80%	11%
20%	12%

Κατασκευή Αποτελεσματικού Συνόρου με Excel Συγκεκριμένο Παράδειγμα

Excel → *Markowitz_Efficient_Frontier (ΕΝΟΤΗΤΑ 5)*

Γραφική παράσταση

- Εισαγωγή (Insert) → Διάγραμμα (Charts) → **XY (Scatter)**
- **X**: Κίνδυνος
- **Y**: Απόδοση

→ Η καμπύλη που προκύπτει είναι το **Efficient Frontier**.