Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

ΕΝΟΤΗΤΑ 7:

Υπόδειγμα της Αγοράς

(Market Model)

Γραμμική Σχέση Απόδοσης Μετοχής – Αγοράς

- Το υπόδειγμα της αγοράς (market model) εκφράζει τη σχέση μεταξύ της απόδοσης μιας μετοχής και της απόδοσης της συνολικής αγοράς:

$$\boldsymbol{R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i}$$

Όπου:

- R_i= απόδοση της μετοχής i
- R_m= απόδοση της αγοράς (π.χ. δείκτης S&P 500)
- α_i= σταθερά (alpha)
- β_i= συντελεστής ευαισθησίας (beta)
- ε_i= τυχαίο σφάλμα (residual)

- Το μοντέλο βασίζεται στην υπόθεση ότι η απόδοση μιας μετοχής επηρεάζεται γραμμικά από την αγορά και από τυχαίους παράγοντες.

[Το υπόδειγμα αυτό αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή του CAPM, επικεντρώνοντας περισσότερο στην εμπειρική σχέση μεταξύ μετοχής και αγοράς.]

Οικονομική Ερμηνεία των Παραμέτρων

- **Ο συντελεστής α (Alpha)**

Αντιπροσωπεύει την απόδοση της μετοχής που δεν εξηγείται από την αγορά.

$$\boldsymbol{\alpha} = \textbf{Πραγματική Απόδοση} - \textbf{Αναμενόμενη Απόδοση βάσει αγοράς}$$

$\boldsymbol{\alpha > 0}$**:**

- Η μετοχή αποδίδει περισσότερο από αυτό που “δικαιολογεί” ο κίνδυνος της.
- Υπεραπόδοση (abnormal return) σε σχέση με την αγορά.

$\boldsymbol{\alpha < 0}$**:**

- Η μετοχή αποδίδει λιγότερο από το αναμενόμενο.
- Υποαπόδοση.

α = 0:

- Η μετοχή αποδίδει ακριβώς όσο προβλέπει το μοντέλο.
- Δεν υπάρχει “ανώμαλη” απόδοση.

Οικονομική Ερμηνεία των Παραμέτρων

- **Ο συντελεστής β (Beta)**

Μετράει τον **συστηματικό κίνδυνο (μη-διαφοροποίησιμο κίνδυνο)** — την ευαισθησία της μετοχής στις κινήσεις της αγοράς.

β = 1 → Η μετοχή κινείται όπως η αγορά

β > 1 → Πιο ευμετάβλητη από την αγορά

β < 1 → Λιγότερο ευμετάβλητη

β < 0 → Κινείται αντίθετα από την αγορά

Υπολογισμός:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

- **Σφάλμα (ε)**

Αντιπροσωπεύει τον **μη συστηματικό κίνδυνο** (διαφοροποιήσιμο κίνδυνο) που δεν εξηγείται από την αγορά (δηλαδή συνδέεται με ειδικούς παράγοντες της εταιρείας π.χ. εταιρικά γεγονότα, ειδήσεις).

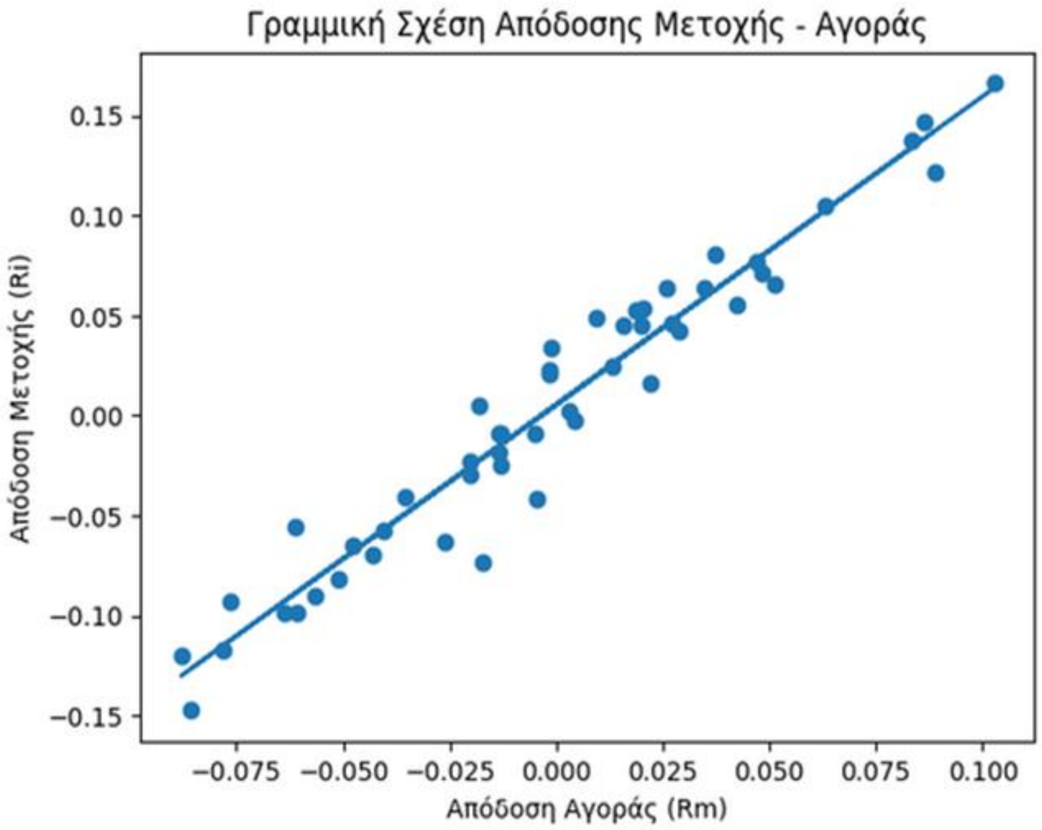
Γραφική Απεικόνιση

Σε διάγραμμα:

- Οριζόντιος άξονας → Απόδοση αγοράς (R_m)
- Κατακόρυφος άξονας → Απόδοση μετοχής (R_i)
- Η κλίση της ευθείας = β
- Το σημείο τομής = α

- Η σχέση είναι γραμμική γιατί υποθέτουμε ότι η μεταβολή της μετοχής εξαρτάται αναλογικά από τη μεταβολή της αγοράς.

Γραφική Απεικόνιση



Στο διάγραμμα βλέπεις:

- Τα σημεία (scatter) → τις παρατηρήσεις αποδόσεων αγοράς–μετοχής
- Την ευθεία → τη γραμμική παλινδρόμηση
- Η κλίση της ευθείας = **β (beta)**
- Η τομή με τον άξονα = **α (alpha)**

Οικονομική ερμηνεία

Η γραμμική σχέση σημαίνει ότι:

- Η αγορά αποζημιώνει μόνο για τον **συστηματικό κίνδυνο**.
- Ο μη συστηματικός (ιδιοσυγκρασιακός) κίνδυνος μπορεί να εξαλειφθεί μέσω διαφοροποίησης.
- Όσο μεγαλύτερο το β, τόσο μεγαλύτερη η αναμενόμενη απόδοση.

Εκτίμηση alpha και beta

- Η εκτίμηση γίνεται με **Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση (OLS - Ordinary Least Squares)**:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_t$$

όπου:

- $R_{i,t}$: απόδοση μετοχής
- $R_{m,t}$: απόδοση αγοράς
- ε_t: σφάλμα

Εκτίμηση alpha και beta

Βήμα 1: Συλλογή δεδομένων

Χρησιμοποιούμε:

- Ημερήσιες, εβδομαδιαίες ή μηνιαίες αποδόσεις
- Συνήθως λογαριθμικές ή απλές αποδόσεις
- Ίδιο χρονικό διάστημα για μετοχή και δείκτη

Βήμα 2: Εκτίμηση με OLS

- Οι εκτιμητές είναι:

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{R}_i - \hat{\beta}\bar{R}_m$$

Στατιστική Σημασία

Μετά την εκτίμηση ελέγχουμε:

- **Έλεγχος για $\boldsymbol{\beta}$**
  - $H_0: \beta = 0$ → Η μετοχή δε σχετίζεται με την αγορά
  - $H_0: \beta = 1$ → Η μετοχή κινείται όπως η αγορά

Χρησιμοποιούμε t-test:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{SE(\hat{\beta})}$$

όπου:

- $\hat{\beta}$ = εκτιμημένο beta από την παλινδρόμηση
- β_0 = τιμή που ελέγχουμε (0 ή 1)
- $SE(\hat{\beta})$ = τυπικό σφάλμα της εκτίμησης

- **Έλεγχος για $\boldsymbol{\alpha}$**
  - $H_0: \alpha = 0$

Αν απορρίπτεται → υπάρχει στατιστικά σημαντική υπεραπόδοση ή υποαπόδοση

Εκτίμηση alpha και beta

- **Τι άλλο κοιτάμε στην πράξη**
  - R^2→ Πόσο ποσοστό της μεταβλητότητας εξηγεί η αγορά
  - Durbin-Watson → αυτοσυσχέτιση
  - p-values → στατιστική σημαντικότητα
  - Διάστημα εμπιστοσύνης

Διάσπαση Συνολικής Διακύμανσης

Από το υπόδειγμα:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

και με την υπόθεση ότι:

- $\boldsymbol{E(\varepsilon_i) = 0}$ → Το σφάλμα δεν έχει συστηματική τάση και ό,τι δεν εξηγεί η αγορά, είναι “τυχαίο”.
- $\boldsymbol{Cov(R_m, \varepsilon_i) = 0}$ → Ο ειδικός κίνδυνος της εταιρίας **δε σχετίζεται** με τις κινήσεις της αγοράς. Δηλαδή, τα εταιρικά νέα είναι ανεξάρτητα από τις μακροοικονομικές κινήσεις.

παίρνουμε:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Διάσπαση Συνολικής Διακύμανσης

Η συνολική διακύμανση χωρίζεται σε:

➢ **Συστηματικός Κίνδυνος**

$$\boldsymbol{\beta_i^2 \sigma_m^2}$$

- Είναι το μέρος της διακύμανσης που οφείλεται στις κινήσεις της αγοράς.
- Προέρχεται από:
  - Μακροοικονομικές μεταβολές
  - Επιτόκια
  - Πληθωρισμό
  - Υφέσεις
  - Γεωπολιτικούς παράγοντες
- Δεν μπορεί να εξαλειφθεί με διαφοροποίηση.
- Μετριέται από το **β (beta)**.
- Όσο μεγαλύτερο το β → τόσο μεγαλύτερη η έκθεση στον συστηματικό κίνδυνο.

Διάσπαση Συνολικής Διακύμανσης

➢ **Μη-Συστηματικός Κίνδυνος**

$$\boldsymbol{\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

- Είναι ο ειδικός (ιδιοσυγκρασιακός) κίνδυνος της εταιρίας.
- Προέρχεται από:
  - Διοικητικές αποφάσεις
  - Νέα προϊόντα
  - Σκάνδαλα
  - Κερδοφορία
  - Εταιρικά γεγονότα
- Μπορεί να μειωθεί μέσω διαφοροποίησης.

Διάσπαση Συνολικής Διακύμανσης

➢ **Γιατί η διαφοροποίηση εξαλείφει τον μη συστηματικό κίνδυνο;**

Σε χαρτοφυλάκιο με πολλές μετοχές:

- Τα θετικά και αρνητικά ε_i τείνουν να αλληλοαναιρούνται.
- Ο ειδικός κίνδυνος "σβήνει".
- Παραμένει μόνο ο συστηματικός (μη-διαφοροποιήσιμος) κίνδυνος.
- Αυτό είναι και η θεμελιώδης ιδέα του **Capital Asset Pricing Model (CAPM)**:

→ Η αγορά αποζημιώνει μόνο για τον συστηματικό κίνδυνο.

Διάσπαση Συνολικής Διακύμανσης

- Θα δούμε γιατί σε χαρτοφυλάκιο με **Ν μετοχές** ο μη συστηματικός κίνδυνος τείνει στο 0 όταν $N \to \infty$.

1. Ξεκινάμε από το market model

Για κάθε μετοχή i:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

Με τις υποθέσεις:

- $E(\varepsilon_i) = 0$
- $Cov(R_m, \varepsilon_i) = 0$
- $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ για $i \neq j$ → Σημαίνει ότι τα εταιρικά σοκ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

2. Απόδοση χαρτοφυλακίου

Έστω ισοσταθμισμένο χαρτοφυλάκιο:

$$R_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i$$

Αντικαθιστούμε:

$$R_p = \alpha_p + \beta_p R_m + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$$

3. Διακύμανση χαρτοφυλακίου

Η συνολική διακύμανση χαρτοφυλακίου:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\right)$$

Εστιάζουμε στο δεύτερο μέρος (μη συστηματικός κίνδυνος) →→→

4. Διακύμανση του μέσου των σφαλμάτων

Αν τα ε_i είναι ασυσχέτιστα:

$$Var\left(\frac{1}{N}\sum \varepsilon_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum Var(\varepsilon_i)$$

Αν όλες οι μετοχές έχουν περίπου ίδια διακύμανση σ_ε^2:

$$= \frac{1}{N^2} \cdot N\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N}$$

ΑΡΑ: Μη-συστηματικός Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου = $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{N}$

Όταν: $N \to \infty$, τότε:

$$\boldsymbol{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{N} \to 0}$$

→ Άρα ο ειδικός κίνδυνος εξαφανίζεται.

5. Τι μένει τελικά;

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 \to \beta_p^2 \sigma_m^2}$$

→ Δηλαδή μένει **μόνο ο συστηματικός κίνδυνος**.

Σύνδεση με R^2

Από την παλινδρόμηση:

$$R^2 = \frac{\beta_i^2 \sigma_m^2}{\sigma_i^2}$$

Το R^2 δείχνει **ποιο ποσοστό της συνολικής διακύμανσης των αποδόσεων της μετοχής εξηγείται από τη διακύμανση της αγοράς**.

Ερμηνεία:

- Αν $R^2 = 0$ →η αγορά δεν εξηγεί καθόλου τη μεταβολή της μετοχής
- Αν $R^2 = 1$ →η αγορά εξηγεί πλήρως τη μεταβολή της μετοχής

Π.χ. $R^2 = 0.64$ σημαίνει ότι **64% της διακύμανσης της μετοχής εξηγείται από την αγορά**

Δηλαδή:

- Υψηλό R^2→ Η μετοχή επηρεάζεται κυρίως από την αγορά
- Χαμηλό R^2→ Μεγάλο μέρος κινδύνου είναι ειδικός

Παράδειγμα 1

Δίνονται:

- Cov(Ri,Rm)=0.025
- Var(Rm)=0.02
- Μέση απόδοση μετοχής = 15%
- Μέση απόδοση αγοράς = 10%

Να υπολογιστούν: Beta, alpha και αν η μετοχή είναι επιθετική ή αμυντική

➢ **Υπολογισμός Beta (β)**

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

$$\beta = \frac{0.025}{0.02} = 1.25$$

Παράδειγμα 1

- **Υπολογισμός Alpha (α)**

$$\alpha = \bar{R}_i - \beta \bar{R}_m$$

$$\alpha = 0.15 - 1.25(0.10)$$

$$\alpha = 0.15 - 0.125 = 0.025 = 2.5\%$$

- **Χαρακτηρισμός μετοχής**

- β = 1.25 > 1
  ➞ Η μετοχή είναι **επιθετική**
  ➞ Μεταβάλλεται περισσότερο από την αγορά

- α = 2.5%
  ➞ Παρουσιάζει **υπεραπόδοση**

Παράδειγμα 2

Δίνονται:

- β = 0.8
- Var(Rm)=0.03
- Var(ε)=0.012

Να βρεθεί:

- Συστηματικός κίνδυνος
- Συνολικός κίνδυνος
- Ποσοστό συστηματικού κινδύνου

➢ **Συστηματικός κίνδυνος**

$$\beta^2 Var(R_m)$$
$$0.8^2 \times 0.03$$
$$0.64 \times 0.03 = 0.0192$$

Παράδειγμα 2

- **Συνολικός κίνδυνος**

$$Var(R_i) = \beta^2 Var(R_m) + Var(\varepsilon)$$
$$= 0.0192 + 0.012 = 0.0312$$

- **Ποσοστό συστηματικού κινδύνου**

$$\frac{0.0192}{0.0312} = 0.6154$$

➞ 61.54% του κινδύνου είναι συστηματικός
➞ 38.46% είναι μη συστηματικός

Παράδειγμα 3

Θα χρησιμοποιήσουμε **μηνιαία δεδομένα** για:

- Μετοχή: Apple (AAPL)
- Αγορά: S&P 500
- Περίοδος: 6 μήνες
- Αποδόσεις σε %

Σε δεκαδική μορφή:

Rm = [0.02, -0.015, 0.03, 0.01, -0.025, 0.04]
Ri = [0.035, -0.02, 0.048, 0.012, -0.038, 0.06]

Μήνας	**Rm (Αγορά)**	**Ri (Μετοχή)**
1	2.0%	3.5%
2	-1.5%	-2.0%
3	3.0%	4.8%
4	1.0%	1.2%
5	-2.5%	-3.8%
6	4.0%	6.0%

Παράδειγμα 3

- **Υπολογισμός Μέσων Αποδόσεων ($\bar{R}_m, \bar{R}_i$)**

Τύπος Υπολογισμού Μέσης Απόδοσης Αγοράς: $\bar{R}_m = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_{m,t}$

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα:

Rm = [0.02, −0.015, 0.03, 0.01, −0.025, 0.04] και n = 6

$$\bar{R}_m = (0.02-0.015+0.03+0.01-0.025+0.04)/6$$

$$\bar{R}_m = 0.01 = 1\%$$

Και αντίστοιχα η Μέση Απόδοση Μετοχής είναι:

$$\bar{R}_i = \frac{0.097}{6} = 0.01617 = 1.617\%$$

Παράδειγμα 3

➢ **Υπολογισμός Διακύμανσης Αγοράς**

Επειδή έχουμε δείγμα, χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boldsymbol{Var(R_m) = \frac{1}{n-1}\sum(R_{m,t} - \bar{R}_m)^2}$$

$$Var(R_m) = 0.000613$$

Παράδειγμα 3

➢ **Υπολογισμός Συνδιακύμανσης $\boldsymbol{Cov(R_i, R_m)}$**

Χρησιμοποιούμε τον δειγματικό τύπο:

$$Cov(R_i, R_m) = \frac{1}{n-1}\sum(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{m,t} - \bar{R}_m)$$

Όπου:

- $n = 6$
- $\bar{R}_m = 0.01$
- $\bar{R}_i = 0.01617$

$$Cov(R_i, R_m) = 0.000929$$

Παράδειγμα 3

➢ **Υπολογισμός Beta**

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

$$\beta = \frac{0.000929}{0.000613}$$

$$\beta = 1.52 > 1$$

Άρα η μετοχή είναι **επιθετική**.

Παράδειγμα 3

➢ **Υπολογισμός Alpha**

$$\alpha = \bar{R}_i - \beta \bar{R}_m$$

$$\alpha = 0.01617 - 1.52(0.00917)$$

$$\alpha = 0.01617 - 0.01394$$

$$\alpha = 0.00223 = 0.223\%$$

Θετικό alpha → μικρή υπεραπόδοση.

Παράδειγμα 3

- **Υπολογισμός R^2**

$$R^2 = \frac{\mathrm{Cov}^2(R_i, R_m)}{Var(R_i)Var(R_m)}$$

Με υπολογισμούς:

$$R^2 = 0.89$$

Το 89% της διακύμανσης της μετοχής εξηγείται από την αγορά.
Άρα μικρός μη συστηματικός (διαφοροποιήσιμος) κίνδυνος.

Παράδειγμα 3 - συνέχεια..

Τελική Ερμηνεία

- β = 1.52 → υψηλός συστηματικός κίνδυνος
- α = 0.223% → θετική μη κανονική απόδοση
- R^2 = 0.89 → η μετοχή κινείται έντονα μαζί με την αγορά

Η μετοχή:

- Είναι κατάλληλη για επιθετικό επενδυτή
- Έχει μικρό ιδιοσυγκρασιακό κίνδυνο

Με βάση τα ίδια δεδομένα:

- Υπολόγισε τον συστηματικό κίνδυνο.
- Υπολόγισε τον μη συστηματικό κίνδυνο.
- Αν η αγορά αναμένεται να δώσει 5% τον επόμενο μήνα, ποια είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής;

Παράδειγμα 3 - συνέχεια..

- **Συστηματικός Κίνδυνος**

Τύπος:

$$\text{Συστηματικός Κίνδυνος} = \beta^2 Var(R_m)$$

Υπολογισμός:

$$1.52^2 \times 0.000613$$
$$2.3104 \times 0.000613$$
$$= 0.001417$$

- **Μη Συστηματικός Κίνδυνος**

- Ξέρουμε ότι:

$$R^2 = \frac{\text{Συστηματικός Κίνδυνος}}{\text{Συνολική Διακύμανση}}$$

Άρα:

$$Var(R_i) = \frac{\text{Συστηματικός Κίνδυνος}}{R^2} = \frac{0.001417}{0.89}$$

$$Var(R_i) = 0.001592$$

Παράδειγμα 3 - συνέχεια..

Οπότε ο μη-συστηματικός κίνδυνος θα είναι:

$$Var(\varepsilon) = Var(R_i) - \text{Συστηματικός Κίνδυνος}$$

$$= 0.001592 - 0.001417$$

$$= 0.000175$$

Παράδειγμα 3 - συνέχεια..

➢ **Αναμενόμενη Απόδοση αν η αγορά δώσει 5%**

Χρησιμοποιούμε το Market Model:

$$E(R_i) = \alpha + \beta R_m$$

$$= 0.00223 + 1.52(0.05) = 0.00223 + 0.076$$

$$= 0.07823 = 7.823\%$$

Τελικό Συμπέρασμα

Αν η αγορά (π.χ. ο S&P 500) αυξηθεί 5%:

- Η μετοχή αναμένεται να δώσει **7.82%**

Ανάλυση κινδύνου:

- 89% του κινδύνου είναι συστηματικός
- Μόνο 11% είναι ιδιοσυγκρασιακός
- Η μετοχή είναι έντονα market-driven